

**Nota:**

Suite à des modifications apportées au gyroscope de Magnus 02550.00 les figures 73, 78, 80 et 81 dans le livre «Le Gyroscope» par Kurt Magnus ne sont plus valables en tous leurs détails.

Les instructions de montage figurant à la page 134 dudit livre sont à annuler et à remplacer par celles jointes au gyroscope.

Série de publication PHYWE

Edition 1983

Tous droits de traduction, de réimpression partielle et reproduction photomécanique réservés à PHYWE AG, Göttingen, RFA.

## TABLE DES MATIERES

<b>1. Introduction</b>	1-6
<b>2. Le gyroscope symétrique</b>	7-40
2.1 La loi fondamentale de l'effet gyroscopique: Les mouvements de précession	7
a) L'expérience de précession	7
b) Explication de l'expérience de précession. Le théorème du parallélisme de même sens des axes de rotation	9
c) L'expression quantitative de l'expérience de précession	11
2.2 Les mouvements de nutation	14
a) La tenue du gyroscope exempt de forces	14
b) L'expression quantitative du mouvement de nutation	17
c) Autres expériences sur le mouvement de nutation	18
2.3 La précession pseudo-régulière	22
2.4 La tranquillité de marche du gyroscope symétrique	24
2.5 Le pendule gyroscopique	26
a) Assujettissement par ressorts	26
b) Assujettissement par un couple de gravité	29
c) Cas limites du pendule gyroscopique	32
2.6 L'influence de l'inertie du cadre	34
a) Dérive cinétique du gyroscope à Cardan exempt de forces	35
b) Le gyroscope à cardan lourd	38
<b>3. Le gyroscope asymétrique</b>	41-58
3.1 Les précessions	41
3.2 Les nutations	42
3.3 Le gyroscope assujetti	47
a) L'axe de la figure est l'axe du plus grand moment d'inertie principal	48
b) L'axe de la figure est l'axe du moment d'inertie principal moyen	48
c) L'axe de la figure est l'axe du plus petit moment d'inertie principal	50

3.4	Le gyroscope asymétrique à deux degrés de liberté	51
3.5	Le réglage d'un corps asymétrique oscillant dans l'axe du plus grand moment d'inertie principal	52
3.6	Découplage des oscillations d'un corps asymétrique en cas d'oscillations autour des axes des moments d'inertie principaux	54
3.7	L'influence de l'inertie du cadre	55
<b>4.</b>	<b>Les phénomènes gyroscopiques</b>	<b>59-74</b>
4.1	Le disque, le rond de bière, le boomerang	59
4.2	La déviation latérale d'un projectile	61
4.3	La toupie, le cerceau et la bicyclette	64
4.4	Le broyeur à meules et l'hélice	68
4.5	La terre et les satellites	70
<b>5.</b>	<b>Les appareils gyroscopiques</b>	<b>75-112</b>
5.1	Le gyroscope directionnel, un conservateur de cap	75
a)	Le principe	75
b)	L'erreur de Cardan	77
5.2	L'horizon gyroscopique	80
a)	L'horizon gyroscopique non piloté	81
b)	L'horizon piloté par une précession avec un couple de gravité	82
c)	L'erreur de virage	85
d)	La précession pilotée de l'horizon Sperry	87
e)	L'horizon avec précession pilotée par système à billes entraînées	88
5.3	Le compas gyroscopique, un indicateur de cap	91
a)	Pourquoi le compas gyroscopique indique-t-il le nord?	91
b)	L'expérience avec le compas gyroscopique	92
c)	L'erreur de route	95
5.4	Les gyromètres et leurs applications	97
a)	Le gyromètre assujéti par ressorts	98
b)	Le gyromètre intégrateur	100
c)	Le gyromètre, détecteur d'une plate-forme stabilisée	102
d)	Les plate-formes gyroscopiques pour la navigation inertielle	103
5.5	Le gyroscope de navire "SCHLICK" comme exemple d'un gyroscope de stabilisation	106
a)	Le principe du gyroscope stabilisateur de navire	106
b)	L'erreur du gyroscope stabilisateur de navire	109

<b>6.</b>	<b>Annexe</b>	113-142
6.1	Explication de quelques notions de mécanique et de la technique gyroscopique	113
a)	Vecteur force et vecteur couples	113
b)	Poids, centre de gravité, couple de gravité	115
c)	Axe de rotation, vitesse de rotation et vitesse angulaire	116
d)	Le vecteur vitesse de rotation	116
e)	Masse et moments d'inertie	118
f)	Le rayon d'inertie	119
g)	L'ellipsoïde d'inertie	119
h)	Axes d'inertie principaux et moments d'inertie principaux	120
i)	Le moment cinétique	121
j)	Le théorème du moment cinétique	122
6.2	Terminologie employée en technique des appareils gyroscopiques	123
6.3	Description et notice d'utilisation du gyroscope-modèle pédagogique de Phywe AG	134
a)	Description	134
b)	La manègement du modèle	138
c)	Instructions de montage	141
<b>7.</b>	<b>Bibliographie</b>	143-144
7.1	Publications de livres en langue allemande	143
7.2	Articles de revues	143

## AVANT-PROPOS

La première édition de ce petit guide a été écrite il y a plus de vingt ans. Deux raisons m'y ont poussé, d'une part, la demande souvent formulée, après des conférences devant un auditoire de personnes intéressées par la technique, de techniciens et d'ingénieurs, d'écrire et d'éditer l'essentiel du contenu des conférences et d'autre part, mon propre souhait de rédiger une description et une notice d'emploi du gyroscope-modèle pédagogique, utilisé lors des conférences et initialement conçu uniquement pour mes propres besoins. L'intérêt inattendu qu'a soulevé ce modèle d'appareil a conduit les Ets. PHYWE AG à Göttingen à reproduire l'appareil et à poursuivre son développement.

Toutefois, n'écrire qu'une notice d'emploi ne m'enchantait guère. Ainsi fut finalement conçu un certain guide à travers le domaine du gyroscope et de ses applications enrichi d'une description de nombreuses expériences. J'ai essayé dans ce guide de mettre en valeur les idées fondamentales nécessaires à la compréhension des phénomènes gyroscopiques sans présumer de connaissances théoriques préalables et particulières. Toutefois, comme la compréhension ne doit pas se faire au détriment d'une netteté scientifique, ce projet n'était précisément pas facile à réaliser. Néanmoins, j'ose espérer que le résultat va être profitable. De multiples avis favorables et le fait qu'environ 10 ans après la première parution, il était nécessaire de procéder à une réédition inchangée dans l'essentiel et plus tard plusieurs fois réimprimée, permettent un constat de réussite.

Après un nouvel épuisement de cette édition je ne pouvais me résoudre d'accorder une nouvelle fois le droit à une réimpression non modifiée. Trop de nouveautés sont intervenues dans le domaine du gyroscope, les 20 dernières années. On ne peut pas simplement les ignorer sans paraître désespérément dépassé. De plus, non seulement une quantité de jugements, de propositions d'élargissements et d'améliorations mais aussi un certain trésor d'expériences avec le modèle pédagogique se sont, entretemps, accumulés. Les futurs intéressés n'en devraient pas être privés. Pour cette raison de nouveaux chapitres et de nombreuses descriptions d'expériences se sont ajoutés lors de la retouche. Certaines modifications du style général s'avéraient nécessaires du fait que le livre s'adressait maintenant à un cercle de lecteurs qui se distingue, à bien des égards, du cercle des intéressés bien circonscrits et très limités de la première édition. Me référant aux expériences acquises, je pense que même des spécialistes, c.à.d. des ingénieurs qui ont affaire à des appareils gyroscopiques vont accueillir avec satisfaction une présentation des lois fondamentales générales plus facilement accessibles. Parallèlement aux compléments on a aussi procédé à des transpositions. En outre, on a supprimé ou présenté autrement

quelques descriptions nettement trop élémentaires. Plus d'un lecteur va certainement apprécier le classement par thème reproduit dans l'annexe.

Lors de la reprise, je souhaitais transmettre au lecteur prêt à collaborer, un peu de cette joie de pouvoir pénétrer dans un tel domaine intéressant des connaissances. Cet ouvrage devrait être une première incitation et une aide. Celui, qui au-delà de l'enseignement a pénétré par propre expérience, par jeu ou par réflexion plus loin dans le royaume fascinant du gyroscope, comprendra l'astronome Sir John Herschel qui, de son temps, désignait le gyroscope comme un instrument philosophique.

Je voudrais profiter de l'occasion de la réédition pour remercier cordialement tous les lecteurs qui m'ont aidé par leur avis. Si le succès n'avait pas été tel, je n'aurais jamais eu l'idée de reconsidérer une reprise de l'ouvrage déjà dépassé. Mes remerciements vont aussi à mes assistants actuels, avant tout à Mr. Dipl. Ing. Helmut Sorg, qui a fait avancer la réédition par une collaboration méticuleuse et une critique pertinente, puis à Mr. cand. mach. László Pelényi qui a exécuté le projet et le nouveau dessin de nombreuses figures avec grand talent. Mais je voudrais aussi remercier ici PHYWE AG ainsi que le Sté INDUSTRIE-DRUCK GmbH pour leur collaboration aussi bien agréable qui stimulante et leur parfaite compréhension à mon égard.

Stuttgart, Janvier 1965

KURT MAGNUS

## 1. INTRODUCTION

Chacun de nous a certainement dans sa vie joué avec des toupies. Leurs comportements bizarres éveillent la curiosité et incitent, en même temps, à exécuter de multiples variations dans le jeu avec cette même toupie. Qui n'a pas observé, fasciné, les curieux mouvements chancelants de la toupie juste avant sa chute définitive? Qui n'a pas fait des essais pour étudier la façon d'une toupie de parer les chocs?

Des artistes exécutent des choses merveilleuses avec des assiettes, cerceaux, couteaux et tiges tournants. Ils utilisent dans ce cas précisément ces propriétés gyroscopiques qui sont aussi responsables de la danse curieuse de la toupie des enfants.

Il y a plus de 200 ans on a déjà essayé d'utiliser d'une façon utilitaire les propriétés gyroscopiques des corps en rotation. Serson a construit un appareil judicieux qui, même en cas de mauvaise visibilité, permettait de reconnaître l'horizon sur un navire en tangage. C'était le premier horizon gyroscopique (horizon artificiel). De nos jours, de tels appareils sont devenus indispensables en navigation sur mer et dans l'air. Les appareils gyroscopiques n'indiquent non seulement l'horizon mais aussi le cap. Ce sont aussi des appareils gyroscopiques qui sont utilisés pour la stabilisation d'avions, lors du pilotage automatique, et des navires équipés d'installations d'amortissement du roulis.

Même notre terre peut être assimilée à un gigantesque gyroscope. Ses mouvements de nutation sont d'un grand intérêt pour les géophysiciens et les astronomes car ils permettent de cette manière d'expliquer les déviations du pôle et entre-autres, aussi l'origine des cycles glaciaires.

Les quelques exemples que nous venons de citer indiquent que les mouvements gyroscopiques sont d'un grand intérêt dans la nature et la technique et leur importance est loin d'être négligeable. Ce livre a été consacré à leur description, leur explication et signification. Toutefois, avant de parcourir le domaine des lois gyroscopiques, nous nous devons d'expliquer ce que l'on entend sous un gyroscope. Tout d'abord la définition:

**Tout corps rigide qui exécute un mouvement de rotation est un gyroscope.**

Aucune importance que la rotation soit lente ou rapide. La terre tournant lentement ou les ailes d'un moulin à vent tournant avec nonchalance forment aussi bien des

gyroscopes que les rotors d'une turbine en rotation rapide. Les propriétés gyroscopiques se produisent en fonction du type de suspension, c.à.d. des possibilités de mouvement. Des mouvements gyroscopiques ne peuvent être engendrés avec un rotor dont l'axe repose sur des paliers fixes. Par contre, les propriétés gyroscopiques apparaissent sous forme des forces complémentaires dans les paliers. Lorsqu'on sus-

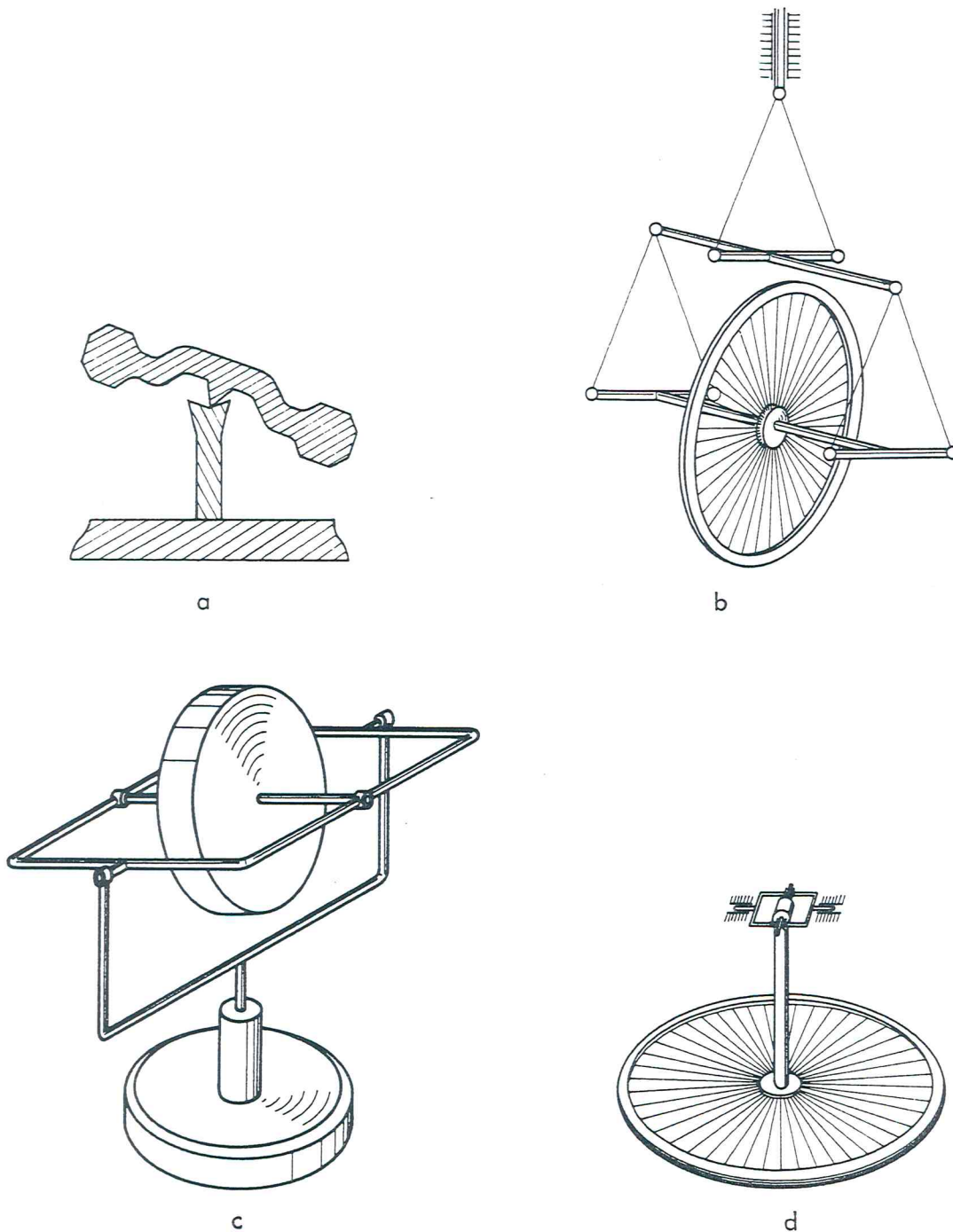


Fig. 1. Différents types de suspension de gyroscope.



pend l'axe du rotor de telle façon qu'il puisse librement pivoter dans l'espace, il est possible d'observer les formes typiques du mouvement propre au gyroscope. Quelques types de suspension permettant au rotor une totale liberté dans sa rotation sont représentés dans la fig. 1. Ils se composent de:

- a) La suspension par cuvette et pivot, telle qu'elle était utilisée dans des modèles gyroscopiques de type ancien (par ex. de Maxwell);
- b) La suspension suivant Prandtl est un support constitué d'un parallélogramme en fils et tiges permettant à l'axe du rotor de se mouvoir aussi bien suivant l'axe horizontal que suivant l'axe vertical;
- c) La suspension à la Cardan dans laquelle le rotor est supporté par deux cadres qui entourent le rotor par l'extérieur (cardan extérieur);
- d) La suspension par articulation à la Cardan, dans laquelle le rotor peut entourer le système de suspension de la même manière qu'indiquée dans la suspension par pivot (a) (cardan intérieur).

Les rotors suspendus de la façon indiquée ont 3 degrés de liberté de rotation car ils peuvent tourner librement autour de chacun des axes spaciaux perpendiculaires entre eux. Lorsqu'on limite la liberté de mouvement - en maintenant par exemple le cadre extérieur fixe dans le cas c) -, il ne reste dans ce cas que deux degrés de liberté de rotation. Si l'on retient maintenant encore le cadre intérieur il ne reste au rotor qu'un seul degré de liberté celui de tourner autour de son propre axe.

En plus de ses mouvements de rotation, le gyroscope peut exécuter des mouvements de déplacement pendant lesquels il parcourt une trajectoire spaciale quelconque - qu'on pense, par exemple, aux mouvements oscillants d'un disque lancé en rotation. Or, la physique nous apprend que les mouvements rotatifs autour du centre de gravité d'un corps peuvent être analysés séparément des mouvements de déplacement. Nous nous intéressons ici exclusivement aux mouvements rotatifs et nous parlerons par la suite uniquement de tels mouvements.

Dans la définition du gyroscope indiquée ci-devant on parle d'un corps **rigide**. Effectivement, les lois gyroscopiques ne s'appliquent telles qu'elles vont être expliquées ici, que pour des rotors rigides. Même s'il n'existe pas dans la nature des corps absolument rigides, il est tout de même judicieux de raisonner sur le cas limite. Les résultats restent toujours valables avec une précision suffisante lorsque les déformations du rotor restent petites. Des cordes tournantes, des courroies d'entraînement, des chaînes ou des liquides en rotation peuvent, certes, faire apparaître des effets qui ressemblent à des phénomènes gyroscopiques, toutefois ces mouvements obéissent à des lois compliquées qui ne feront pas l'objet de notre analyse dans ce cadre.

En commençant par des phénomènes simples concernant les corps trouants - c.à.d. les gyroscopes - nous allons essayer de décrire et d'expliquer la conformité à des

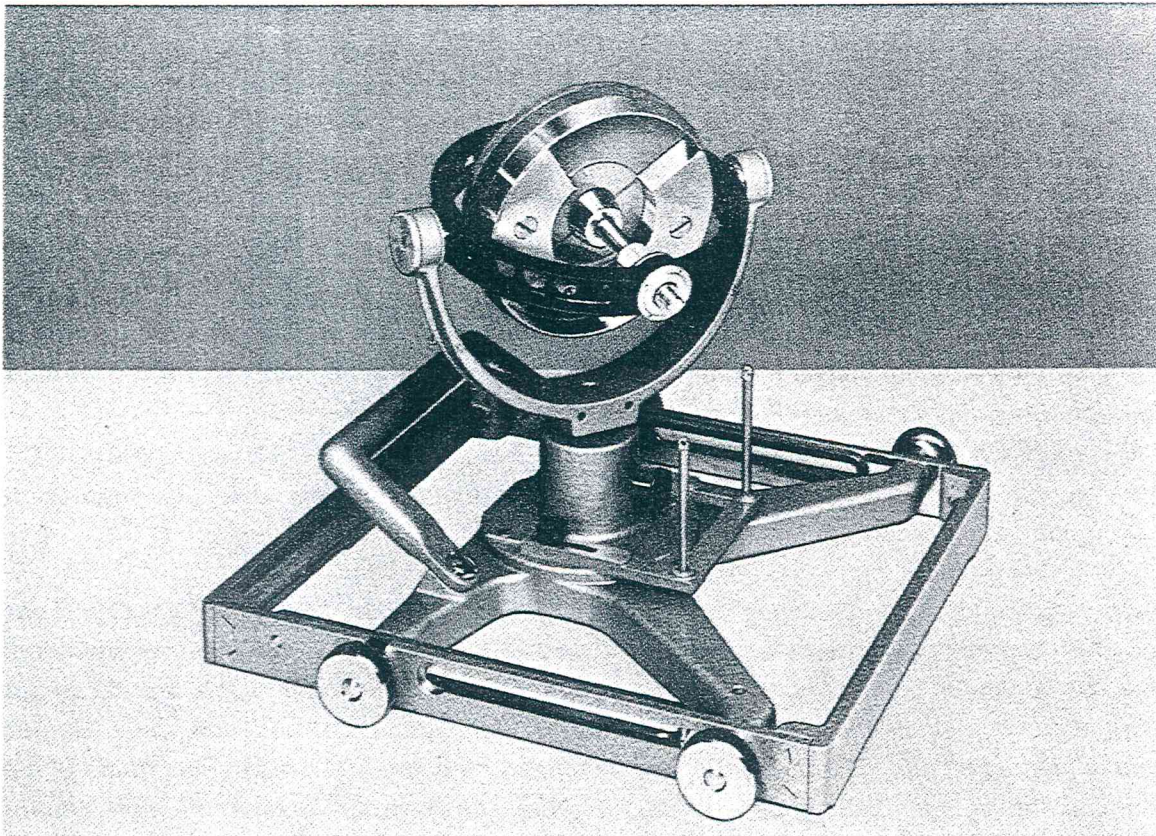


Fig. 2. Model d'enseignement de gyroscope à suspension par Cardan.

lois, des mouvements observés. Les énoncés seront visualisés par des expériences. Les descriptions et les explications sont à considérer comme une première approche et c'est, par des propres observations et expérimentations, qu'on pourra facilement progresser dans la matière et dans le vrai sens du mot acquérir en jouant lumière et connaissances. Toutefois, je voudrais conseiller aux lecteurs intéressés par les expériences d'examiner d'abord la description du modèle de gyroscope utilisé ici (fig. 2) ainsi que les instructions générales d'utilisation qui lui sont applicables (voir annexe 6.3). De multiples manipulations inutiles seront ainsi évitées et on aura par la suite plus chaque science a son propre langage spécialisé qui n'a pas été inventé, comme souvent on le prétend par malveillance pour décourager le novice, mais par nécessité et utilité pour la saisie et la description précise de l'exposé. C'est ainsi que l'on ne pourra pas se passer de quelques notions complémentaires lorsqu'on voudra sortir de l'élémentaire. Au lecteur formé à la physique, la plupart de ces notions seront familières. Toutefois, pour donner un aperçu et pour faciliter la compréhension des expressions spécialisées, les notions les plus importantes ont été rassemblées et succinctement expliquées, une fois pour toutes, dans le paragraphe 6.1. En plus de l'explication des notions les plus utiles, le relevé du chapitre 6.2 est un fil conducteur dont l'étude approfondie peut être conseillée à tous ces lecteurs qui, d'une façon quelconque, ont à faire avec des appareils gyroscopiques ou qui doivent lire la bibliographie qui s'y rapporte.

On ne peut pas éviter d'utiliser dans le cadre de cette étude, certaines expressions dans un sens plus strict et plus précis que dans leur définition en langage normal usuel. Un tel exemple se présente dès le début avec le gyroscope **symétrique** par lequel nous allons commencer l'exposé dans le chapitre suivant. La symétrie se rapporte ici non à la forme visible extérieure mais à la configuration de l'ellipsoïde d'inertie rattachée au corps (voir chapitre 6.1). Même si on utilise souvent des expressions représentatives, on ne devra absolument pas perdre de vue leur signification souvent plus limitée et plus précise dans l'étude des effets gyroscopiques. En effet, les expressions telles que "gyroscope aplati" et "gyroscope allongé" se rapportent à des rotors de configuration en forme de disque ou de barre en général, toutefois leur définition plus précise est seulement possible si on prend en considération les rapports des grandeurs des différents moments principaux d'inertie (voir annexe 6) ou la configuration de l'ellipsoïde d'inertie.

Dans les chapitres suivants on analysera d'abord séparément les lois générales pour des gyroscopes symétriques et asymétriques. Ensuite, on expliquera quelques phénomènes gyroscopiques rencontrés dans la nature et en technique et enfin on parlera des applications des lois gyroscopiques dans les appareils gyroscopiques.

## 2. LE GYROSCOPE SYMETRIQUE

Par gyroscope symétrique, on entend un corps rigide en rotation dont l'ellipsoïde d'inertie est symétrique par rotation (voir annexe 6.1). Pour un tel gyroscope, les deux moments d'inertie principaux sont identiques. De tels types de gyroscopes symétriques jouent un rôle important dans les applications des phénomènes gyroscopiques, car les gyroscopes utilisés en technique sont, pratiquement sans exception, symétriques. Chaque corps de révolution (barre ronde, disque rond, corps de cloche etc) représente un gyroscope symétrique. Toutefois, cette symétrie par rotation du corps n'est pas nécessaire. Par exemple, un disque carré est un gyroscope symétrique, deux de ses moments d'inertie principaux étant identiques par symétrie.

Pour l'ensemble des expériences avec le gyroscope symétrique formulées dans ce paragraphe, les poids-disques du gyroscope-modèle décrit en annexe sont disposés comme le montre la fig. 74 de cet annexe. Mais ce corps ainsi conçu n'est pas un corps de révolution, néanmoins, il représente tout de même un gyroscope symétrique parce que les moments d'inertie pour deux axes se trouvant dans le même plan et perpendiculaire entre eux sont toujours identiques.

### 2.1 La loi fondamentale de l'effet gyroscopique: Les mouvements de précession

#### a) L'expérience de précession

Si un corps en repos mais pouvant se mouvoir librement est soumis à une force, le corps cède à cette force et se met en mouvement. Ceci est aussi vrai pour le mouvement rotatif: Un corps en repos mais suspendu et pouvant tourner librement cède en amorçant une rotation lors d'une application d'un couple. Une expérience va nous confirmer cette pratique journalière: nous déposons, avec précaution, le gyroscope étant immobile, un des poids additionnels sur un côté du cadre intérieur à Cardan (fig. 3). Immédiatement le côté chargé de l'anneau bascule vers le bas. En déposant le poids de l'autre côté, on constate que le sens de rotation du mouvement produit est dépendant de la direction du couple. Le vecteur rotation et le vecteur couple possèdent dans ce cas simple toujours la même direction.

Nous renouvelons maintenant l'expérience, mais lançons d'abord le gyroscope à l'aide de la manivelle d'entraînement. Le gyroscope ne cherche maintenant plus, après

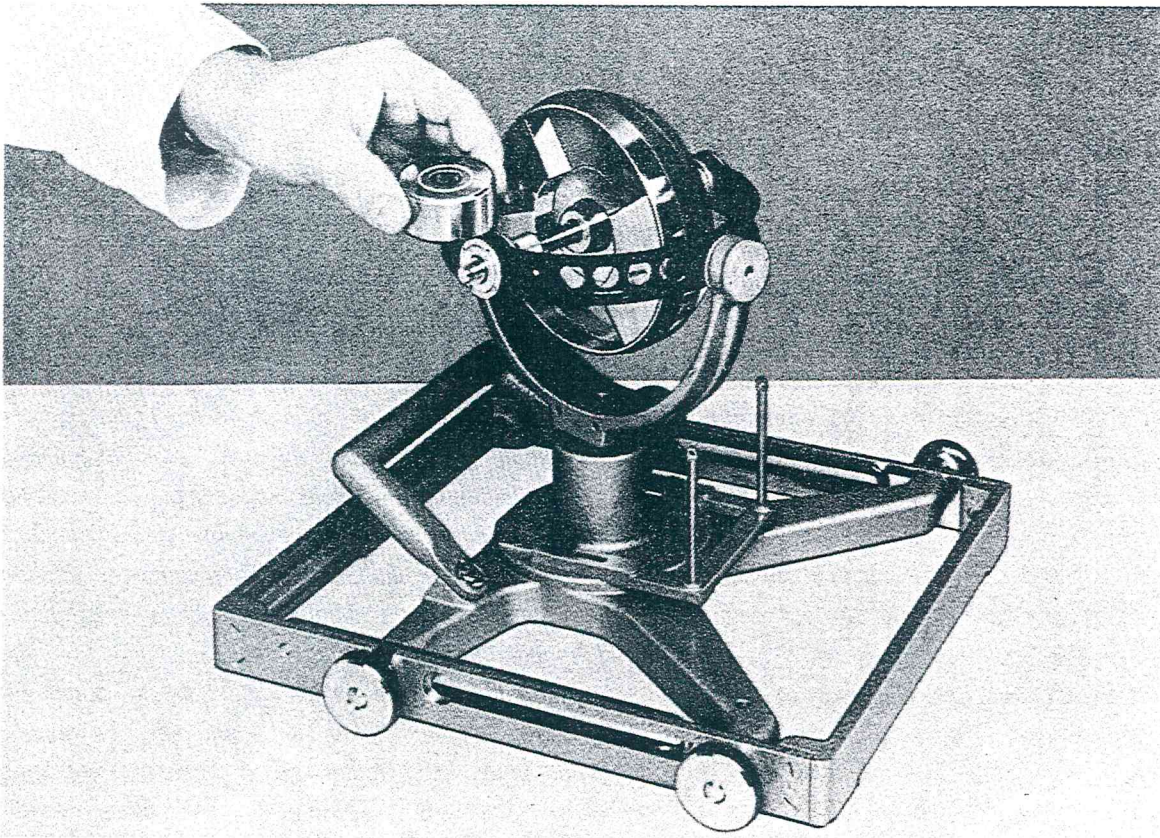


Fig. 3. L'expérience de précession.

fixation du poids, à céder au couple agissant. Le cadre intérieur reste au contraire invariablement horizontal. Par contre le gyroscope complet se met à tourner lentement autour de l'axe extérieur à Cardan et s'écarte donc perpendiculairement du couple agissant. Cet écartement est désigné par mouvement de précession ou plus brièvement par **précession** du gyroscope. Le gyroscope exerce donc une précession sous l'influence d'un couple agissant sur lui.

En exécutant l'expérience, veuillez poser lentement et avec précaution le poids, car autrement les mouvements de nutation, sujet traité ultérieurement, risquent d'avoir une action perturbatrice.

Nous posons maintenant le poids sur l'autre côté du cadre intérieur et constatons qu'alors le sens de rotation de la précession est lui aussi modifié.

Toutefois avant de vouloir essayer d'approfondir, en procédant à d'autres expériences, ce comportement remarquable et à première vue surprenant, une brève réflexion devra nous permettre de comprendre l'expérience de précession. En même temps une loi va se dégager qui sera pour nous un moyen important, souvent employé avec avantage pour l'explication de la suite de notre étude.

b) Explication de l'expérience de précession. Le théorème du parallélisme de même sens des axes de rotation.

Avant d'aborder une explication en premier lieu qualitative du processus de précession, étudions la figure 4. Un gyroscope représenté sous forme d'un disque tournerait autour de son axe dans le sens de la flèche indiquée. Chaque point de la circonférence a alors une vitesse déterminée dont la grandeur dépend de la vitesse de rotation du disque et de la distance des différents points matériels à l'axe de rotation. Dans le cas d'un disque circulaire, tous les points matériels de la circonférence possèdent la même vitesse. La direction du mouvement est déterminée chaque fois par la tangente correspondante au bord du disque. Les vecteurs vitesses aux points a resp. b sont  $\mathbf{v}_1$  resp.  $\mathbf{v}'_1$ . Soit maintenant une force (vecteur force  $\mathbf{K}$ ) agissant sur l'axe du gyroscope. Cette force a pour conséquence de former un couple (vecteur couple  $\mathbf{M}$ ) au point A (point de maintien du gyroscope), qui cherche à faire tourner le gyroscope autour de la direction de l'axe du couple. Si le gyroscope pouvait céder à ce couple, comme ceci serait le cas pour un disque non tournant, les points a resp. b recevraient après un temps infime  $\Delta t$  les vitesses  $\mathbf{v}_2$  resp.  $\mathbf{v}'_2$ . Si l'on additionne graphiquement (vectoriellement) ces vitesses aux vitesses  $\mathbf{v}_1$  resp.  $\mathbf{v}'_1$ , on obtient les résultantes  $\mathbf{v}_3$  resp.  $\mathbf{v}'_3$ . Les points matériels se trouvant à ce moment aux points a resp. se déplaceraient après le temps  $\Delta t$  avec des vitesses  $\mathbf{v}_3$  resp.  $\mathbf{v}'_3$ , s'ils étaient complètement libres de leurs mouvements. Ils ne sont, toutefois, pas libres mais reliés rigidement avec les autres points matériels du disque. Le disque gyroskopique cède certes à la tendance des points matériels aux points a et b à laquelle s'ajoute la rotation autour de l'axe reporté en traits interrompus sur la fig. 4, toutefois son angle de rotation ne se confond pas avec l'angle  $\alpha$  formé par les vecteurs  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_3$  (fig. 5) mais il lui reste proportionnel. Evidemment, nous ne pouvons pas à partir de cette considération calculer quantita-

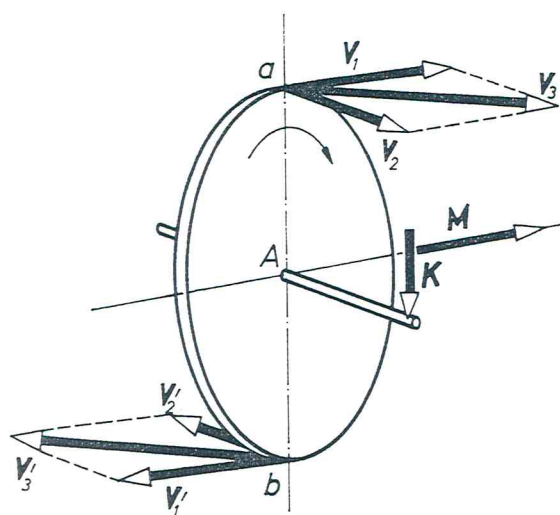


Fig. 4. Pour l'explication de l'expérience de la précession.

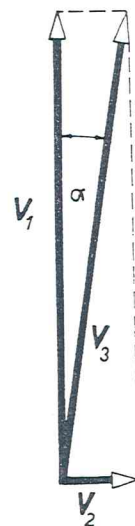


Fig. 5. Addition des vitesses  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$ .

tivement sans autres la vitesse de précession, mais nous pouvons discerner une propriété importante de la précession. En prenant en considération des temps  $\Delta t$  suffisamment petits, on peut écrire avec une précision suffisante:

$$\alpha = \frac{v_2}{v_1}$$

Si maintenant la force  $\mathbf{K}$  respectivement le couple  $\mathbf{M}$  continue à agir d'une façon régulière, la vitesse  $v_2$  augmente, elle aussi, régulièrement c.à.d. linéairement avec le temps. Par voie de conséquence, comme on peut le reconnaître immédiatement dans la formule pour  $\alpha$ , l'angle  $\alpha$  doit croître régulièrement avec le temps. Il en est de même lors d'une rotation régulière du disque gyroscopique complet autour de l'axe normal (ou axe zéro) représenté en traits interrompus et qui est perpendiculaire à l'axe de rotation et perpendiculaire à l'axe du couple. Cette rotation régulière est la précession du gyroscope observée pendant l'expérience.

L'explication qualitative fournie ici pour la précession gyroscopique n'est valable que pour des temps  $\Delta t$  suffisamment petits. Mais on explique aisément à l'aide du théorème du moment cinétique que ce mouvement s'effectue de la même manière même pour des intervalles de temps plus longs. Le théorème du moment cinétique dit que la modification dans le temps du vecteur moment cinétique  $\mathbf{D}$  est égal au vecteur couple  $\mathbf{M}$

$$\frac{\Delta \mathbf{D}}{\Delta t} = \mathbf{M} \quad (1)$$

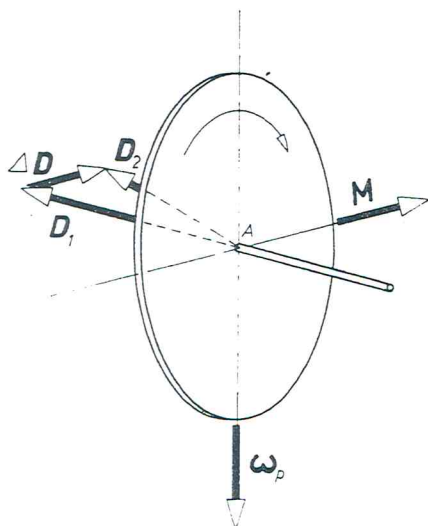


Fig. 6. Vecteur moment cinétique  $\mathbf{D}$ , moment couple  $\mathbf{M}$  et vecteur vitesse de précession  $\omega_p$  lors de l'expérience de précession.

La fig. 6 représente le vecteur couple  $\mathbf{M}$  ainsi que le vecteur moment cinétique  $\mathbf{D}_1$  par rapport au temps  $t_1$ . Au vecteur moment cinétique  $\mathbf{D}_1$  vient s'ajouter l'accroissement  $\Delta\mathbf{D} = \mathbf{M} \Delta t$ , donc un vecteur qui a la même direction que le vecteur couple mais modifié dans sa grandeur du facteur  $\Delta t$ . En additionnant vectoriellement  $\mathbf{D}_1$  à  $\Delta\mathbf{D}$ , il en résulte le vecteur  $\mathbf{D}_2$ , qui indique le moment cinétique en grandeur et en direction après un temps  $t_1 + \Delta t = t_2$ . Comme après chaque intervalle successif de temps  $\Delta t$ , le même accroissement  $\Delta\mathbf{D}$  vient s'ajouter au vecteur moment cinétique, le mouvement gyroscopique, produit sous l'influence du couple  $\mathbf{M}$ , est constitué d'une rotation régulière autour de l'axe normal (axe zéro). Le vecteur  $\boldsymbol{\omega}_p$  de la vitesse de précession forme avec le moment cinétique et le vecteur couple une spirale droite.

Le sens de direction de la précession peut être déterminé dans tous les cas par une règle facile à retenir. L'axe du couple sera ci-après désigné comme axe de rotation imposé, le couple essayant en effet d'imposer une rotation autour de cet axe. Retenons donc le théorème ci-après

**du parallélisme de même sens des axes de rotation** (appelé aussi: tendance au parallélisme des axes):

Un gyroscope, sous l'influence d'un couple ou d'une rotation imposée, cherche dans son comportement à placer son axe par le chemin le plus court, dans le même sens et parallèlement à l'axe de rotation imposée.

L'exactitude de cette règle des sens peut facilement se déduire des fig. 4 et 6. Le théorème indiqué n'est pas seulement valable lors d'une action d'un couple mais aussi dans le cas où on a imposé au gyroscope d'une manière quelconque une rotation. Ce théorème représente un outil important dans l'étude des phénomènes gyroscopiques et il est bon que son contenu soit rendu compréhensible par le raisonnement et par l'expérience. Lors de l'essai de précession exécuté précédemment, l'axe cinétique ne peut jamais atteindre le parallélisme de même sens à l'axe de rotation imposé, le poids étant entraîné pendant le mouvement de précession. Donc l'axe de rotation imposé effectue une dérive dans le même sens que l'axe cinétique, toutefois en le devançant de  $90^\circ$ .

### c) L'expression quantitative de l'expérience de précession

Nous voulons mieux approfondir les lois de la précession par des expériences. Visiblement la vitesse de précession dépend d'une manière décisive de la grandeur du couple qui agit sur le gyroscope. L'absence de couple donne une vitesse de précession nulle. Déjà à vue d'oeil on est convaincu que la vitesse de précession est d'autant plus grande que le poids posé sur le cadre intérieur est plus lourd, c.à.d. que le couple efficace sera plus grand.



Aussi n'existe-t-il aucune difficulté à suivre cette corrélation par des mesures. Nous relançons donc, dans ce but, le gyroscope et déposons un des deux poids additionnels de la paire N°1 sur le cadre intérieur. Puis, on mesure le temps nécessaire au cadre extérieur pour parcourir un angle déterminé (par ex. un quart de cercle). Immédiatement après, on déposera un des deux grands poids additionnels de la paire N°2 au même endroit du cadre intérieur et on mesurera encore une fois le temps mis pour parcourir le même espace angulaire déterminé. On constate que la vitesse de précession est proportionnelle au couple agissant et qu'elle augmente dans le rapport des poids appliqués.

En exécutant cette expérience, il faut veiller à ce que les deux mesures soient exécutées très rapidement l'une après l'autre, pour que la vitesse de rotation du gyroscope ne puisse pas chuter sensiblement pendant l'expérience. Pour la même raison, il est conseillé de ne pas choisir le déplacement angulaire à mesurer trop grand. Un déplacement de 90° est largement suffisant.

En relançant le gyroscope plus ou moins fortement et en employant toujours le même poids de précession, on peut montrer la dépendance de la vitesse de précession de la vitesse de rotation du gyroscope. La détermination de la vitesse de rotation s'effectue le plus facilement par comptage des nombres de tours réguliers de la manivelle d'entraînement. Cette mesure est aisément réalisable avec un peu d'entraînement. On lance, par exemple, d'abord fortement le gyroscope - un tour du maneton de la manivelle d'entraînement en une seconde - puis on mesure la vitesse de précession de la même manière que précédemment. On diminue, ensuite, la vitesse de rotation de moitié - un tour de maneton de la manivelle d'entraînement en deux secondes - et on répète l'expérience. On constate, les mesures étant exécutées avec grand soin, que par l'abaissement de la vitesse de rotation du gyroscope de moitié, la vitesse de précession augmente du double. D'une façon correspondante, la vitesse de précession augmente du triple, lorsque la vitesse de rotation du gyroscope a été réduite d'un tiers de la valeur d'origine. La vitesse de précession est donc inversement proportionnelle à la vitesse de rotation du gyroscope.

Si l'on désigne la vitesse de précession par  $\omega_p$ , le couple agissant sur le gyroscope par  $M$  et la vitesse de rotation du gyroscope par  $n$ , le résultat des expériences préalablement exécutées peut être résumé par la formule:

$$\omega_p = f \frac{M}{n} \quad (2)$$

Dans cette formule  $f$  est un facteur de proportionnalité qui pourrait être déterminé d'une façon plus précise par d'autres expériences. Toutefois, nous allons déterminer ici la valeur de  $f$  par un simple calcul en partant du théorème du moment cinétique déjà maintes fois cité:

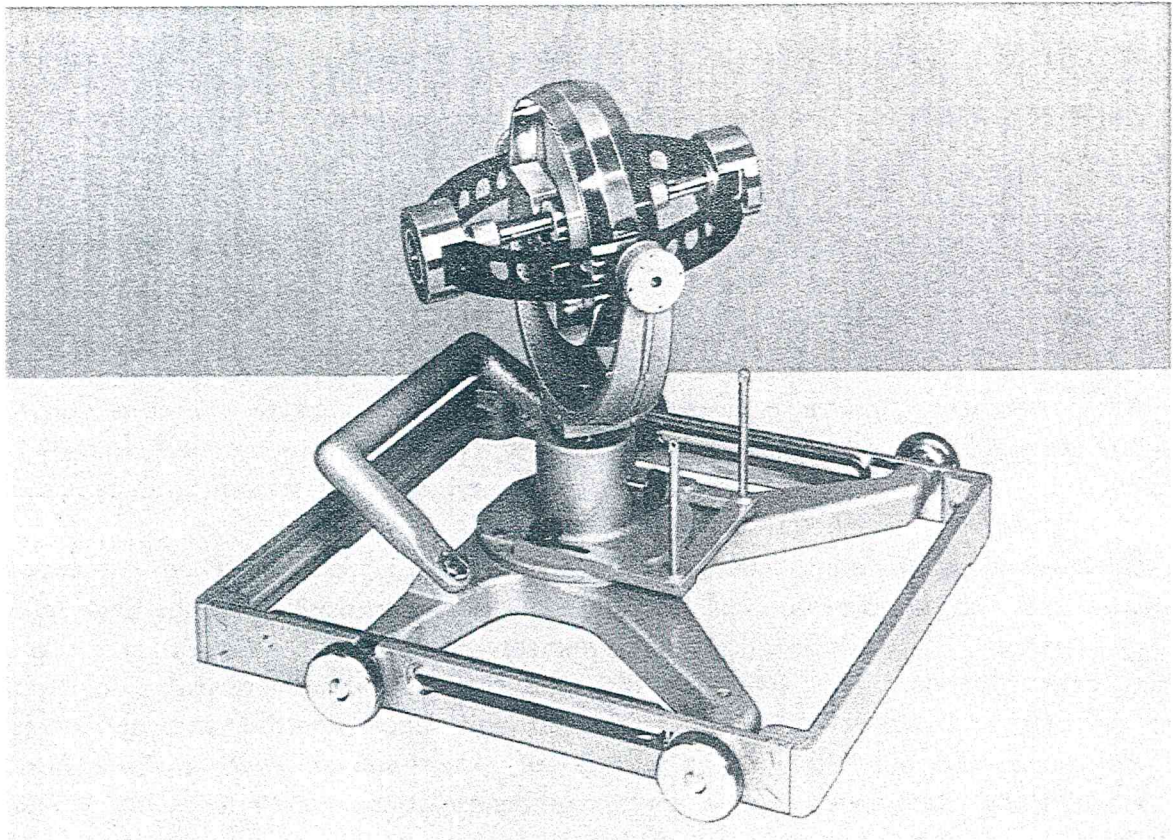


Fig. 7. Modèle de gyroscope avec poids additionnels.

$$\frac{\Delta D}{\Delta t} = M$$

(Comme dans ce cas uniquement les valeurs des vecteurs présents nous intéressent, nous n'avons pas besoin de les faire figurer par des lettres en caractère gras!) Comme on peut le voir à partir de la fig. 6, l'angle  $\Delta\alpha$  parcouru par le vecteur moment cinétique et par là aussi par le gyroscope complet, peut s'écrire:

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta D}{D} \text{ ou } \Delta D = D \cdot \Delta\alpha$$

En introduisant cette valeur dans la formule du théorème du moment cinétique, on obtient:

$$D \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = M .$$

Finalement le quotient  $\Delta\alpha/\Delta t$  (quotient de différence qui pour des temps  $\Delta t$  toujours plus petits devient en finale un quotient différentiel) n'est rien d'autre que la vitesse de précession  $\omega_p$  du gyroscope que nous recherchons. Nous trouvons donc:

$$\omega_p = \frac{M}{D} = \frac{30M}{\pi nJ} \quad (3)$$

Dans ce cas, on a introduit pour le moment cinétique  $D$  la valeur  $D = J \omega = (2\pi n/60) J$  (Moment d'inertie  $J$  autour de l'axe de rotation fois la vitesse angulaire  $\omega$  du gyroscope). La formule (3) représente donc l'expression recherchée et définitive de la loi de précession, expression qui sera utilisée très souvent par la suite.

Nous remarquons, en passant, que d'après la formule (3) la vitesse de précession ne dépend pas de la grandeur du moment d'inertie équatoriale (autour des deux axes des cadres). Ce fait peut être facilement confirmé par l'expérience. Dans ce but, nous procédons à l'expérience de précession de la manière suivante: Nous fixons par vis une paire de poids additionnels aux deux endroits prévus à cet effet du cadre intérieur (fig. 7). La vitesse de précession obtenue après fixation d'un autre poids additionnel sur le cadre intérieur est comparée avec la vitesse de précession obtenue sans la paire de poids additionnels fixée précédemment. En exécutant correctement l'expérience (même vitesse de rotation, application correcte des poids additionnels) on ne constatera aucune différence.

## 2.2 Les mouvements de nutation

Un gyroscope soumis à aucun couple ne peut pas exécuter de mouvement de précession, car dans ce cas, la formule (3) donne une vitesse de précession nulle. Un tel gyroscope que l'on a l'habitude de désigner en général comme exempt de toute force (on devrait plutôt dire exempt de tout couple), peut malgré tout encore exécuter des mouvements qui lui sont propres et qui sont alors désignés par mouvements de nutation ou plus simplement par nutation tout court.

### a) La tenue d'un gyroscope exempt de toute force extérieure

Une nouvelle fois nous commençons par une expérience: Le gyroscope est mis légèrement en mouvement par lancement à la main en y retenant le cadre intérieur. Après libération avec précaution du cadre intérieur, l'axe du gyroscope conserve, une fois pour toutes, la position qu'il avait prise. Néanmoins, si on heurte soit le

cadre extérieur autour de l'axe extérieur de Cardan ou le cadre intérieur autour de l'axe intérieur de Cardan, le gyroscope exécute un mouvement de vascillement ou de tangage - c.à.d. précisément la nutation. L'axe du gyroscope se déplace dans ce cas sur la surface d'un cône dont le sommet est formé par le point fixe du gyroscope (point d'intersection des trois axes du système). Le sens de déplacement du cône est toujours identique à celui de la rotation du gyroscope.

Les nutations ne se produisent que par suite du concours des forces d'inertie et des forces gyroscopiques. Leur explication n'est pas simple. Toutefois, le théorème du moment cinétique nous aide à en comprendre une partie. Dans le cas du gyroscope exempt de forces, le théorème du moment cinétique (1) nous dit que la variation temporaire du moment cinétique est nulle par absence de couple. Si la variation est nulle, le moment cinétique lui-même ne doit subir aucune modification, c.à.d. être constant en grandeur et direction. Comme lors du mouvement de nutation l'axe de symétrie visible, - que nous allons désigner par la suite d'une façon usuelle comme l'axe de la figure du gyroscope -, décrit un cône, c'est précisément l'axe de ce cône qui va nous indiquer la direction fixe par rapport à l'espace du vecteur du moment cinétique. Lorsqu'aucune nutation n'a lieu l'axe cinétique et l'axe de la figure coïncident. Plus la percussion est grande, plus les cercles respectivement les ellipses, que l'axe de la figure décrit autour de l'axe cinétique fixe par rapport à l'espace, seront grands.

On peut maintenant montrer que le mouvement de nutation peut s'expliquer d'une façon très claire par le roulement de deux cônes l'un sur l'autre, et où l'un des deux est fixe par rapport à l'espace (cône de base ou cône d'herpolodie) tandis que l'autre est en position fixe par rapport au corps gyroscopique (cône de révolution roulant ou cône de polhodie). L'axe du cône de révolution de base est l'axe cinétique, l'axe du cône de révolution roulant est l'axe de la figure. Deux cas représentés dans les figs. 8 et 9 peuvent se présenter. Ou bien le cône de révolution roulant fixe par rapport au corps roule extérieurement sur le cône de révolution de base, fixe par rapport à l'espace (fig. 8) ou bien le cône de révolution roulant circonscrit le cône de révolution de base et roule sur le plan intérieur de celui-ci (fig. 9). Le premier cas se présente avec le gyroscope "allongé", le deuxième cas avec le gyroscope "aplati". Un gyroscope est appelé "allongé" lorsque le moment d'inertie autour de l'axe de la figure est plus petit que les moments d'inertie équatoriaux (Exemple: une ellipsoïde de révolution allongé cas limite: la barre). Un gyroscope est appelé "aplati" lorsque le moment d'inertie autour de l'axe de la figure est plus grand que les moments d'inertie équatoriaux (Exemple: une ellipsoïde de révolution plate cas limite: le disque). Dans le cas du gyroscope sphérique se situant entre le gyroscope allongé et le gyroscope aplati (cas où tous les moments d'inertie sont de même grandeur) le cône de révolution de base se réduit à une droite (axe cinétique).

La génératrice de contact commune aux deux cônes représente l'axe instantané de rotation, car autour de cet axe a lieu la rotation du cône de révolution roulant

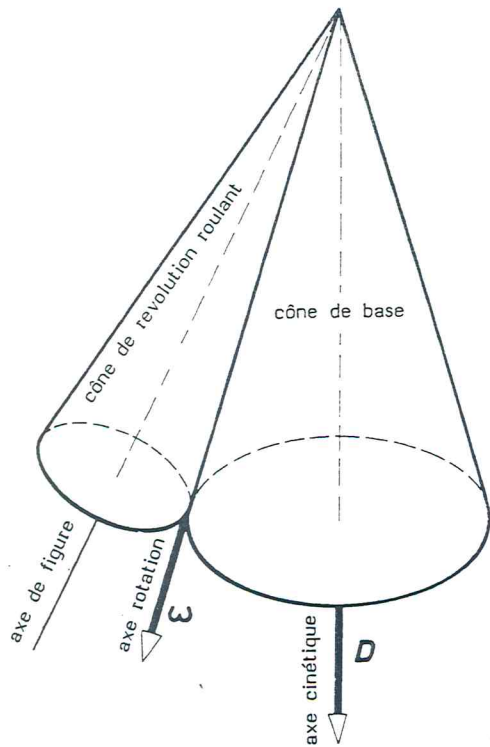


Fig. 8. Pour l'explication des mouvements de nutation dans le cas d'un gyroscope allongé.

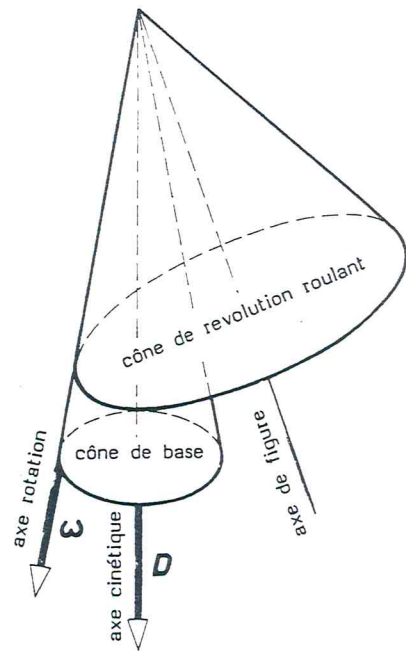


Fig. 9. Pour l'explication des mouvements de nutation dans le cas d'un gyroscope aplati.

(vu par un observateur immobile placé dans la pièce) ou celle du cône de révolution de base (vu par un observateur placé sur le gyroscope). L'axe de rotation danse aussi comme l'axe de la figure autour de l'axe cinétique fixe et ceci de telle façon que les axes de la figure et de rotation pour le gyroscope allongé se trouvent du même côté de l'axe cinétique tandis que dans le cas du gyroscope aplati l'axe cinétique se trouve entre-eux. Comme l'axe de rotation donc la génératrice de contact des deux cônes lors du roulement d'un cône sur l'autre progresse aussi bien sur la surface du cône de révolution de base que sur la surface du cône de révolution roulant, l'axe de rotation instantané change de position aussi bien dans le corps du gyroscope que dans la pièce. Nous allons plus tard les rendre visibles par une astuce ce qui nous permettra d'observer leur déplacement.

Les très belles et très représentatives figures qui nous ont été données notamment par Poinsot sur la nutation du gyroscope non soumis à des forces, ne peuvent pas être commentées en cet endroit. Toutefois, en ce qui les concerne nous vous renvoyons expressément aux livres d'enseignement sur les gyroscopes indiqués à la fin de cet ouvrage. Ceux qui désirent approfondir leur savoir sur l'origine des nutations ne doivent pas négliger de consulter ces livres et de corroborer leur lecture par des essais sur le gyroscope-modèle.

## b) L'expression quantitative du mouvement de nutation

Comme dans le cas des précessions, essayons aussi par des expériences d'éclaircir plus en détail les nutations. En premier lieu, nous allons chercher à montrer la dépendance des nutations de la vitesse de rotation du gyroscope. Pour ce faire, le gyroscope - sans poids additionnel - sera lancé modérément afin de pouvoir encore compter et chronométrer le nombre de rotation. On mesurera avec le chronomètre 10 tours du gyroscope, par exemple, et on chronométrera immédiatement après, le temps des 10 rotations des nutations. Les mesures devront être réalisées rapidement l'une derrière l'autre pour que la vitesse de rotation du gyroscope ne baisse pas, entre-temps, d'une façon trop sensible. A partir des valeurs mesurées, on calculera avec la méthode connue la vitesse de rotation (nombre de rotations du gyroscope en une minute) et la fréquence de nutation (nombre de révolutions de nutation).

Pour exécuter la mesure suivante, le gyroscope sera légèrement freiné et on mesurera, une nouvelle fois, le temps de 10 rotations du gyroscope et ensuite de 10 révolutions de nutation. Afin d'éliminer les sources d'erreur, il est conseillé d'effectuer plusieurs mesures l'une derrière l'autre et de prendre en final les moyennes des fréquences de nutation et des vitesses de rotation du gyroscope. Si on établit maintenant le rapport entre la fréquence de nutation et la vitesse de rotation du gyroscope, on trouve que ce rapport est indépendant de la grandeur absolue de la vitesse de rotation et conserve toujours la même valeur. En d'autres termes: Lorsque la vitesse de rotation du gyroscope varie, la fréquence de nutation se modifie toujours dans le même rapport. La fréquence de nutation est donc proportionnelle à la vitesse de rotation du gyroscope.

Nous renouvelons la même expérience mais en appliquant avant, aux points de suspension de l'axe du gyroscope sur le cadre intérieur, la paire de poids additionnel N°1. Là aussi, on établira pour les différentes grandeurs de la vitesse de rotation les rapports entre la fréquence de nutation et la vitesse de rotation du gyroscope. On retrouve que les valeurs des rapports sont indépendantes de la grandeur de la vitesse de rotation. Par contre, la valeur elle-même du rapport s'est modifiée par rapport aux premières expériences sans poids additionnel. Tandis que le rapport fréquence nutation/vitesse de rotation du gyroscope sans poids additionnel était nettement plus grand que un, il est devenu maintenant pratiquement égal à un. Si on renouvelle enfin la même expérience en y ajoutant cette fois-ci la paire de poids additionnel N°2, on trouve un rapport plus petit qu'un. Si on avait trouvé précédemment que la fréquence de nutation est proportionnelle à la vitesse de rotation du gyroscope, la nouvelle série d'expériences montre que le facteur de proportionnalité est dépendant du rapport des moments d'inertie et qu'il devient d'autant plus petit que les moment d'inertie équatoriaux par rapport au moment d'inertie axial deviennent plus grands.

Le calcul des fréquences de nutation donne en fonction de la vitesse de rotation du gyroscope  $n$ , du moment d'inertie axial  $J_z$  et des deux moments d'inertie équatoriaux  $J_x$  et  $J_y$ , la formule:

$$\omega_n = \frac{J_z}{\sqrt{J_x J_y}} \omega = \frac{J_z}{\sqrt{J_x J_y}} \frac{\pi n}{30}. \quad (4)$$

Pour l'établissement de cette formule, on est prié, une nouvelle fois, de se reporter à la bibliographie correspondante. La formule ne s'applique strictement que dans le cas du gyroscope exempt de forces, c.à.d. libre de toute liaison. Toutefois, elle reste valable avec une approximation suffisante pour le cas du gyroscope assujéti dans la mesure où la vitesse de rotation ne devient pas trop petite. En particulier, cette formule peut pour cette raison être appliquée aux gyroscopes techniques.

Mais la formule (4) risque de fournir pour des gyroscopes à vitesse de rotation rapide également des fausses valeurs lorsque l'arbre du gyroscope est très mince, celui-ci pouvant fléchir pendant les mouvements de nutation. Par ce fléchissement élastique de l'arbre, les fréquences de nutation calculées suivant (4) sont d'autant plus réduites par rapport aux réelles que le moment cinétique du gyroscope est plus grand.

Nous en profitons pour faire remarquer que les moments d'inertie équatoriaux  $J_x$  et  $J_y$  se composent des moments d'inertie du disque gyroscopique (avec les poids disques) autour de l'axe transversal et des composantes des moments d'inertie des deux cadres de Cardan ainsi que de ceux des poids additionnels autour des deux axes de Cardan. Comme les composantes des cadres de Cardan par rapport aux moments d'inertie relatifs aux deux axes de Cardan sont de grandeurs différentes (le cadre extérieur, par exemple, ne contribue pas au moment d'inertie autour de l'axe de Cardan intérieur car il ne tourne qu'autour de l'axe de Cardan extérieur), les deux moments d'inertie équatoriaux  $J_x$  et  $J_y$  peuvent être de grandeurs différentes, malgré que le gyroscope lui-même continue à être symétrique et possède donc une ellipsoïde d'inertie de révolution symétrique.

### c) D'autres expériences sur le mouvement de nutation

Comme déjà dit précédemment dans un mouvement de nutation d'un gyroscope exempt de forces, l'axe de la figure et l'axe de rotation danse autour de l'axe du moment cinétique qui se trouve fixe par rapport à l'espace. Ce mouvement dansant de l'axe de la figure peut être observé directement sur le modèle. Pour permettre une visualisation des mouvements de l'axe de rotation instantané - c.à.d. la ligne qui relie tous les points qui sont précisément immobiles pendant un moment

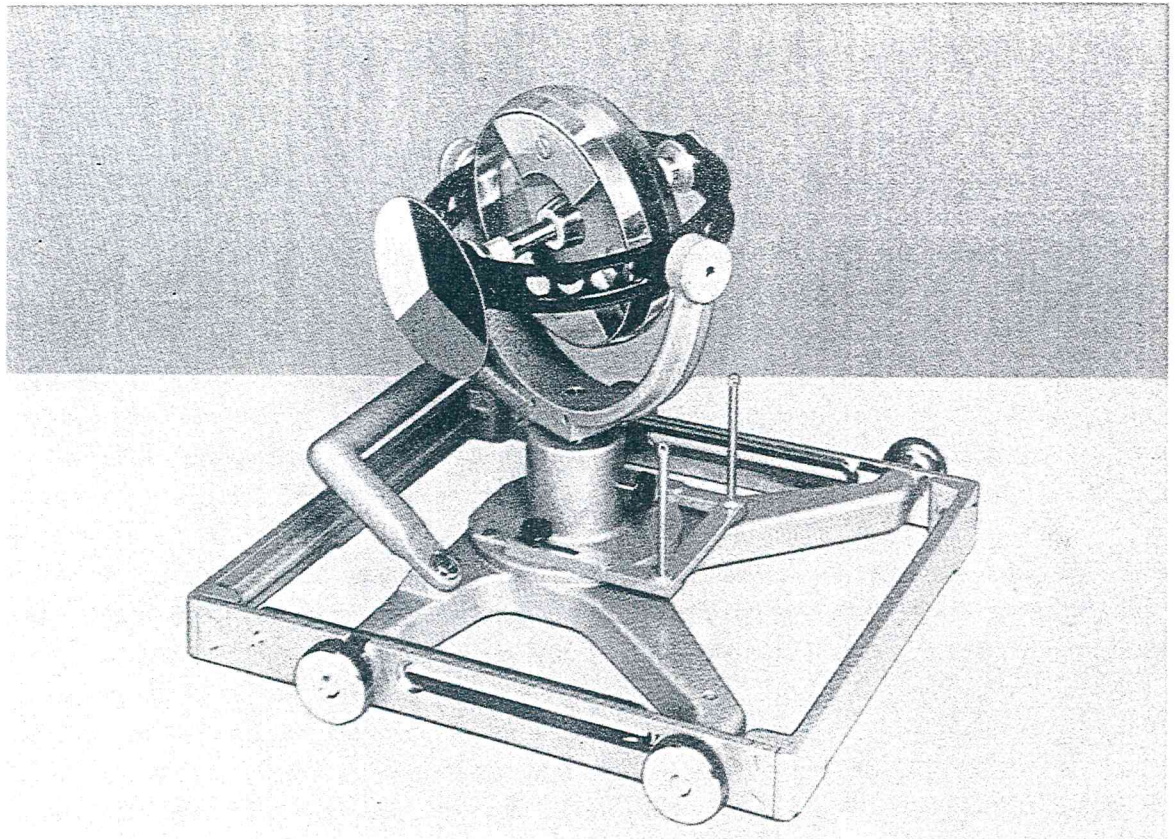


Fig. 10. Gyroscope-modèle avec disque de Maxwell.

déterminé -, nous allons utiliser le disque dit de Maxwell. Celui-ci est constitué d'un disque circulaire qui est subdivisé en trois secteurs colorés de façon différente. Ce disque est glissé sur une des deux extrémités de l'axe du gyroscope (fig. 10). Le disque participe alors aux rotations du gyroscope.

Avec un gyroscope tournant exempt de nutation, l'axe de rotation instantané est toujours confondu avec l'axe visible de la figure. Celui-ci passe par le centre du disque sur lequel les trois secteurs de couleur différente se touchent. Avec un gyroscope tournant modérément vite (lancé à la main) les couleurs du disque de Maxwell se fondent en un gris sombre régulier. Si maintenant on produit des nutations en percutant un des deux anneaux de Cardan on observe au centre du disque de Maxwell une tache nette issue d'une des trois couleurs (noir, rouge, blanc) du disque. Ce fait montre que l'axe de rotation instantané ne se confond plus avec l'axe de la figure, mais traverse quelque part la surface du disque, par ex. le secteur blanc. Pendant l'expérience la couleur reste nullement constante, elle passe plutôt plus ou moins rapidement d'une des trois couleurs à l'autre. L'expérience démontre donc le fait déjà cité précédemment à savoir que l'axe de rotation instantané se promène dans le gyroscope. Le sens de rotation peut se déterminer en fonction de l'ordre des passations de couleur. Si l'expérience est effectuée sans poids additionnels sur le cadre intérieur, l'alternance des couleurs se fait très rapidement de sorte qu'un



oeil non entraîné peut difficilement la reconnaître. Pour cette raison, nous recommençons l'expérience une nouvelle fois, mais déposons avant sur le cadre intérieur à l'extrémité de l'axe de la figure opposée au disque un des petits poids additionnels. Le gyroscope est évidemment plus exempt de forces étant soumis par suite d'une charge unilatérale à un couple de gravité. Toutefois, le mouvement de précession ainsi produit ne perturbe pas spécialement l'exécution de l'expérience. Après lancement du gyroscope on redonne naissance, d'une façon connue, à des nutations. Le changement de couleur dans la partie centrale du disque de Maxwell s'effectue maintenant dans le même sens comme lors de l'expérience sans poids additionnel sur le cadre intérieur, mais nettement plus lentement. Nous pouvons donc facilement constater que dans le cas présent, où l'ellipsoïde d'inertie du gyroscope est aplati, le sens de rotation de l'axe de rotation dans le gyroscope correspond au sens de rotation du gyroscope. Ceci se laisse aussi déduire de la fig. 9 déjà précédemment traitée et qui concernait précisément un gyroscope aplati. Si le cône de révolution roulant fixe par rapport au corps se déroule sur le cône de révolution de base, fixe par rapport à l'espace, la génératrice de contact des deux cônes, c.à.d. l'axe de rotation, se déplace sur l'enveloppe du cône de révolution roulant dans le même sens de rotation que l'axe de la figure. La vitesse de déplacement de l'axe de rotation sur l'enveloppe du cône de révolution roulant dépend de l'angle au sommet du cône de révolution de base. Plus l'angle au sommet sera petit, moins vite s'effectuera la révolution de l'axe de rotation. Dans le cas du gyroscope sphérique, l'angle au sommet du cône de révolution de base devient enfin nul. Dans ce cas l'axe de rotation doit être fixe par rapport au corps (cône de révolution roulant). Son axe coupe le plan du disque toujours au même endroit de sorte que l'on observe continuellement une seule couleur. Ce cas peut être réalisé d'une façon approximative, en fixant la petite paire de poids. Pour ce faire on doit d'abord enlever le disque de Maxwell. On place, ensuite, les deux poids et on refixe le disque comme précédemment. En exécutant l'expérience, on n'obtiendra pas d'arrêt total du point de traversée de l'axe de rotation sur le disque, en effet celui-ci effectuera un très léger déplacement. Ceci provient de l'agrandissement des moments d'inertie produit par le disque. Sans disque, l'ellipsoïde d'inertie du gyroscope serait une sphère. Mais comme le disque apporte une part plus importante aux moments d'inertie équatoriaux qu'au moment d'inertie axial, l'ellipse d'inertie sera légèrement "allongé". En fait, il n'est pas difficile de réaliser exactement le cas du gyroscope sphérique par apposition de masses additionnelles adéquates. Le meilleur réglage fin est obtenu par de la plastiline. En observant le changement de couleur, on constate que dans le cas du gyroscope allongé le sens de révolution de l'axe de rotation dans le corps est opposé au sens de rotation du gyroscope. Ce fait se laissait également déduire de la figure 8 qui précède. Si on fixe maintenant un des poids additionnels 2 sur le cadre intérieur, la révolution de l'axe de rotation s'effectue encore plus rapidement car l'ellipsoïde d'inertie est encore plus allongée. Si cette expérience nous a donné un aperçu sur le sens de révolution de l'axe de rotation dans le gyroscope, la prochaine expérience nous fixera plus particulièrement sur le temps de révolution de l'axe de rotation sur la surface de l'enveloppe du cône de révolution roulant.

Nous utiliserons pour ce faire un gyroscope symétrique balourdé. Les poids-disques seront fixés sur le disque gyroscopique tel que le montre la figure 76. Le gyroscope possède par là un balourd dit dynamique car son axe d'inertie principal n'est plus confondu avec l'axe de la figure. Les poids additionnels et le disque de Maxwell sont au départ retirés lors de cette expérience. Puis les cadres à Cardan seront retenus et le disque gyroscopique sera lancé à la main. Après la libération des cadres le gyroscope amorce une nutation mais s'immobilise par lui-même après un certain temps puis recommence tout de suite après une nouvelle fois les mêmes mouvements. L'axe de la figure visible, - qui maintenant, à l'inverse des expériences précédentes, n'est plus axe d'inertie principal - était au début de l'expérience aussi axe de rotation, les cadres ayant été retenus à ce moment. Mais dès leur libération, l'axe de rotation commence à se déplacer dans le gyroscope; l'axe de la figure sera en conséquence éjecté autour. Si l'axe de rotation se rapproche de nouveau de l'axe de la figure pendant sa révolution sur la surface du cône de révolution roulant, les mouvements s'amortissent et finalement viennent à s'arrêter complètement lorsque l'axe de rotation coïncide de nouveau avec l'axe de la figure. Le temps entre deux arrêts du gyroscope correspond donc au temps de révolution de l'axe de rotation sur le cône de révolution roulant. L'axe de la figure visible est uniquement caractérisé dans cet expérience par le fait qu'il a aussi été au début de l'expérience axe de rotation. Il est en quelque sorte une génératrice enveloppante du cône de révolution roulant.

Nous renouvelons la même expérience en ajoutant toutefois, la paire de poids additionnel N°1 sur le cadre intérieur. Le mouvement de l'axe de la figure devient maintenant beaucoup plus sauvage que dans l'expérience précédente. Primo, la plus grande déviation de l'axe de la figure par rapport à la position horizontale est nettement plus élevée, secundo le temps mis pour le retour au repos est plus long. Nous pouvons en conclure que l'angle au sommet du cône de révolution roulant dépend du rapport des moments d'inertie, car la déviation la plus grande de l'axe de la figure correspond exactement à l'angle au sommet du cône de révolution roulant comme on peut facilement le visualiser sur les figures 8 et 9. D'autre-part, l'expérience nous confirme que la vitesse de révolution de l'axe de rotation sur l'enveloppe du cône de révolution roulant est d'autant plus faible que l'ellipsoïde d'inertie du gyroscope se rapproche plus d'une sphère.

Rigoureusement parlant, ces mouvements ne représentent pas des purs mouvements de Poinsot, car la masse additionnelle ainsi que les deux cadres à Cardan ne participent pas à la rotation complète du gyroscope mais seulement aux rotations produites autour des axes de Cardan. On doit être très prudent en transposant les considérations de Poinsot aux mouvements du modèle.

Pour compléter les connaissances, nous exécutons encore l'expérience avec la paire de poids additionnels N°2. La vitesse de révolution de l'axe de rotation, - c.à.d. le temps entre deux arrêts de l'axe de la figure - est encore devenue plus petite.

De la même manière la plus grande déviation de l'axe de la figure est aussi réduite pendant le mouvement de nutation.

### 2.3 La précession pseudo-régulière

Les nutations et les précessions peuvent se superposer réciproquement. Chez des gyroscopes tournant à vitesse relativement rapide, leurs oscillations réciproques possèdent des fréquences tellement différentes que l'on peut facilement les distinguer. Uniquement avec des gyroscopes tournant très lentement, l'addition de la nutation et de la précession produit des mouvements de tangage bizarres dont l'étude n'est pas aisée.

Toutefois, l'action conjuguée de la nutation et de la précession est importante pour une meilleure compréhension des expériences de précession décrites dans le chapitre 2.1. Lors d'une expérience, nous y avons constaté que le gyroscope ne cède pas, le couple y étant appliqué mais qu'il y échappe verticalement, exécutant donc une précession. Cette constatation nécessite une analyse plus approfondie. Pour cette raison, nous exécutons une nouvelle expérience de précession en opérant de la manière suivante: Le gyroscope est mis en rotation modérément par lancement à la main. En retenant le cadre intérieur, on fixe un des poids additionnels. Puis, on libère, subitement, le cadre intérieur en évitant d'exercer un choc sur le système. En observant bien, on constatera qu'en effet l'axe du gyroscope cède légèrement pendant les premiers instants au couple agissant. Mais en cédant, il y a formation de forces gyroscopiques qui font dévier l'axe gyroscopique de la direction première du mouvement. L'action conjuguée des forces de gravité et des forces gyroscopiques produit un mouvement tel que les points extrêmes de l'axe gyroscopique décrivent une trajectoire identique à celle représentée sur la figure 11 (cycloïdes à points de rebroussement).

Fig. 11. Courbe de trajectoire du sommet du gyroscope lors de la libération sans provoquer de chocs.



Nous modifions maintenant légèrement les conditions de l'expérience: Nous soumettons le gyroscope au début de l'expérience, c.à.d. lors de la libération du cadre intérieur, à un léger choc dirigé vers le bas. La trajectoire décrite par les points extrêmes de l'axe prend, dans ce cas, une des formes illustrées par la fig. 12 (cycloïdes à boucle, lemniscate). Si on soumet par contre, le gyroscope lors de sa libération

à un choc en direction du mouvement attendu de la précession, on obtient suivant l'importance du choc, des courbes de trajectoire représentées sur la fig. 13 (cycloïdes à ondes).

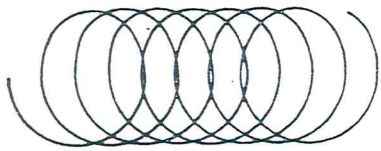


Fig. 12. Courbes de trajectoire du sommet du gyroscope lors de sa libération avec choc en direction de la pesanteur.

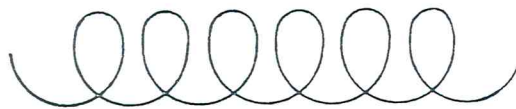


Fig. 13. Courbes de trajectoire du sommet du gyroscope lors de sa libération avec choc en direction du mouvement de précession.

Manifestement, il existe une grandeur et une direction bien déterminées du choc initial pour lesquelles la nutation se trouvant au-dessus de la précession disparaît, donc pour lesquelles l'amplitude des ondes des courbes de la fig. 13 est nulle. Dans ce cas, il se produit donc un mouvement de précession non perturbé par une nutation et que l'on désigne par **précession régulière**.

Plus le gyroscope tournera vite, plus réduites seront les petites nutations au dessus de la précession régulière. Pour des gyroscopes tournant très rapidement, elles sont

à peine visibles à l'oeil nu. Malgré que les conditions initiales ne coïncident plus avec celles nécessaires à l'obtention de la précession régulière, le gyroscope semble exécuter une précession régulière, donc un mouvement libre de nutation. Pour cette raison ces mouvements sont appelés: **précession pseudo-régulière**. Dans le cas des gyroscopes techniques, tournant rapidement, la distinction entre précession régulière et pseudo-régulière n'a aucune importance. Mais, vu du point de vue théorique, ce fait n'est pas à négliger, car il démontre que l'on doit être circonspect quand on affirme "qu'un gyroscope est insensible à l'application d'un couple".

## 2.4 La tranquillité de marche du gyroscope symétrique

La connaissance des lois de la nutation nous permet de comprendre une expérience très importante concernant la tranquillité de marche du gyroscope et dont il faut tenir compte lors de la construction d'appareils gyroscopiques. Néanmoins, pour son explication, il est nécessaire de faire quelques observations générales.

Lorsqu'un système pouvant osciller est soumis à des forces perturbatrices périodiques, produisant des oscillations, les déviations sont d'autant plus grandes que la fréquence d'excitation concorde plus exactement avec la propre fréquence du système. En cas de concordance complète de la fréquence d'excitation et de la propre fréquence du système, on parle de **résonance**. On craint énormément de tels phénomènes de résonance en technique, car ils peuvent souvent produire des surcontraintes dans les pièces mécaniques et provoquer même leur rupture. On les évite en choisissant la fréquence propre au système telle que celle-ci s'écarte le plus possible des fréquences perturbatrices qui pourraient se présenter.

Aucun gyroscope est parfait! Soumis à des défauts de matières et d'usinage, chaque gyroscope possède en soi des balourds résiduels qui ne peuvent jamais être éliminés complètement même par un équilibrage ultérieur aussi bon soit-il. Il reste donc toujours un certain balourd résiduel qui exerce lors de la rotation du gyroscope des forces perturbatrices périodiques, resp. couples perturbateurs sur le système dans lequel le gyroscope est incorporé. Ces forces perturbatrices correspondent toujours à la fréquence de la rotation du gyroscope.

Après ce qui a été dit précédemment, il faut éviter la concordance de la propre fréquence et de la fréquence d'excitation de l'érecteur pour éviter les résonances. Comme dans le cas présent on prend en considération avant tout la fréquence de nutation en tant que propre fréquence et, à cause des balourds, la fréquence de révolution en tant que fréquence d'érection, il faut donc éviter une concordance des fréquences de nutation et de révolution du gyroscope. Pour la fréquence de nutation  $\omega_n$  la formule (4) (suivant laquelle  $\omega_n$  est proportionnelle à la fréquence

de révolution du gyroscope  $\omega$  et où le facteur de proportionnalité est uniquement dépendant du rapport des moments d'inertie) est applicable. Dans le cas du gyroscope sphérique le facteur est égal à un, de sorte que (4) devient simplement:

$$\omega_n = \omega.$$

Mais voilà justement le cas que nous voulions éviter car il conduit à une concordance de la propre fréquence et de la fréquence de l'érecteur.

Après ces préalables, exécutons d'abord l'expérience proprement dite. Pour ce faire, nous utiliserons le gyroscope précédent dans sa forme originale, sans aucun poids additionnel sur le cadre intérieur. Après avoir lancé le gyroscope avec la manivelle d'entraînement, on observe pratiquement pas de secousses. Le gyroscope tourne tranquillement. La tranquillité de marche est dans l'ensemble indépendante de la vitesse de rotation. Seulement dans le cas d'un gyroscope tournant très rapidement, on peut percevoir des oscillations inévitables dues aux balourds résiduels, sur la plaque de base de l'appareil. Dans le cas présent, l'ellipsoïde d'inertie est aplati. Le facteur de l'équation (4) est plus grand que un, donc la fréquence de nutation est plus grande que la fréquence de révolution du gyroscope (plage sous-critique).

En exécutant maintenant la même expérience après avoir fixé par vis la paire de poids N°1, le gyroscope amorce des oscillations forcées d'amplitude importante, même s'il n'a pas été soumis précédemment à des chocs. Ces oscillations peuvent dans le cas de gyroscopes tournant très rapidement, conduire à la destruction de l'appareil. Il est donc judicieux de ne pas lancer le gyroscope trop fortement. L'existence d'une résonance pour toutes les vitesses de rotation peut facilement être démontrée. Ce fait est très important! Tandis qu'habituellement on s'attend à avoir des phénomènes de résonance uniquement à certaines vitesses de rotation, nous nous trouvons ici en présence d'un phénomène de résonance indépendant de la vitesse de rotation quelque soit le choix de celle-ci. Ceci n'est possible que si la propre fréquence est proportionnelle à la vitesse de rotation ce qui est effectivement le cas dans la nutation.

Enfin, il est facile de se rendre compte que le gyroscope du type "allongé" tourne de nouveau tranquillement. A cet effet, on fixe les poids additionnels N°2 sur le cadre intérieur ce qui augmentera les moments d'inertie  $J_x$  et  $J_y$ . Le facteur dans l'équation (4) deviendra par là plus petit que un produisant ainsi des nutations plus lentes que les rotations du gyroscope. Le phénomène de résonance a maintenant disparu, le gyroscope retrouve sa tranquillité de marche.

Remarquons que cette expérience est en corrélation étroite avec les expériences concernant le gyroscope balourdé du chapitre précédent, où nous avons aussi des

amplitudes du système particulièrement importantes (grande ouverture d'angle du cône de révolution tournant!), lorsque le gyroscope avait un ellipsoïde d'inertie proche de la sphère.

D'autre-part, il faut mentionner que les conditions se modifient légèrement lorsque le gyroscope possède un arbre élastique qui peut céder légèrement pendant des mouvements de nutation. Dans ce cas, la formule (4) perd sa stricte validité et au contraire la fréquence de nutation devient plus petite que la formule (4) le laissait prévoir. Des analyses plus approfondies de ce cas peuvent être trouvées dans des travaux cités sous le N°7 du sommaire bibliographique.

## 2.5 La pendule gyroscopique

Un gyroscope, dont l'axe est assujéti à une position d'équilibre déterminé de telle façon que cet axe recherche toujours a retourné après déviation de sa position d'équilibre vers sa position d'origine est désigné par gyroscope pendulaire ou encore par pendule gyroscopique. Cet assujettissement n'est efficace que pour des mouvements autour des deux axes de Cardan; il n'empêche point les mouvements du gyroscope autour de son axe de rotation. Un tel assujettissement peut être effectué soit par des ressorts souples ou pour un axe de gyroscope en position verticale par un couple de gravité.

### a) Assujettissement par ressorts

Nous suspendons entre les petits anneaux placés au cadre intérieur et extérieur à Cardan, sur un côté quelconque de l'axe de Cardan intérieur un couple de ressort qui assujéttit élastiquement le cadre intérieur par rapport au cadre extérieur. D'autre-part, une autre paire de ressort est suspendue entre le cadre extérieur et les tiges verticales fixées sur le socle (fig. 14). Ce couple de ressort assujéttit le cadre à Cadran extérieur par rapport au socle. Les deux couples de ressort, ensemble, produisent un assujettissement élastique de l'axe gyroscopique à la position d'équilibre de sorte que le système forme un pendule gyroscopique.

Le gyroscope est maintenant lancé, puis écarté de sa position d'équilibre. Il exécute un mouvement de précession dans lequel l'axe gyroscopique tourne autour de sa position d'équilibre en effectuant une trajectoire elliptique. L'explication de cette expérience est très simple. L'assujettissement recherche à ramener le gyroscope dans sa position d'équilibre et exerce ainsi un couple. Le gyroscope réagit à ce couple avec une précession qui lui fait faire une dérive perpendiculaire à la direction du couple agissant. Si l'axe gyroscopique arrive à la suite de cette précession à

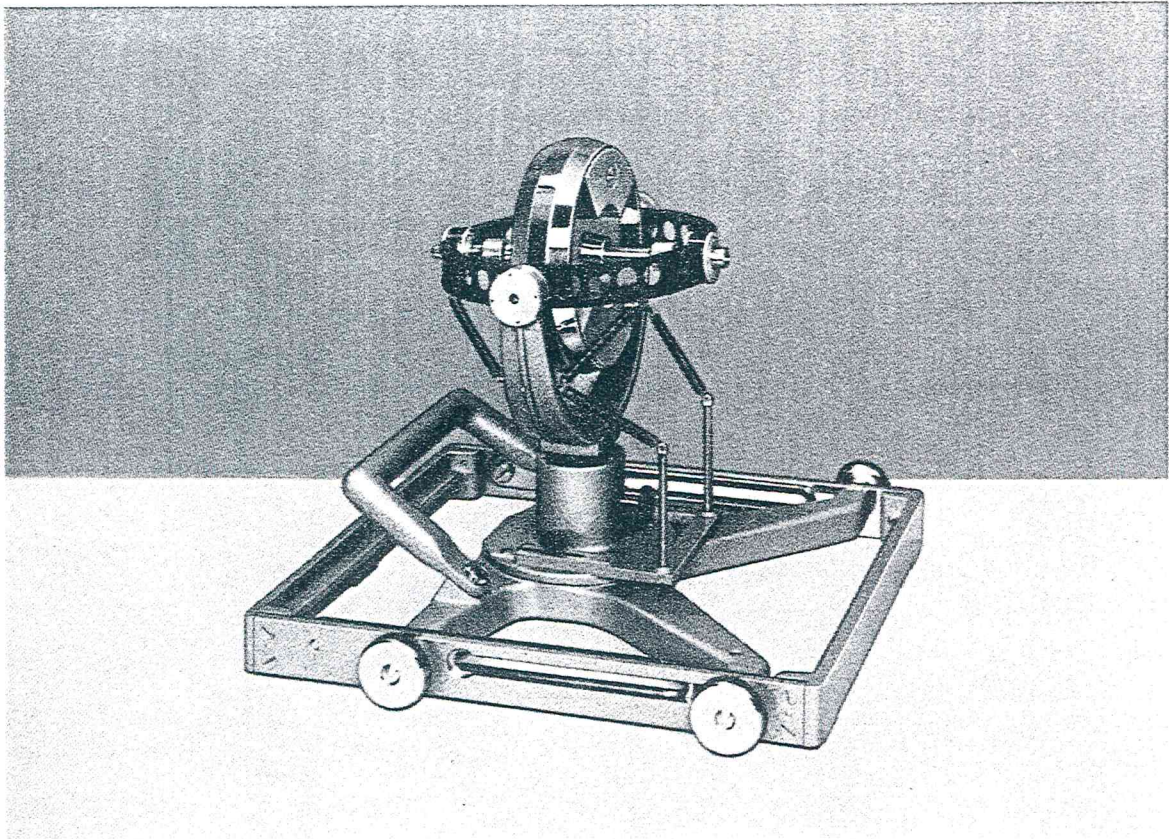


Fig. 14. Gyroscope-modèle avec assujettissement par ressorts.

un autre lieu de sa trajectoire, la direction du couple est, elle aussi, modifiée, et de ce fait la direction de la précession sera également modifiée. La trajectoire de précession du gyroscope est courbe et se ferme en une figure généralement élliptique. Si les paires de ressorts accrochées assujettissaient les deux cadres à Cadran avec la même force, la trajectoire de la précession se transformerait en un cercle. La trajectoire du cas présent est parcourue dans le sens contraire de la rotation du gyroscope. Le pendule gyroscopique peut, en outre, exécuter des nutations qui par rapport au cas du gyroscope libre, sont peu modifiées. Chez elles, l'axe gyroscopique parcourt le plus souvent aussi une trajectoire élliptique mais toujours dans le sens de rotation du gyroscope.

Les nutations et les précessions peuvent se superposer mutuellement. Le mouvement d'ensemble se compose alors de deux oscillations élliptiques qui parcourent leurs trajectoires en sens opposés. Dans le cas de gyroscopes tournant relativement rapidement on peut, en effet, distinguer les deux oscillations propres du pendule gyroscopique à cause de leurs fréquences nettement différentes. Néanmoins, pour un gyroscope tournant lentement, l'image devient très floue. Le gyroscope paraît alors exécuter des mouvements complètement arbitraires qui, chaque fois, suivant les conditions



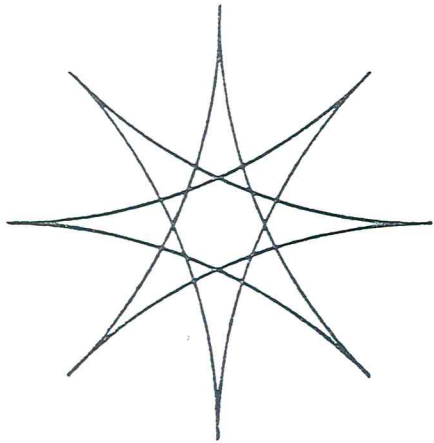


Fig. 15. Courbe de trajectoire du sommet du gyroscope après libération sans choc à partir d'une position perturbée.

Fig. 16. Courbe de trajectoire du sommet du gyroscope après libération avec choc en direction de la pesanteur.

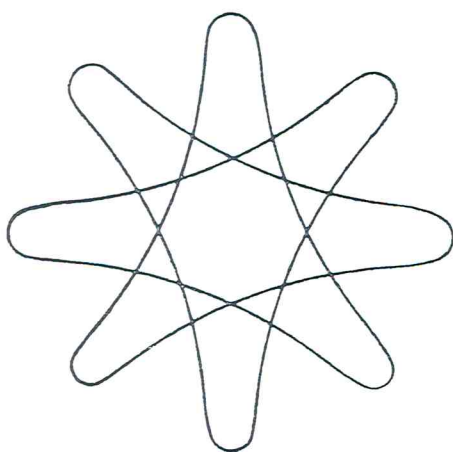
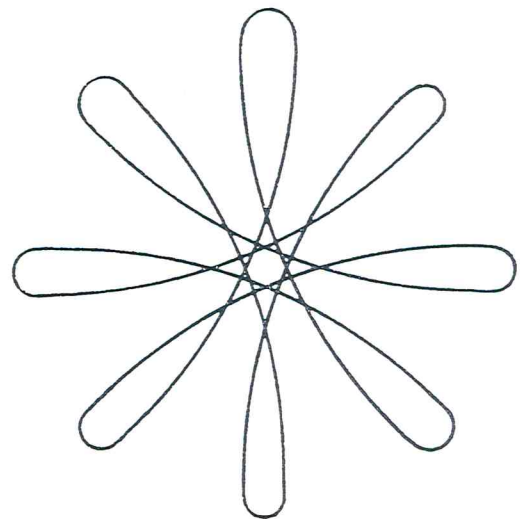


Fig. 17. Courbe de trajectoire du sommet du gyroscope après libération avec choc en direction du mouvement de précession.

initiales, sont différentes. Ainsi l'axe gyroscopique décrit lors d'une libération sans choc à partir d'une position écartée de la position d'équilibre une rosette à pointes comme montrée sur la fig. 15. Pour d'autres conditions initiales il se forme des courbes de trajectoire de la forme indiquée sur les figures 16 et 17.

### b) Assujettissement par un couple de gravité

Les mêmes expériences telles qu'elles viennent d'être faites avec des ressorts peuvent aussi être exécutées avec un assujettissement à l'aide d'un couple de gravité. A cet effet, nous devons amener l'axe du cadre extérieur en position horizontale. En outre, le centre de gravité du système est déplacé en dehors du point d'intersection des trois axes du système en appliquant sur un côté de l'axe gyroscopique, sur le cadre intérieur, un poids additionnel. La fig. 18 montre l'appareil préparé pour les expériences qui vont suivre. Lorsque le gyroscope est immobile, le couple de gravité cherche toujours à tirer l'axe du gyroscope de nouveau vers la position d'équilibre verticale. Lorsque le gyroscope est en marche, l'axe exécute un mouvement de précession, qui, cette fois, fait parcourir aux points de l'axe gyroscopique des trajectoires circulaires. Ceci s'explique simplement par l'assujettissement de force régulière du système autour des deux axes de Cardan. Car, il faut noter que la distance au centre de gravité est la même pour les deux axes de Cardan. Le sens de la rotation, avec lequel est parcouru la trajectoire circulaire, est contraire à celui de la rotation du gyroscope.

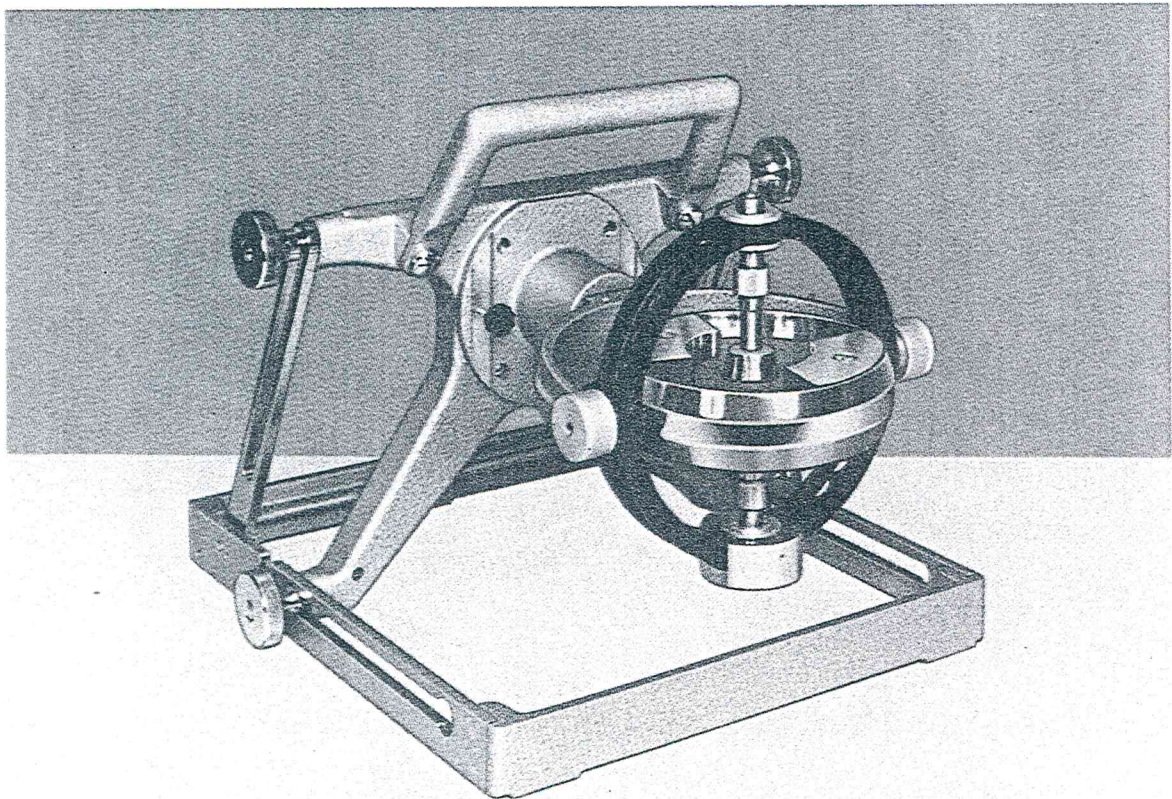


Fig. 18. Pendule gyroscopique avec assujettissement par gravité, poids dans le bas.

L'axe gyroscopique a reçu par la suspension du poids, deux positions d'équilibre. L'une où le poids se trouve dans le bas est statiquement stable car le système cherche à revenir même dans le cas d'un gyroscope immobile dans sa position d'équilibre. La deuxième position d'équilibre est cependant statiquement instable. Dans cette position, le centre de gravité se trouve au-dessus du point de soutien, le poids est donc au-dessus. Le gyroscope immobile peut effectivement rester dans cette position d'équilibre en cas d'équilibre parfait, toutefois la plus petite perturbation le renverse et le fait osciller vers la position d'équilibre basse, statiquement stable.

Nous lançons maintenant le gyroscope et amenons l'axe en direction verticale, de sorte que le poids est en haut. Après libération, le gyroscope reste donc dans la position d'équilibre instable précédente. Même avec de petites perturbations, il ne tombe pas, mais danse autour de sa position d'équilibre en effectuant des cercles de précession plus ou moins grands (fig. 19).

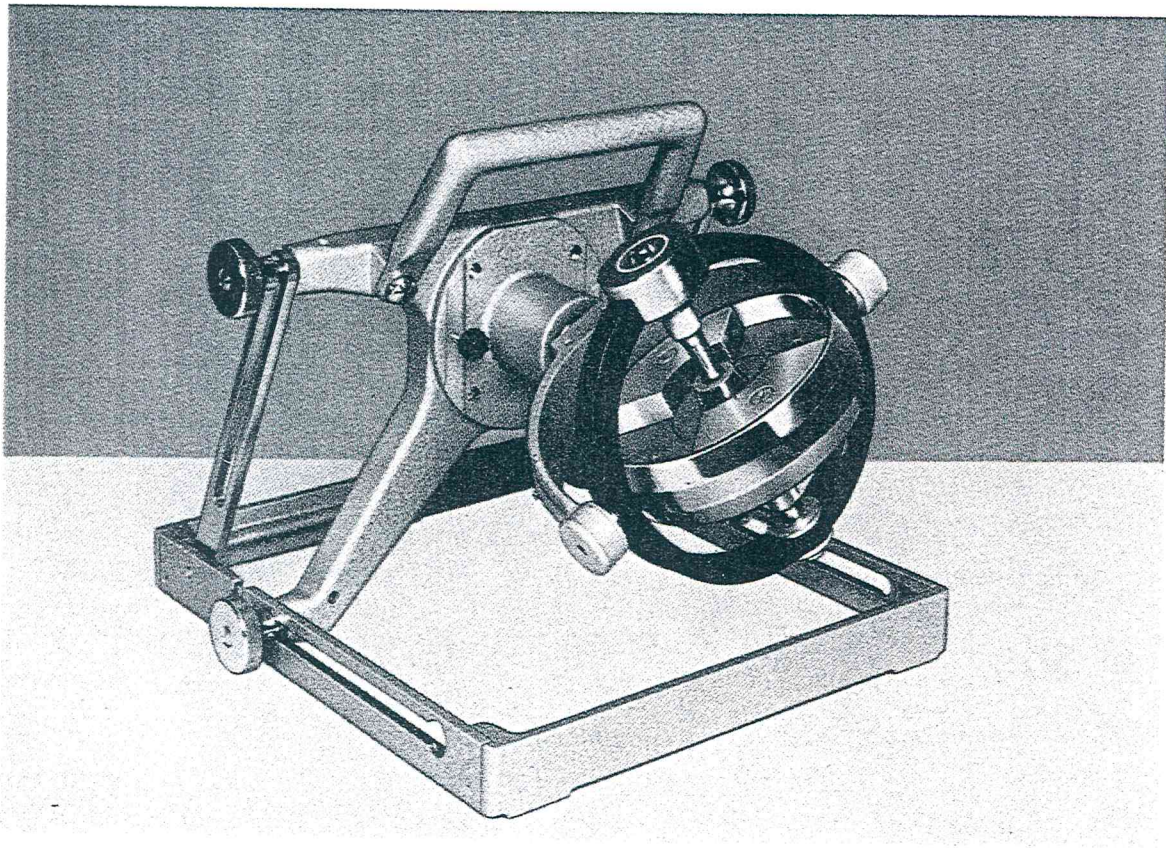


Fig. 19. Pendule gyroscopique avec assujettissement par gravité, poids en haut.

La position d'équilibre est devenue stable grâce au gyroscope en marche. On dit aussi dans ce cas que le gyroscope est en position d'équilibre dynamiquement stable. Comme le montre notre expérience: la possibilité, qu'une position d'équilibre statiquement instable devienne dynamiquement stable, existe. Le gyroscope doit évidemment tourner suffisamment vite pendant l'expérience pour que la position d'équilibre supérieure statiquement instable devienne dynamiquement stable. Si le gyroscope tourne trop doucement, il ne peut plus exécuter sa précession stable autour de la position d'équilibre supérieure et il bascule. La position d'équilibre inférieure est stable aussi bien statiquement que dynamiquement.

Le mouvement de précession s'effectuant autour de la position d'équilibre supérieure s'exécute toujours dans le même sens que la rotation du gyroscope. Nous pouvons constater en général qu'avec un assujettissement statiquement stable (position d'équilibre inférieure) le sens de précession et le sens de rotation sont opposés, par contre avec un assujettissement statiquement instable (position d'équilibre supérieure) les deux sont de même sens. On peut naturellement aussi provoquer par percussions des nutations dont le sens du parcours sera toujours celui de la rotation du gyroscope que ce soit un assujettissement statiquement stable ou un statiquement instable.

D'autre-part, les expériences nous permettent aussi de mesurer l'influence des frottements dans les suspensions à la Cardan. A cet effet, nous laissons parcourir au gyroscope son cône de précession pendant un temps assez long, le poids accroché dans le bas. On observe alors que l'ouverture du cône devient toujours plus petite, donc que les amplitudes de précession s'estompent. Le même essai exécuté avec le poids en position haute montre que les amplitudes de précession deviennent plus grandes. Le frottement des suspensions agit donc dans les deux cas dans un sens différent. On peut facilement démontrer en agrandissant l'effet du frottement que la diminution resp. l'agrandissement de l'angle du cône de précession provient effectivement des frottements. A cet effet, nous enfilons les brosses d'amortissement (fig. 78) sur le cadre extérieur pour que les brosses frottent sur le pied de l'appareil. L'influence du frottement ainsi amplifié a pour effet un amortissement resp. un agrandissement nettement plus rapide de l'amplitude de précession. Ces considérations ne sont toutefois valables que pour un gyroscope avec suspension à la Cardan. On ne doit pas généraliser, car, comme nous allons le montrer ultérieurement, les effets du frottement dans le cas de la toupie statiquement instable provoquent précisément l'effet contraire.

Donc, dans les deux cas, aussi bien pour l'assujettissement statiquement stable que pour celui statiquement instable du système autour des deux axes de Cardan, le gyroscope peut exécuter une précession stable autour de sa position d'équilibre. Ceci a été une des connaissances acquise par les expériences. Mais que se passe-t-il lorsque l'assujettissement est certes statiquement stable autour d'un des axes de Cardan mais statiquement instable autour de l'autre axe? L'expérience permettra de répondre à cette question. Nous resuspendons entre le cadre extérieur et les

tiges verticales une paire de ressorts dont la force a été déterminée telle que le système avec le poids situé en haut soit de nouveau stable autour de l'axe de Cardan extérieur (par ex. Paire de ressort N°4). Le gyroscope continue maintenant certes à rester par lui-même en position d'équilibre supérieure, pendant un certain temps mais à la moindre perturbation, il exécute un mouvement de précession (d'ailleurs sur une trajectoire hyperbolique) en s'écartant de la position d'équilibre et il va culbuter vers le bas. La position d'équilibre n'est donc plus dynamiquement stable. Une telle position d'équilibre mixte, statiquement stable dans une direction, statiquement instable dans l'autre peut aussi être obtenue par la seule action d'un couple de gravité si les deux axes de Cardan ne se coupent pas en un point. Ce cas peut souvent se présenter dans des pendules gyroscopiques techniques. Si, en outre, le centre de gravité du système se trouve entre les deux axes de Cardan, donc au-dessus de l'un, toutefois en dessous du deuxième axe de Cardan, l'assujettissement est effectivement statiquement stable dans une direction et statiquement instable dans l'autre. Si on veut éviter avec certitude la plage instable, on doit ou bien déplacer le centre de gravité suffisamment loin le long de l'axe gyroscopique ou bien faire de telle sorte que les points d'intersection des deux axes de Cardan avec l'axe gyroscopique se confondent en un seul point.

Notons ici, que le pendule gyroscopique avec couple de gravité et rotor balourdé (disposition des poids du disque suivant fig. 76) présente aussi de multiples phénomènes très intéressants. Toutefois, ceci nous amènerait trop loin, si on voulait ici approfondir cette question. Que le lecteur s'amuse à les découvrir lui-même. Pour ces expériences, il faudra modifier les grandeurs du couple de gravité et des moments d'inertie en fixant différents poids additionnels. De plus, il faudra lancer le gyroscope que modérément, donc une légère poussée du doigt suffira.

### **c) Les cas limites du pendule gyroscopique**

Les expériences exécutées jusqu'à présent ont montré que le mouvement de précession est une trajectoire circulaire pour un assujettissement de force égale du système autour des deux axes de Cardan, mais conduit pour un assujettissement de forces différentes à des trajectoires en ellipse. L'ellipse est d'autant plus mince que les assujettissements autour des deux axes de Cardan sont différents. Dans le cas limite où l'assujettissement autour d'un axe devient absolument nul, l'ellipse se transforme en une droite. Ceci peut être montré de deux manières différentes par des expériences. Nous replaçons à cet effet l'axe extérieur de Cardan en position verticale et enlevons le poids additionnel sur le cadre intérieur. Puis on accroche par ex. entre le cadre intérieur et le cadre extérieur des ressorts d'assujettissement. L'axe gyroscopique n'obtient certes pas de position d'équilibre bien définie mais par contre un plan d'équilibre, étant donné que les ressorts cherchent constamment à tirer l'axe vers le plan horizontal. Lorsque l'axe gyroscopique est incliné vers le plan horizontal, le couple engendré provoque une précession autour de l'axe de Cardan

vertical. Cette expérience correspond exactement à la première expérience de précession que nous avons exécutée, sauf que les ressorts ont pris le rôle des poids déposés sur le cadre intérieur et qu'ils produisent le couple autour de l'axe de Cardan intérieur. Si la suspension de l'axe de Cardan extérieur était exempt de frottements, le gyroscope continuerait sans interruption à produire un mouvement de précession. En réalité, il se forme lors de la précession des couples de frottement sur l'axe extérieur de Cardan qui eux à leur tour engendrent des précessions autour de l'axe de Cardan intérieur. Il en résulte une diminution de l'inclinaison du cadre intérieur. Ceci engendre en même temps une diminution du couple et, par conséquent, de la vitesse de précession autour de l'axe extérieur de Cardan. Le mouvement, par suite des forces de frottements, se ralentira de plus en plus pour s'arrêter finalement complètement lorsque le cadre intérieur est devenu horizontal. L'expérience peut aussi être exécutée d'une autre façon en enlevant non pas l'assujettissement du cadre extérieur mais celui du cadre intérieur. Les ressorts seront donc suspendus uniquement entre le cadre extérieur et les tiges-supports. L'axe gyroscopique sera toujours tiré par cet assujettissement vers un plan vertical. Si l'axe dévie de ce plan, les ressorts accrochés produisent un couple qui fait effectuer au gyroscope une précession autour de l'axe de Cardan intérieur. Mais la précession ne peut avoir lieu que jusqu'au moment où le cadre intérieur bascule dans le plan du cadre extérieur. Comme dans cette position, l'axe gyroscopique est parallèle à l'axe du couple extérieur, le cadre extérieur peut céder au couple et rentrer en oscillant dans la position d'équilibre. Après quelques oscillations, le système se mettra de nouveau au repos.

Avec les expériences décrites à l'instant, l'assujettissement autour d'un des axes a été annulé. Dans l'autre cas limite, on laisse devenir l'assujettissement de plus en plus fort et finalement on rend le système solidaire d'un de ses axes de Cardan. Ainsi le gyroscope perd un degré de liberté et par conséquence l'axe gyroscopique ne peut se mouvoir que dans un seul plan. Comment le gyroscope réagit à cette limitation de sa liberté de mouvement, l'expérience suivante va nous le montrer. A cet effet, nous assujettissons le cadre extérieur au socle de l'appareil en bloquant la vis moletée (fig. 20). Le cadre intérieur sera assujetti élastiquement par accrochage de ressorts. Avec un gyroscope immobile le système exécute, après déclenchement par choc, des oscillations autour de l'axe de Cardan intérieur. Le gyroscope sera maintenant (pas trop fortement) lancé et le cadre intérieur reheurté. Le système oscille de la même manière que dans le cas précédent où le gyroscope était arrêté. A l'aide d'un chronomètre on peut facilement constater que le temps des oscillations n'a pratiquement pas bougé. La rotation du gyroscope a donc manifestement pas d'influence sur la tenue du système à deux degrés de liberté. Toutefois, il faut être prudent avec tous les gyroscopes à liberté restreinte de mouvement. Les modifications de direction de l'axe gyroscopique sont en effet seulement possible s'il existe des couples de précession correspondants qui peuvent provoquer ces modifications de direction. Si donc le cadre intérieur oscille chez un gyroscope en marche, les couples de précession nécessaires à la production de ces oscillations doivent

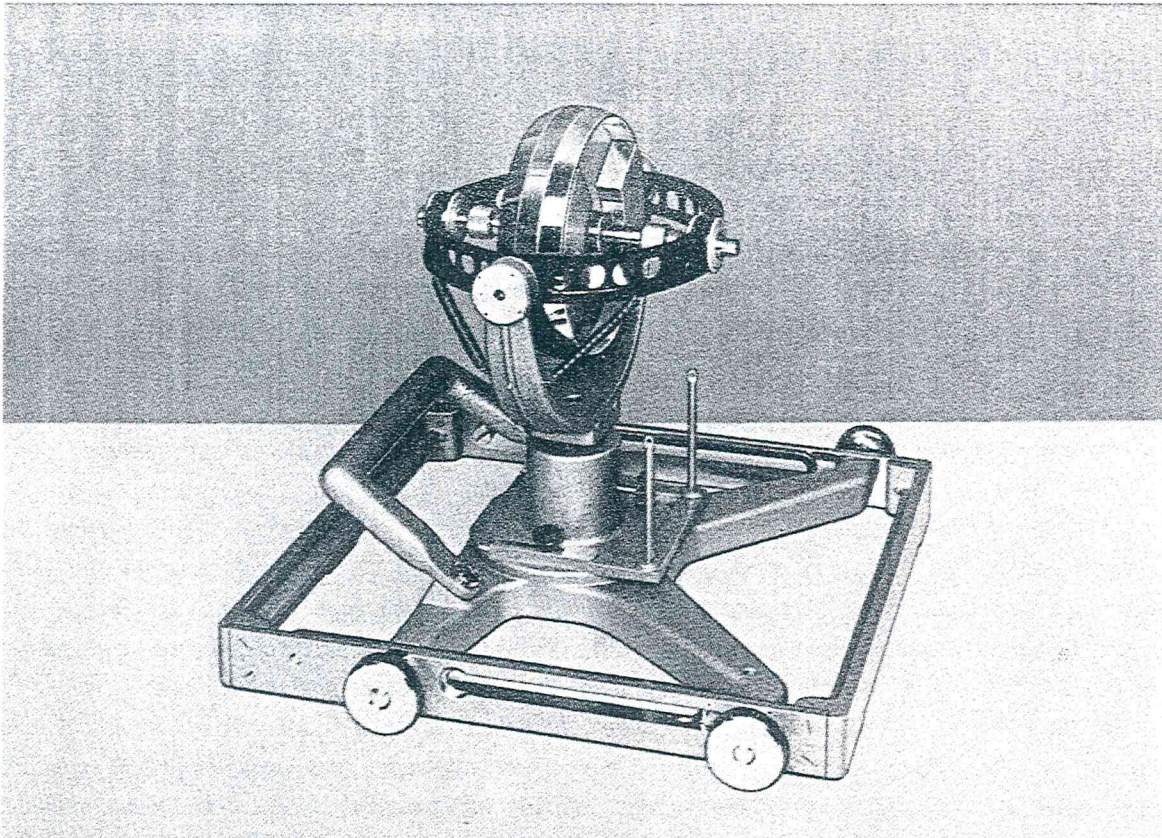


Fig. 20. Pendule gyroscopique avec assujettissement par ressort sur un seul axe uniquement.

être absorbés par l'assujettissement rigide du cadre extérieur et par les suspensions de l'axe de Cardan intérieur. Ces pressions de précession peuvent atteindre des valeurs très importantes et conduisent, pour cette raison, facilement à des détériorations.

Par le fait que de fortes pressions de précession se produisent avec des gyroscopes à assujettissement rigide partiel, on peut facilement comprendre que la moindre tendance à la déformation que ce soit dans l'axe gyroscopique ou dans le cadre à Cardan, ou la moindre molesse du support de l'appareil, par ex., le montage sur des pieds en caoutchouc, peut déjà avoir une influence considérable sur le déroulement de l'expérience. En présence de problèmes gyroscopiques techniques, on ne doit pas perdre de vue cette flexibilité des axes gyroscopiques même très solides.

## 2.6 L'influence de l'inertie du cadre

La plupart des gyroscopes utilisés en technique sont à suspension à la Cardan. Ce type de suspension peut avoir deux sortes d'effet sur la tenue d'un gyroscope, un effet cinématique et un effet cinétique. L'influence cinématique est provoquée par

les limitations de mouvement, auxquelles sont soumis le rotor, le cadre intérieur et le cadre extérieur par suite de la géométrie du système à Cardan. Ceci est équivalent pour les systèmes à Cardan intérieur comme extérieur. Nous reviendrons d'une façon plus précise sur ce type d'influence des cardans dans le chapitre 5.1, où il est d'une importance particulière pour l'étude des gyromètres traités en cet endroit. Nous nous limiterons dans ce chapitre à une description des effets cinétique qui ont pour origine les inerties de masse pas toujours négligeables des cadres à Cardan. Ces influences sont surtout importantes dans les systèmes à Cardan extérieur, car le rapport de l'inertie du cadre à l'inertie du rotor  $y$  est beaucoup plus grand que dans les systèmes à Cardan intérieur.

On constate que l'inertie du cadre peut influencer non seulement quantitativement le comportement des gyroscopes à suspension à la Cardan mais peut aussi provoquer des modifications qualitatives. Ils se manifestent par des effets d'un type nouveau. Nous allons traiter ici deux phénomènes de ce genre: la dérive cinétique d'un gyroscope à Cardan sous l'influence d'oscillation, laquelle est très importante dans beaucoup d'applications pratiques ainsi que la tenue en stabilité des gyroscopes lourds à Cardan.

#### a) La dérive cinétique du gyroscope à Cardan exempt de forces (gyro libre)

L'essai de précession a montré que la vitesse de précession  $\omega_p$  est proportionnelle à la grandeur du couple actif. Par absence de couple, la vitesse de précession sera nulle. Dans ce cas l'axe cinétique restera fixe par rapport à l'espace, tandis que l'axe de la figure visible peut danser autour de l'axe cinétique comme ceci a été expliqué lors de l'étude des mouvements de nutation. Ce type de mouvement n'est toutefois, strictement valable que pour un corps unique, tournant et rigide. Par contre le gyroscope à Cardan est composé de trois corps rigides. Si on pouvait négliger l'inertie des cadres à Cardan, le comportement du rotor ne serait pas modifié, comme dans le cas d'un corps unique. En réalité, il se produit sous certaines conditions, à cause de l'inertie du cadre, une dérive de l'axe cinétique d'habitude fixe par rapport à l'espace, l'écartant de sa direction d'origine. Comme cet effet n'a lieu qu'en présence d'oscillations du système à Cardan, on le désigne par **dérive cinétique**.

Montrons cet effet par une expérience. Pour ce faire, on utilise le gyroscope-modèle sans poids additionnel et avec l'axe du cadre extérieur en position verticale. En équilibrant bien le centre de gravité, l'axe du rotor reste en position fixe par rapport à l'espace pour toute direction dans la mesure où on libère le gyroscope après son lancement sans provoquer de choc. On renouvelle cette expérience, mais on provoque par des chocs appropriés (il est bon de ne pas lancer le rotor trop fortement) des oscillations de nutation. Lorsque le système à Cardan se trouve en position normale dans laquelle les deux cadres sont - en négligeant les balancements provo-