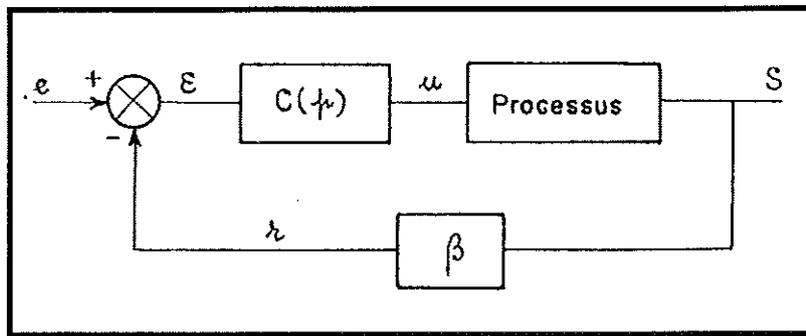


dms-didalab

Votre partenaire pour l'enseignement scientifique et technique

Y. TANGUY et P. TURELLE
Ingénieurs E.S.E.

ASSERVISSEMENTS LINEAIRES



THEORIE - Réf. 3780 C

	pages
<u>CHAPITRE III - IDENTIFICATION - REPONSES TRANSITOIRES ET HARMONIQUES - DIAGRAMMES -</u>	17
III.1. - Réponses transitoires typiques	17
III.1.1. - Définitions générales	17
(a) temps de réponse	17
(b) dépassement	17
(c) système retardé.....	18
III.1.2. - Systèmes du premier ordre.....	18
III.1.3. - Systèmes du second ordre	19
III.1.4. - Systèmes à déphasage non minimal	21
III.1.5. - Systèmes instables (avec pôles à l'origine).....	22
III.2. - Identification paramétrique	22
III.2.1. - Généralités	22
III.2.2. - Méthode de Strejc	23
III.3. - Réponses harmoniques - Diagrammes.....	25
III.3.1. - Les différents diagrammes	25
III.3.2. - Système du premier ordre	26
III.3.3. - Premier ordre avec zéro	29
III.3.4. - Système du second ordre	31
III.3.5. - Système retardé	33
III.3.6. - Système à déphasage non minimal	34
III.3.7. - Système instable	34
III.3.8. - Cas général	35
<u>CHAPITRE IV - ANALYSE DES SYSTEMES ASSERVIS - PRECISION - RAPIDITE - STABILITE -</u>	37
IV.1. - Structure générale. Fonction de transfert en boucle fermée	37
IV.1.1. - Boucle ouverte, Boucle fermée	37
IV.1.2. - Analyse harmonique en boucle fermée : Abaque de Black Nichols	38
IV.2. - Stabilité	40

	pages
IV.2.1. - Critère de Nyquist	40
(a) Un théorème de Cauchy	40
(b) Application au critère de Nyquist	41
(c) Enoncé du critère de Nyquist.....	43
(d) Critère de Nyquist simplifié : critère du revers..	44
IV.2.2. - Degré de stabilité. Marge de phase. Marge de gain.....	45
(a) Marge de phase. Marge de gain	45
(b) Stabilité conditionnelle.....	47
(c) Remarque sur la discussion pratique de la stabilité.....	48
(d) Relation entre degré de stabilité et amortissement de la réponse indicielle.....	49
IV.2.3. - Critère de Routh.	50
IV.3. - Précision	51
IV.3.1. - Erreur permanente.....	53
IV.3.2. - Erreur transitoire.....	57
IV.3.3. - Conclusions.	57
 <u>CHAPITRE V - SYNTHÈSE DES SYSTEMES ASSERVIS - ETUDE DE LA CORRECTION</u>	 59
V.1. - Rôle des correcteurs - Dilemme : Précision - Stabilité..	59
V.1.1. - Corrections cascades	60
V.1.2. - Corrections parallèles	60
V.1.3. - Corrections par anticipation	61
V.1.4. - Conclusion.....	63
V.2. - Correction cascade	63
V.2.1. - Correction par avance de phase et P.D.	63
V.2.2. - Correction par retard de phase et P.I.	68
V.2.3. - Correction par actions combinées et P.I.D.	74
V.2.4. - Remarques sur la correction cascade	81
V.3. - Correction parallèle	82
V.3.1. - Principe général	82

	Pages
V.3.2. - Correction tachymétrique simple	83
V.3.3. - Correction tachymétrique filtrée	85
V.3.4. - Conclusion sur la correction parallèle	88
<u>ANNEXE I - TRANSFORMATION DE LAPLACE</u>	91
<u>ANNEXE II - SYSTEMES DU SECOND ORDRE.</u> (analyse harmonique).....	95

Chapitre I

INTRODUCTION A L'AUTOMATIQUE

I.1. - BUT DE L'AUTOMATIQUE -

Réaliser un "système automatique" c'est effectuer une ou plusieurs opérations sans l'intervention de l'homme.

Exemples :

- machines à laver automatiques
- pilotage automatique d'avion.

Les systèmes automatiques permettent :

- de réaliser les opérations trop complexes pénibles ou délicates et ne pouvant être confiées à l'homme (ex : atterrissage d'un engin spatial sur la lune, etc...)
- de substituer la machine à l'homme dans des opérations trop répétitives ou dénuées d'intérêt. (ex : boîte de vitesse automatique - appareillage électro-ménager, etc...).

Notons que ces systèmes copient le plus souvent le comportement de l'homme dans les trois phases essentielles de son travail :

- 1^e phase : observation
- 2^e phase : réflexion
- 3^e phase : action

puis retour à la première phase.

Exemple :

Remplir une cuve à une hauteur donnée d'eau.

Les trois phases sont alors :

- observation du niveau d'eau actuel dans la cuve
- comparaison avec le niveau souhaité
- action sur le robinet (ouverture, fermeture)

puis retour à la phase d'observation.

Ce retour constitue l'une des notions fondamentales de l'automatique. On dit encore que l'on a réalisé un bouclage (appelé feedback (nourrir en retour) par les anglosaxons).

I.2. - DEFINITION DU BOUCLAGE -

Un bouclage apparaît chaque fois qu'au cours d'une opération, un système prend en compte l'observation de son état pour le modifier.

Exemples de systèmes bouclés :

- automobile + chauffeur réalisant l'opération de conduite sur route (système non automatique)
- régulation de la température d'un fer à repasser (système automatique)

Un bouclage est nécessaire dans les opérations où :

- la précision (ou la puissance) mise en jeu est importante. Ex : On ne sait pas "aveuglément" enfiler un fil dans le chas d'une aiguille.

On remarque ici que la précision de l'opération dépend essentiellement de la précision de l'observation.

- des perturbations interviennent en cours d'opération modifiant ainsi l'état du système. Ex : Ouverture de la porte d'un four thermostaté entraînant une déperdition de chaleur et donc une baisse de température que l'on compense en augmentant la puissance de chauffage.

Ces deux nécessités peuvent naturellement coexister dans certaines opérations.

I.3. - REGULATIONS ET ASSERVISSEMENTS -

Parmi les systèmes automatiques on distingue :

- les systèmes programmés et séquentiels où l'automatisation porte sur un nombre fini d'opérations prédéterminées dans leur déroulement.
Ex : machine à laver - ascenseur - etc...
- les systèmes asservis où, tous les cas possibles n'étant pas prévisibles, le déroulement d'une opération ne peut être connu à l'avance (présence de perturbations. etc...)

Les systèmes asservis sont nécessairement bouclés.

Ex : Antenne de radar asservie à la poursuite d'un avion.

Parmi les systèmes asservis, on distingue :

- les régulations lorsque la tâche à réaliser consiste à maintenir une ou plusieurs grandeurs physiques à des valeurs fixées.

Ex : Régulation de température d'un four

Régulation de vitesse (régulateur de Watt sur une machine à vapeur)

- les asservissements lorsque la tâche à réaliser consiste à faire suivre une loi non fixée à l'avance à une ou plusieurs grandeurs physiques.

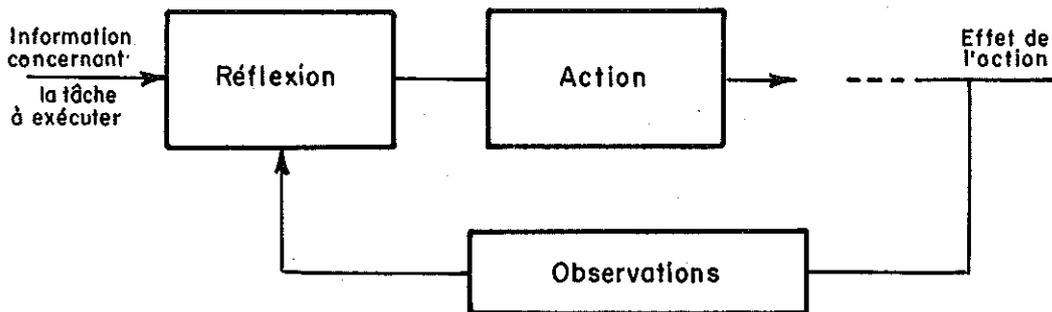
Ex : Direction asservie d'un engin.

Remarque : Les asservissements font souvent intervenir des organes mécaniques. On parle dans ce cas de "servomécanismes" (= mécanismes asservis).

I.4. - STRUCTURE D'UN SYSTEME ASSERVI -

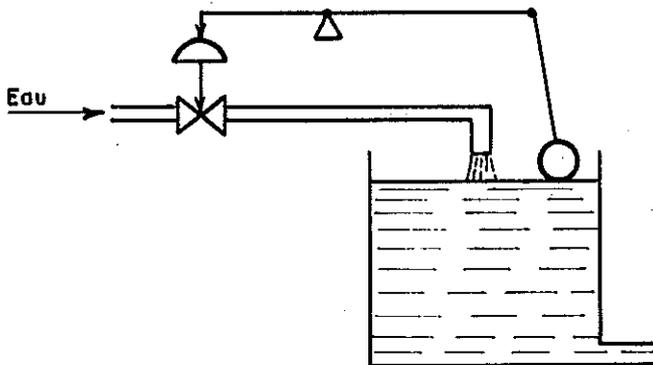
Un système asservi est un système bouclé.

La structure générale est alors la suivante :



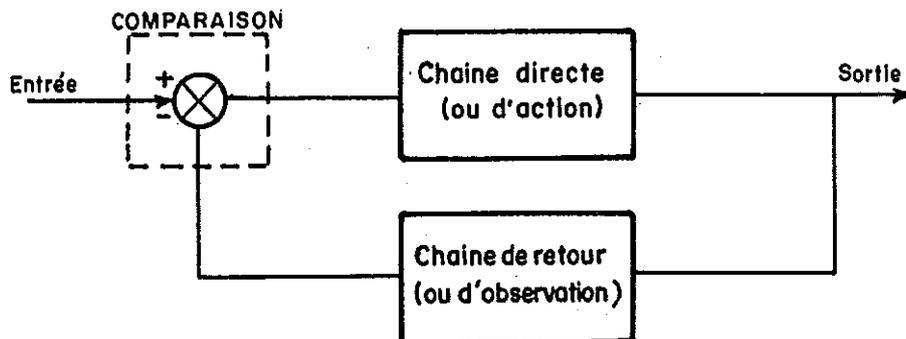
Exemple :

Régulation automatique du niveau d'eau dans une cuve avec fuite.



L'ouverture ou la fermeture de la vanne est commandée par la position relative du flotteur.

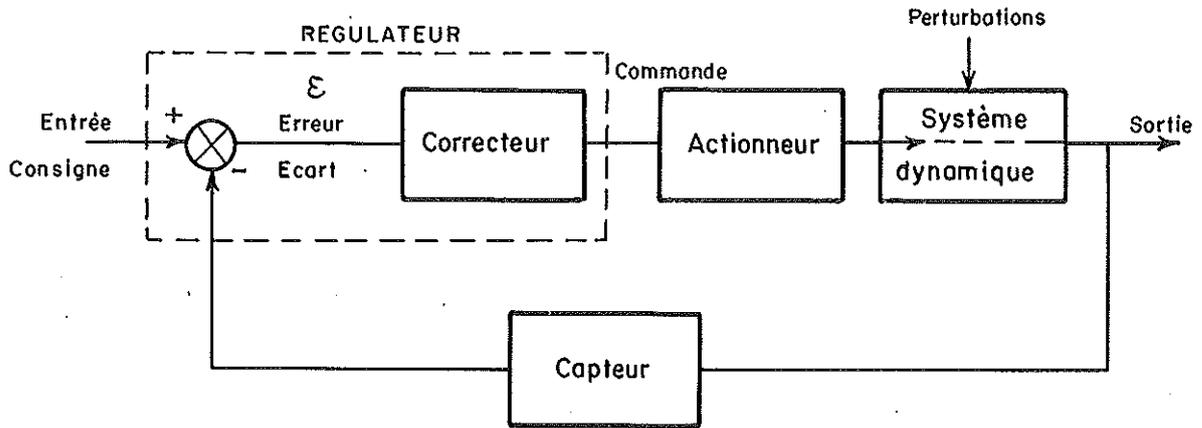
Le fonctionnement de cette régulation peut être décrit par le schéma général ci-dessous :



L'entrée représente le niveau d'eau désiré. La sortie est le niveau d'eau réel.

L'action se fait après comparaison des niveaux désiré et réel.

On représente habituellement ce schéma appelé "schéma fonctionnel" ou "schéma-bloc" de la manière suivante :



- (a) Le régulateur (comparateur + correcteur) élabore l'ordre de commande à partir du signal ε : c'est l'organe "intelligent".
- (b) L'actionneur ou organe d'action apporte en général, la puissance nécessaire à la réalisation de la tâche : c'est l'organe "musclé".
Ex : vanne.
- (c) Le système dynamique évolue selon l'action suivant des lois physiques qui lui sont propres. La sortie est, en général, une grandeur physique qui caractérise la tâche à réaliser. De plus cette sortie peut fluctuer en fonction de perturbations extérieures, en général, imprévisibles.
Ex : four dont la température est fonction de la consommation de combustible et de déperdition de chaleur.
- (d) Le capteur délivre à partir de la sortie une grandeur caractérisant l'observation. La principale qualité est la précision dont dépendra la précision du système global.

Remarques :

Le signal ε (écart ou erreur) caractérise la qualité de fonctionnement d'un système asservi. On vise à obtenir un écart faible. Notons toutefois que cet écart ne peut être nul en permanence (car dans ce cas la structure asservie serait inutile).

I.5. - CONCEPTS UTILES A L'ETUDE DES SYSTEMES ASSERVIS -

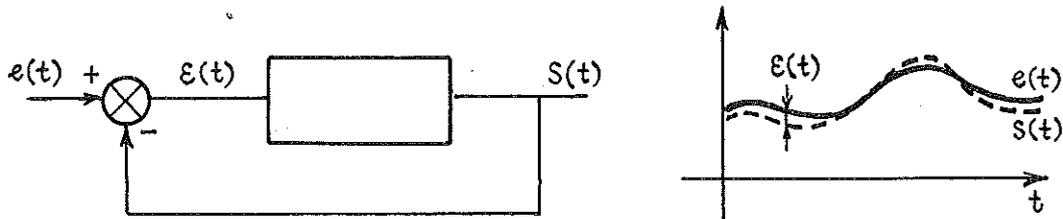
Dans l'analyse des systèmes asservis, nous distinguerons l'aspect statique de l'aspect dynamique,

- (a) l'aspect statique concerne l'étude des systèmes asservis en mode régulation (entrée fixe). On définit l'erreur statique comme la différence entre la tâche demandée et la tâche réalisée.

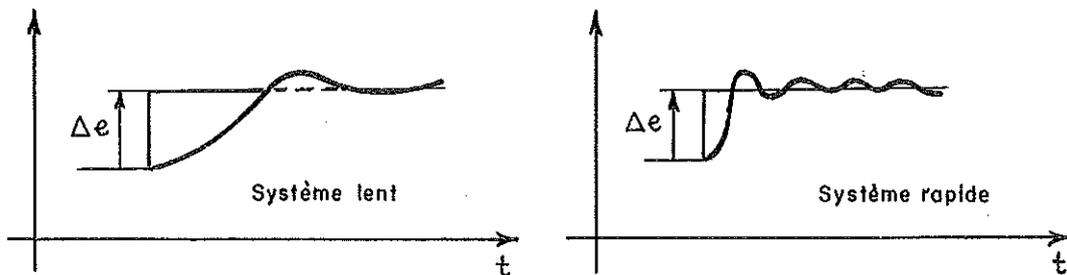
Au cours de la synthèse des systèmes asservis, on s'efforcera d'annuler cette erreur statique

- (b) l'aspect dynamique, essentiel en automatique, s'étudie par les notions de précision dynamique, de rapidité et de stabilité.

* la précision dynamique est caractérisée par l'erreur avec laquelle la sortie suit la loi d'entrée imposée au système.



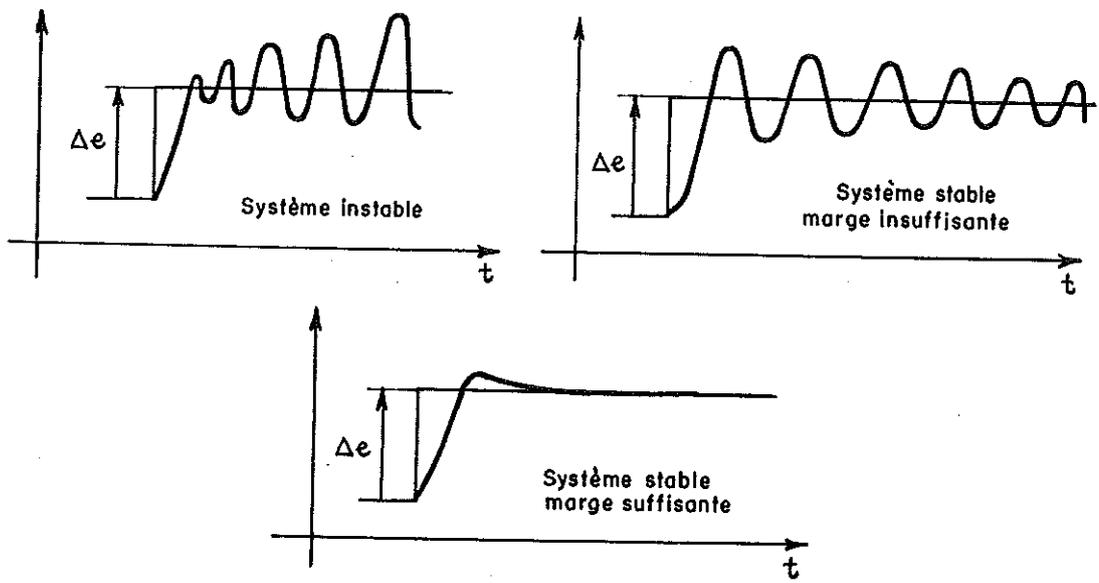
* la rapidité est caractérisée par le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée (temps de réponse). Cette notion est fortement liée à la précision dynamique (plus un système est "rapide" plus il est précis).



* la stabilité

La présence d'un bouclage risque d'introduire une divergence ou une oscillation de la sortie. Ce comportement est intolérable pour un système asservi. On s'efforce au cours de la synthèse d'éviter ce risque en se définissant une "marge" de stabilité.

Exemple : Un système asservi présentant une marge de stabilité suffisante sera caractérisé par une réponse, à une variation brusque d'entrée (réponse indicielle), convenablement amortie.



Ces trois aspects dynamiques sont étroitement liés.

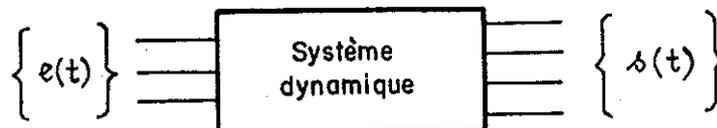
On cherchera à rendre compatible la rapidité ou précision et un bon amortissement au cours de la synthèse des correcteurs.

Chapitre II

REPRESENTATION DES SYSTEMES LINEAIRES ET CONTINUS

II.1. - NOTIONS DE SYSTEMES DYNAMIQUES -

Un système dynamique est un ensemble d'éléments liés entre eux dans le but de réaliser une tâche donnée. Ce dispositif soumis aux lois physiques est caractérisé par des grandeurs de deux types : les entrées et les sorties.



Les entrées sont des grandeurs de commande du système ou encore des signaux parasites appelés perturbations.

Les sorties permettent de juger de la qualité de la tâche remplie.

Exemple du four :

entrée de commande : débit de combustible

entrée de perturbation : déperdition de chaleur

sortie : température à l'intérieur du four.

Les entrées et sorties sont en général multiples (systèmes multivariables). Lorsqu'il n'y a qu'une entrée de commande et une sortie le système est dit monovisible.

II.2. - NATURE DES SIGNAUX D'ENTREE -

Les signaux d'entrée sont des fonctions du temps t . Ils seront dits aléatoires ou certains (déterministes) selon que le hasard intervient ou non dans leur génération. On ne s'intéressera dans la suite qu'aux signaux certains et causaux, c'est-à-dire nuls pour $t < 0$.

Les signaux les plus importants dans l'étude des systèmes asservis sont :

	$e(t) \ t > 0$	$E(j\omega) \ ^*$	
	$E_0 \sin \omega_0 t$	$\frac{E_0 \omega_0}{j\omega^2 + \omega_0^2}$	Signal sinusoïdal
	$\delta(t)$	1	Impulsion de Dirac
	$\gamma(t)$	$\frac{1}{j\omega}$	Echelon unité de Heaviside
	$t\gamma(t)$	$\frac{1}{j\omega^2}$	Rampe (Echelon de vitesse)

* Voir Annexe I : Transformation de Laplace.

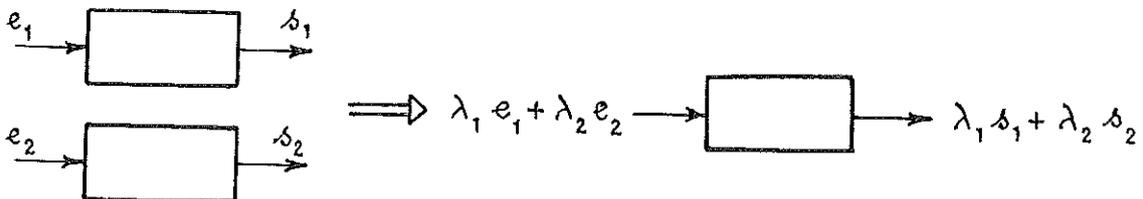
II.3. - SYSTEMES LINEAIRES CONTINUS ET INVARIANTS -

(a) Systeme continu

Un système est dit continu, par opposition à un système discret, lorsque les grandeurs physiques le caractérisant délivrent une information à tout instant. La plupart des systèmes physiques, du point de vue macroscopique, sont continus.

(b) Systeme linéaire

Un système est dit linéaire s'il répond au principe de superposition.



© Systeme invariant

Un systeme est dit invariant s'il obeit a la loi suivante :



Un systeme qui ne vieillit pas est invariant.

Remarque :

En toute theorie les systemes physiques ne sont ni continus (point de vue microscopique), ni invariants (vieillessement des composants), ni lineaires.

En pratique nous nous ramenerons au cas continu lineaire et invariant par des hypotheses simplificatrices le plus souvent justifiees.

Ex : linearisation de l'equation pendulaire pour les petits mouvements autour de l'origine $\theta = 0$:

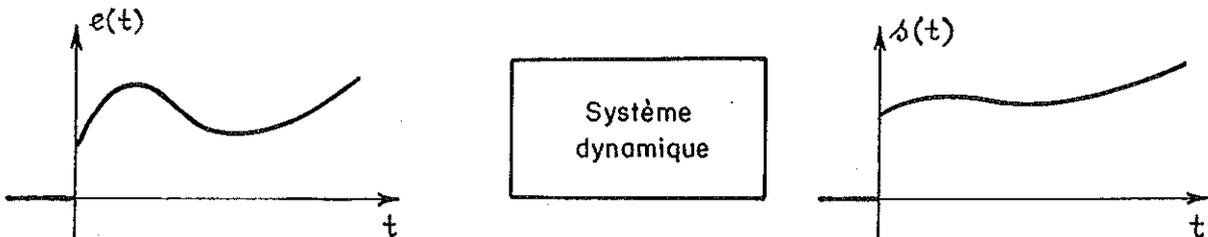
$$\ddot{\theta} + a^2 \sin \theta = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \ddot{\theta} + a^2 \theta = 0$$

II.4. - REPRESENTATION DES SYSTEMES LINEAIRES CONTINUS ET INVARIANTS -

Pour realiser une commande automatique, il est necessaire d'etablir les relations existant entre les entrees (variables de commande) et les sorties (variables d'observation). L'ensemble de ces relations s'appelle "modele mathematique" du systeme. Nous allons decrire dans la suite les differentes representations relatives a un systeme monovisible.

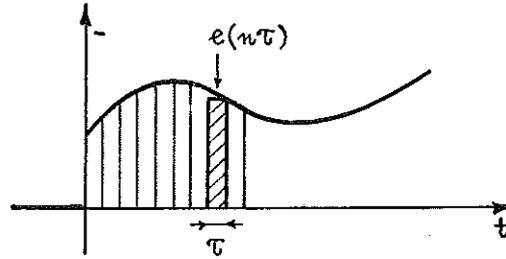
II.4.1. - Representation par reponse impulsionnelle -

Soit un systeme dynamique excite par un signal causal e(t):

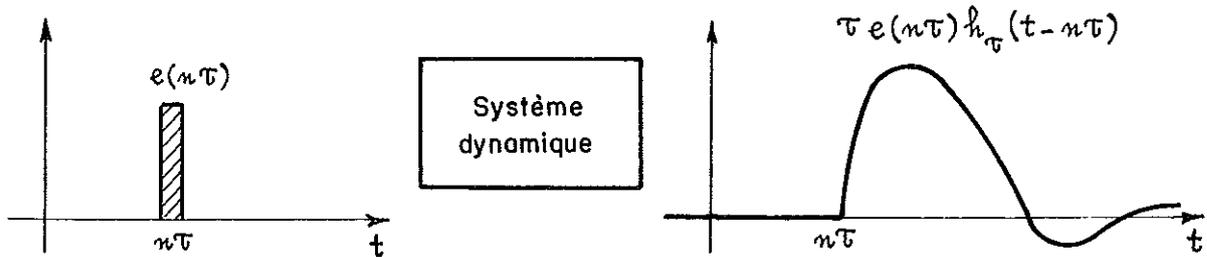


Cherchons la relation liant s(t) et e(t).

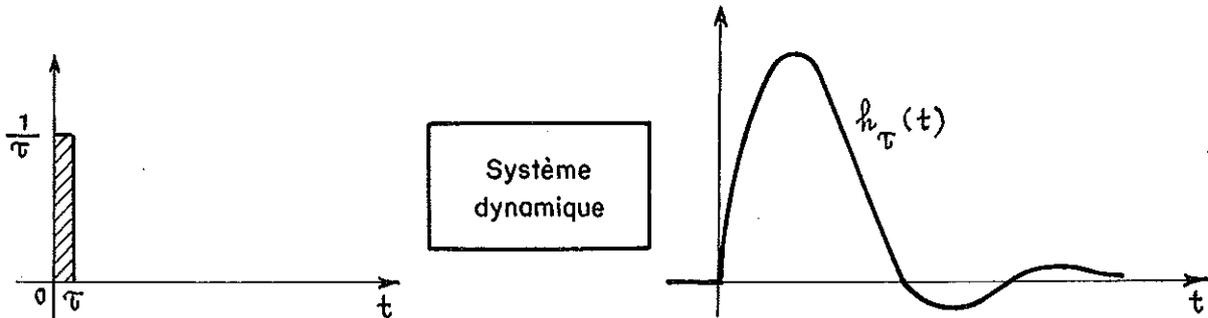
Decoupons e(t) comme l'indique le schema ci-apres.



La $n^{\text{ième}}$ impulsion isolée et excitant le système conduit à la sortie $\tau e(n\tau) h_{\tau}(t - n\tau)$



où $h_{\tau}(t)$ est la réponse du système à l'impulsion de surface unité placée à l'origine $t = 0$.



Ces relations sont justifiées par la linéarité et l'invariance du système.

A l'instant $t = n\tau$, la sortie du système au signal $e(t)$ est approchée par la somme des réponses partielles relatives aux n impulsions appliquées entre $t = 0$ et $t = n\tau$ soit

$$s(t) \simeq \sum_{k=0}^n \tau e(k\tau) h_{\tau}(t - k\tau)$$

Les systèmes physiques ne réagissent à une cause qu'après apparition de celle-ci. De tels systèmes sont dits causaux. Il est alors naturel dans la formule ci-dessus de tronquer la sommation à n .

Si τ tend vers zéro, l'impulsion de largeur τ et de hauteur $\frac{1}{\tau}$ placée à l'origine, tend vers l'impulsion de Dirac. La réponse $h_{\tau}(t)$ tend vers la

réponse impulsionnelle du système notée $h(t)$ ($h(t)=0$ pour $t < 0$).

On obtient alors pour $s(t)$ l'expression :

$$s(t) = \int_0^t e(\theta) h(t-\theta) d\theta$$

Puisque $e(t)$ et $h(t)$ sont causaux, on a l'expression équivalente :

$$s(t) = \int_0^t h(\theta) e(t-\theta) d\theta = h(t) * e(t)$$

produit de convolution de deux fonctions causales.

Dans le cas où l'entrée n'est pas causale, la sortie s'exprime par :

$$s(t) = \int_{-\infty}^t e(\theta) h(t-\theta) d\theta \quad \text{ou} \quad s(t) = \int_0^{\infty} h(\theta) e(t-\theta) d\theta$$

Toutes ces formules ne sont justifiées que si $e(t)$ est borné et si $\int_0^{\infty} |h(\theta)| d\theta$ existe (système dit stable : réponse impulsionnelle absolument intégrable).

II.4.2. - Représentation par transmittance -

On dira qu'un système est au repos à l'instant t_0 si $s(t)$ et toutes ses dérivées sont nulles pour $t = t_0$.

Prenons un système au repos à l'origine. Alors

$$s(t) = \int_0^t h(\theta) e(t-\theta) d\theta = \int_0^{\infty} h(\theta) e(t-\theta) d\theta \quad \text{car } e(t-\theta) = 0 \quad \text{pour } \theta > t$$

Par transformation de Laplace on obtient

$$\begin{aligned} S(p) &= \mathcal{L}(s(t)) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\theta) e(t-\theta) e^{-pt} d\theta dt \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\theta) e(t-\theta) e^{-p(t-\theta)} e^{-p\theta} d\theta dt \\ &= \underbrace{\int_0^{\infty} h(\theta) e^{-p\theta} d\theta}_{H(p)} \underbrace{\int_0^{\infty} e(t-\theta) e^{-p(t-\theta)} d(t-\theta)}_{E(p)} \end{aligned}$$

d'où la relation

$$S(p) = H(p) \cdot E(p)$$

$H(p)$, transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle, s'appelle transmittance du système.

Si le système est stable, $H(p)$ est une fonction holomorphe dans le demi plan droit y compris l'axe imaginaire.

II.4.3. - Représentation par équations différentielles -

On représente classiquement l'évolution d'un système dynamique par une équation différentielle à coefficients constants liant les grandeurs d'entrée-sortie.

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + \dots + a_0 s = b_0 e + \dots + b_m \frac{de^m}{dt^m}$$

La réalisabilité physique impose d'avoir $m \leq n$. n est appelé l'ordre du système.

Partant de conditions initiales nulles (système au repos à l'origine), par transformation de Laplace, l'équation ci-dessus devient :

$$a_n p^n S(p) + \dots + a_0 S(p) = b_0 E(p) + \dots + b_m p^m E(p)$$

soit encore :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{j=0}^n a_j p^j} = H(p)$$

La transmittance s'exprime donc simplement par le rapport de deux polynômes en p construits à partir des coefficients de l'équation différentielle.

Condition de stabilité : pôles de $H(p)$ dans le demi plan de gauche à l'exclusion de l'axe imaginaire.

Si, au voisinage de $p=0$, $H(p)$ se comporte comme $\frac{K}{p^\alpha}$, α est appelé classe du système. Si $\alpha=0$, K est appelé gain statique.

II.4.4. - Analyse harmonique -

Dans cette représentation, le signal d'entrée est un signal sinusoïdal de pulsation ω .

$$e(t) = E_0 \sin \omega t = E_0 \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

$$s(t) = E_0 \int_0^t \frac{e^{j\omega(t-\theta)} - e^{-j\omega(t-\theta)}}{2j} h(\theta) d\theta$$

$$= \frac{E_0}{2j} \left[e^{j\omega t} \times \int_0^t e^{-j\omega\theta} h(\theta) d\theta - e^{-j\omega t} \times \int_0^t e^{j\omega\theta} h(\theta) d\theta \right]$$

Lorsque $t \rightarrow \infty$ $\int_0^t e^{-j\omega\theta} h(\theta) d\theta \rightarrow H(j\omega) = H(j\omega)_{t=\infty}$

$$\int_0^t e^{+j\omega\theta} h(\theta) d\theta \rightarrow H(-j\omega)$$

$$s(t) \rightarrow \frac{E_0}{2j} \left[e^{j\omega t} H(j\omega) - e^{-j\omega t} H(-j\omega) \right]$$

$$H(-j\omega) = \overline{H(j\omega)} \quad (\text{complexe conjugué})$$

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad H(-j\omega) = |H(j\omega)| e^{-j\varphi(\omega)}$$

$$s(t) \neq \frac{E_0}{2j} \left[e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} - e^{-j(\omega t + \varphi(\omega))} \right] |H(j\omega)|$$

$$s(t) \neq E_0 |H(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

Ces diverses relations n'ont de sens que si le système est stable.

On remarque qu'à l'infini la sortie du système est sinusoïdale d'amplitude $E_0 |H(j\omega)|$ et déphasée par rapport à $e(t)$ de $\varphi(\omega) = \angle H(j\omega)$.

II.4.5. - Analyse transitoire - Analyse harmonique -

- (a) L'analyse transitoire consiste à déterminer la réponse impulsionnelle par application d'une impulsion ou d'un échelon.

En effet si $e(t) = Y(t)$

$$\begin{aligned} &= 1 \quad \text{si } t > 0 \\ &= 0 \quad \text{si } t < 0 \end{aligned}$$

$$s(t) = \int_0^t h(\theta) \underbrace{e(t-\theta)}_{=1} d\theta = \int_0^t h(\theta) d\theta$$

La réponse indicielle (à un échelon) apparaît donc comme l'intégrale de la réponse impulsionnelle.

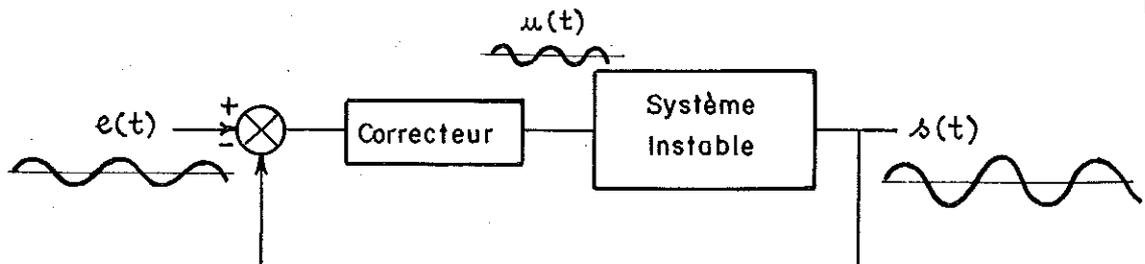
Se donner $h(t)$ ou $\int_0^t h(\theta) d\theta$ revient à se donner $H(p) = \mathcal{L}(h(t))$.

- (b) L'analyse harmonique consiste à relever pour tout ω , $|H(j\omega)|$ et $\angle H(j\omega) = \varphi(\omega)$. Rappelons que ce relevé ne peut être fait que dans le cas des systèmes stables. On sait de plus que $H(j\omega) = H(p)$ pour $p = j\omega$. Il y a donc équivalence entre analyse harmonique et analyse transitoire. Ceci peut se comprendre en remarquant que le spectre de l'impulsion de Dirac est égal à 1 pour toutes les pulsations ω . L'impulsion de Dirac est donc équivalente à une infinité de "signaux sinusoïdaux".

- (c) Analyse harmonique des systèmes instables.

Comme nous l'avons vu précédemment, l'analyse harmonique des systèmes instables est impossible directement car la sortie diverge.

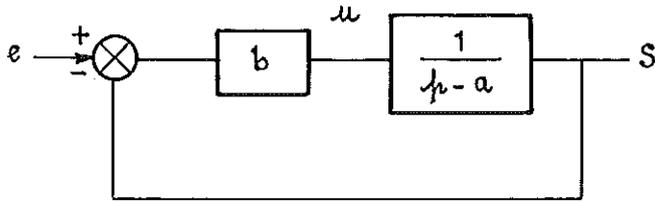
Par contre, il est possible d'éviter la divergence si les conditions initiales sont judicieusement choisies. Ceci peut être obtenu automatiquement en introduisant un bouclage convenable du type suivant :



En mesurant $u(t)$ et $s(t)$ on peut définir $H(j\omega)$. On montre que $H(j\omega) = H(p)_{p=j\omega}$ ce qui n'était pas évident a priori.

Ex : Considérons le système de transmittance $\frac{1}{p-a}$ avec $a > 0$.

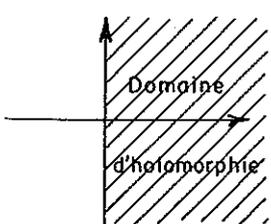
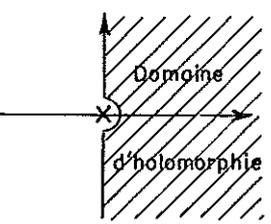
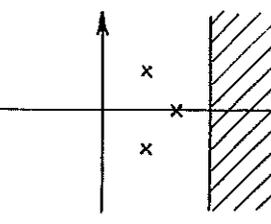
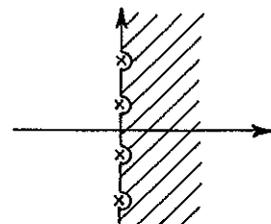
Ce système est instable (pôle à droite du plan complexe). Il peut cependant être analysé harmoniquement en l'introduisant dans la boucle suivante :



avec $b > a > 0$

on trouve alors
$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega - a}$$

ⓐ En résumé

$h(t)$	$H(p)$	$H(j\omega)$
$\int_0^{\infty} h(\theta) d\theta$ existe	$H(p)$ à ses pôles à gauche 	$H(j\omega)$ existe analyse directe possible $H(j\omega) = H(p)$ $p = j\omega$
$ h(\theta) \simeq \theta^{n-1} qd$ $\theta \rightarrow \infty$ (classe n)	$H(p)$ a un pôle d'ordre n à l'origine 	Analyse harmonique impossible directement
$ h(\theta) \simeq e^{k\theta} qd$ $\theta \rightarrow \infty$ $k > 0$	$H(p)$ a des pôles à droite de l'axe imaginaire 	(sauf pour un pôle simple en 0). Si on peut introduire le système dans un <u>bouclage stable</u> , l'analyse est possible et l'on a
$ h(\theta) \simeq e^{j\omega\theta} qd$ $\theta \rightarrow \infty$	$H(p)$ a des pôles complexes conjugués sur l'axe imaginaire 	$H(j\omega) = H(p)$ $p = j\omega$

Chapitre III

IDENTIFICATION - REPONSES TRANSISTOIRES ET HARMONIQUES - DIAGRAMMES

Identifier un système physique stable, c'est déterminer une représentation parmi celles décrites précédemment.

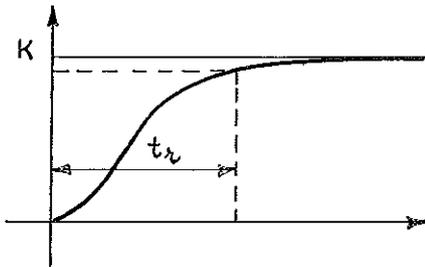
On procède en général à deux étapes :

- écriture des lois physiques régissant l'évolution du système
- détermination expérimentale des paramètres intervenant dans la structure précédente à partir des réponses transitoires et harmoniques.

III.1. - REPONSES TRANSITOIRES TYPIQUES -

III.1.1. - Définitions générales relatives à la réponse indicielle -

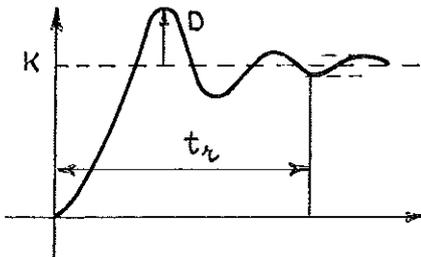
(a) temps de réponse



On définit le temps de réponse t_r à 5 % comme le temps à partir duquel

$$\frac{|s(t) - K|}{K} < 5\%$$

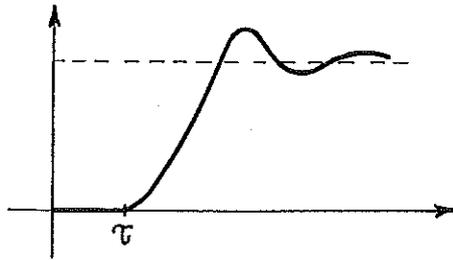
(b) Dépassement



Le dépassement est égal au rapport $\frac{D}{K}$. On l'exprime en % de K.

Une réponse indicielle sans dépassement sera dite apériodique.

③ Système retardé



l'influence de l'entrée dans un système retardé ne se fait sentir qu'après un temps τ appelé retard pur.

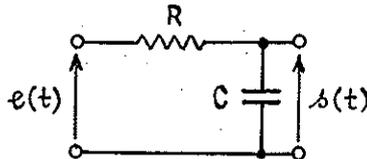
Les systèmes retardés ont dans leur transmittance un terme $e^{-\tau p}$ en facteur au numérateur.

III.1.2. - Systèmes du premier ordre -

① 1er ordre simple

$$H(p) = \frac{K}{1 + T p}$$

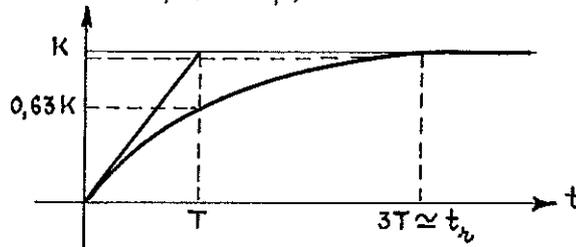
exemple



$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + RC p}$$

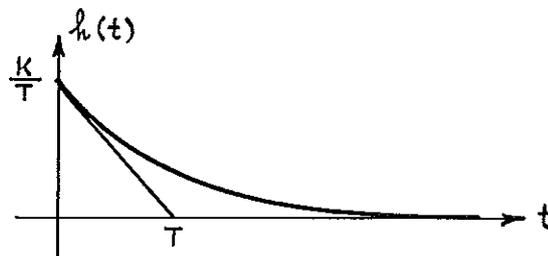
- réponse indicielle (échelon unité)

$$S(p) = \frac{K}{p(1 + T p)} \implies s(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$



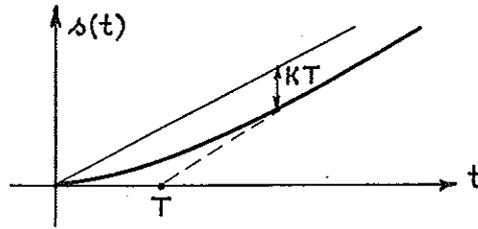
- réponse impulsionnelle

$$H(p) = \frac{K}{(1 + T p)} \quad h(t) = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$



- réponse à une rampe

$$S(j\omega) = \frac{K}{j\omega^2(1+Tj\omega)} \quad \Rightarrow \quad s(t) = K(t-T) + KTe^{-\frac{t}{T}}$$



On remarquera que

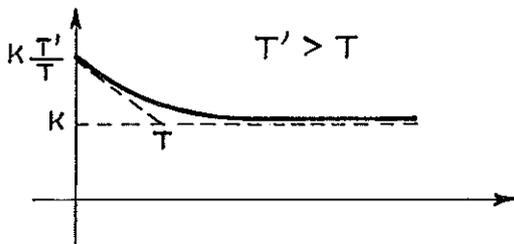
- la réponse indicielle est l'intégrale de la réponse impulsionnelle
- la réponse à une rampe est l'intégrale de la réponse indicielle.

(b) 1er ordre avec zéro

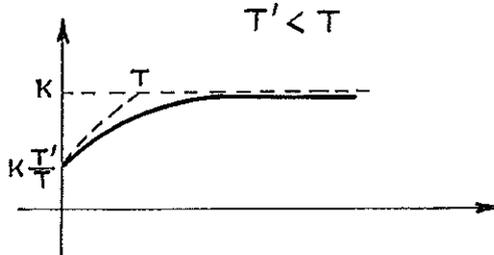
$$\begin{aligned} H(j\omega) &= K \frac{1+T'j\omega}{1+Tj\omega} \\ &= K \frac{T'}{T} + K \frac{T-T'}{T} \times \frac{1}{1+Tj\omega} \end{aligned}$$

La réponse indicielle s'écrit alors

$$s(t) = K \frac{T'}{T} + K \frac{T-T'}{T} \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$



Circuit à avance de phase



Circuit à retard de phase

III.1.3. - Système du second ordre

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + 2 \frac{\xi}{\omega_0} j\omega + \frac{j\omega^2}{\omega_0^2}}$$

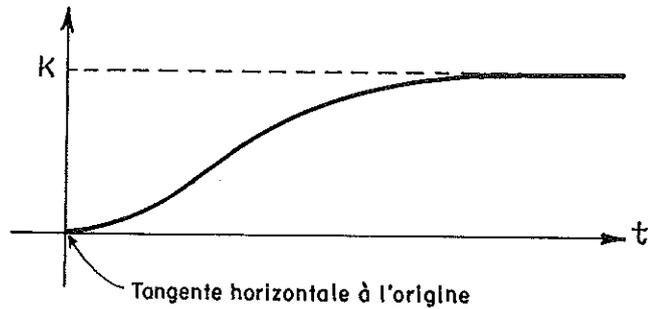
$$\omega_0 = \frac{1}{T_0} \quad \text{pulsation propre}$$

ξ = coefficient d'amortissement

- (a) $\xi > 1$ le dénominateur a deux racines réelles. On obtient pour réponse à un échelon unité :

$$s(t) = K \left[1 - \frac{1}{2} \left((1-a) e^{-\frac{(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})t}{T_0}} + (1+a) e^{-\frac{(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})t}{T_0}} \right) \right]$$

avec $a = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}$



Si $\xi \gg 1$ l'une des racines l'emporte nettement sur l'autre et l'on a :

$$s(t) \simeq K \left(1 - e^{-t/2\xi T_0} \right)$$

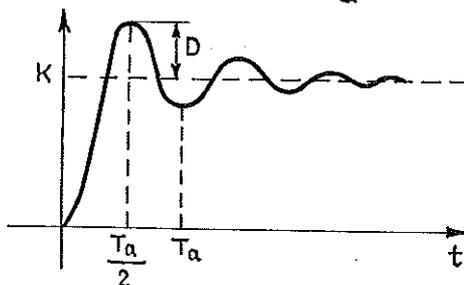
- (b) $\xi = 1$ régime critique : les deux racines du dénominateur de $H(p)$ sont réelles et confondues. Réponse à un échelon unité :

$$s(t) = K \left[1 - \left(1 + \frac{t}{T_0} \right) e^{-\frac{t}{T_0}} \right]$$

- (c) $\xi < 1$ régime oscillant : les deux pôles de $H(p)$ sont complexes conjugués.

Réponse indicielle :

$$s(t) = K \left[1 - \frac{e^{-\xi \omega_0 t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cos \left(\omega_0 t \sqrt{1 - \xi^2} - \alpha \right) \right]$$



où $\text{tg } \alpha = \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}$

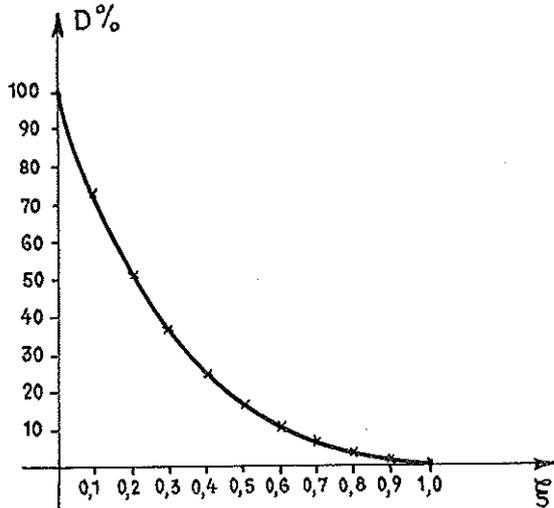
avec $T_a = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$ pseudo période, l'instant du premier maximum est

$$t_m = \frac{T_a}{2} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$$

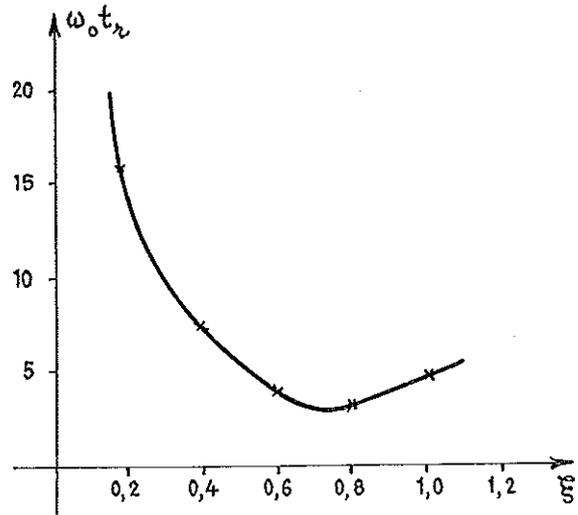
Le dépassement a pour expression $D = e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$.

En particulier pour $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0,7$ $D \simeq 5\%$ (amortissement dit "optimal").

Les courbes jointes donnent le dépassement et le terme $\omega_0 t_r$ (t_r à 5%) en fonction de l'amortissement ξ .



Dépassement en régime indiciel pour un système du second ordre, en fonction de l'amortissement.



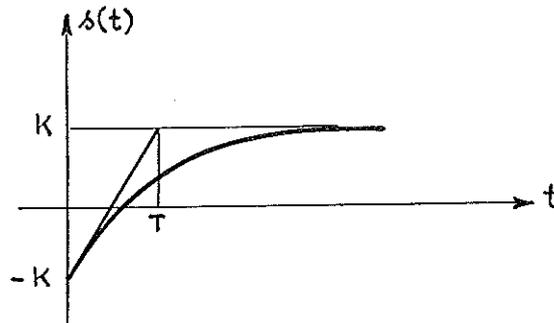
Temps de réponse à 5% en régime indiciel, en fonction du coefficient d'amortissement.

III.1.4. - Systèmes à déphasage non minimal -

On appelle ainsi des systèmes dont la transmittance contient des termes de la forme $K \frac{1-T/v}{1+T/v}$.

La réponse indicielle d'un tel élément est alors :

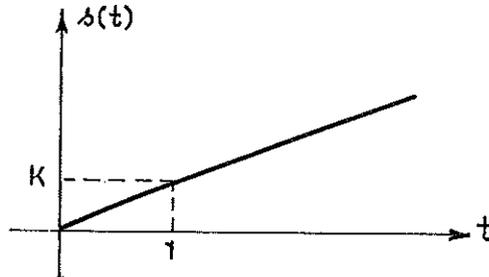
$$s(t) = K \left[1 - 2e^{-\frac{t}{T}} \right]$$



III.1.5. - Systèmes instables (avec pôles à l'origine).

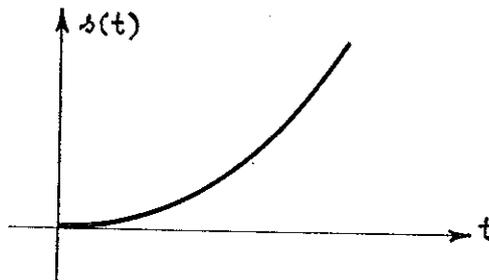
(a) Intégrateur pur $H(p) = \frac{K}{p}$

Réponse indicielle $s(t) = Kt$



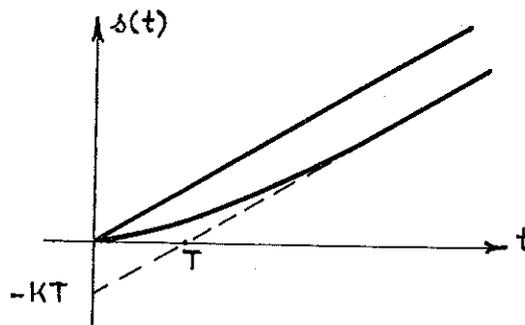
(b) Intégrateur double $H(p) = \frac{K}{p^2}$

Réponse indicielle $s(t) = K \frac{t^2}{2}$



(c) Intégrateur + constante de temps $H(p) = \frac{K}{p(1+Tp)}$

Réponse indicielle $s(t) = K(t-T) + KTe^{-\frac{t}{T}}$



III.2. - IDENTIFICATION PARAMETRIQUE -

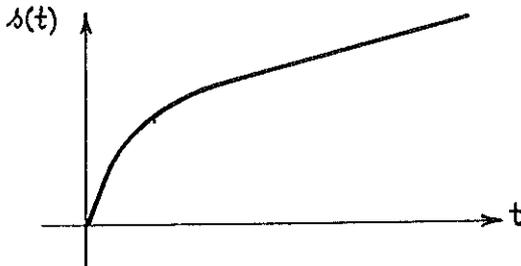
III.2.1. - Généralités -

Dans la pratique, connaissant l'allure de la réponse indicielle d'un système, on désirera obtenir la forme mathématique de la transmittance. Pour cela

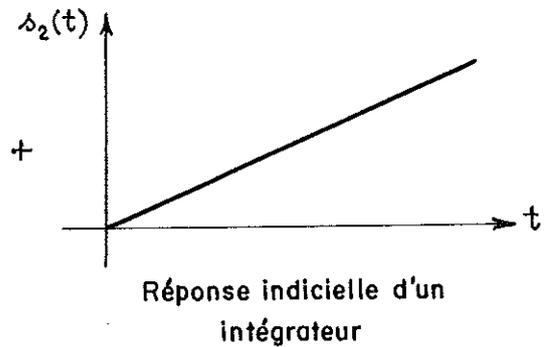
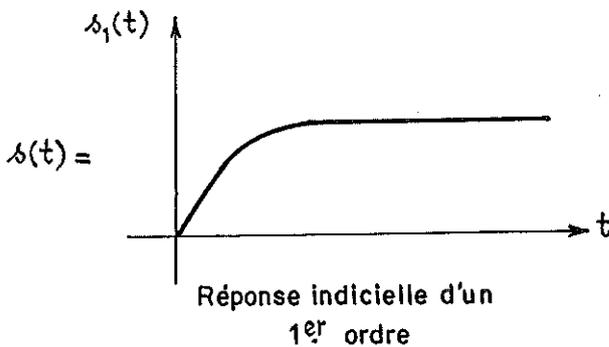
on cherchera à se rapprocher des formes définies précédemment en groupant des blocs élémentaires sous forme parallèle ou cascade.

Exemple :

Soit à identifier la réponse indicielle suivante :



On peut remarquer que pour t suffisamment grand le système est intégrateur. La décomposition suivante vient naturellement à l'esprit :



d'où la structure parallèle suivante :

$$H(p) = \frac{K}{1+Tp} + \frac{K'}{p}$$

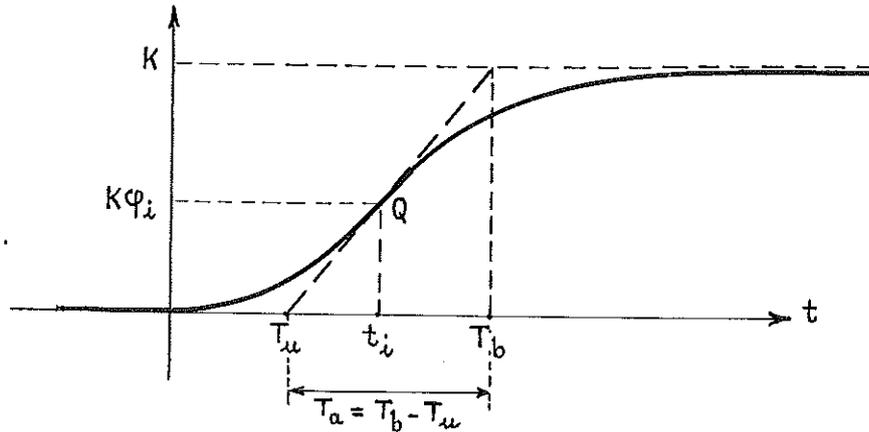
III.2.2. - Méthode de Strejc -

Soit un système présentant une réponse indicielle du type apériodique (exemple : processus thermiques). V. Strejc propose comme modèle d'un tel système la transmittance suivante :

$$H(p) = \frac{K e^{-\tau p}}{(1+Tp)^n}$$

Ce modèle est largement justifié lorsqu'un système a de multiples constantes proches les unes des autres.

Considérons la réponse indicielle du système à identifier.



On montre que $t_i = (n-1)T$ pour un système non retardé et que ϕ_i ne dépend que de n .

K s'identifie directement sur la réponse indicielle comme valeur finale.

n et T s'identifient en calculant le rapport $\frac{T_u}{T_a}$ et en le rapprochant des valeurs données dans le tableau ci-dessous :

↓

n	T_a/T	T_u/T	T_u/T_a
1	1	0	0
2	2,72	0,28	0,10
3	3,70	0,80	0,22
4	4,46	1,42	0,32
5	5,12	2,10	0,41
6	5,70	2,81	0,49
7	6,23	3,55	0,57

Il se peut que le rapport T_u/T_a ne corresponde pas exactement à une ligne du tableau. Dans ce cas, on prend la valeur immédiatement inférieure soit une ligne correspondant au rapport $(T_u/T_a)'$. La différence entre la valeur réelle de T_u/T_a et la valeur du tableau $(T_u/T_a)'$ va nous servir à déterminer un retard pur fictif τ' .

En effet, un retard pur effectif ne modifierait pas la valeur T_a mais seulement la valeur T_u .

On peut donc considérer que $(\frac{T_u}{T_a})' = \frac{T_u'}{T_a}$, et que $\frac{T_u}{T_a} = \frac{T_u' + \tau'}{T_a}$ puisque $(\frac{T_u}{T_a})' < \frac{T_u}{T_a}$ d'où $\tau' = T_u - T_u'$.

Il faut cependant bien noter que ce retard τ' ne traduit pas la réalité physique.

Lorsque le système présente un retard pur naturel τ , τ' vient se rajouter à τ .

La mesure de τ s'effectuera par l'écart séparant l'instant d'application de l'échelon et l'instant d'apparition de la réponse.

III.3. - REPONSES HARMONIQUES - DIAGRAMMES -

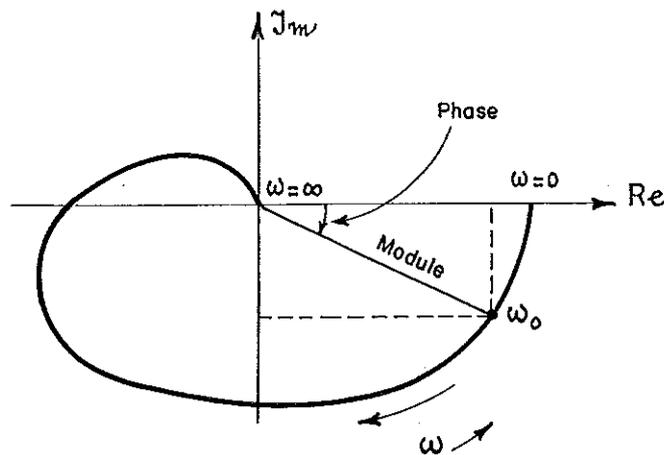
On appelle "diagramme" la représentation graphique de la réponse harmonique $H(j\omega)$.

III.3.1. - Les différents diagrammes -

(a) Diagramme de Nyquist -

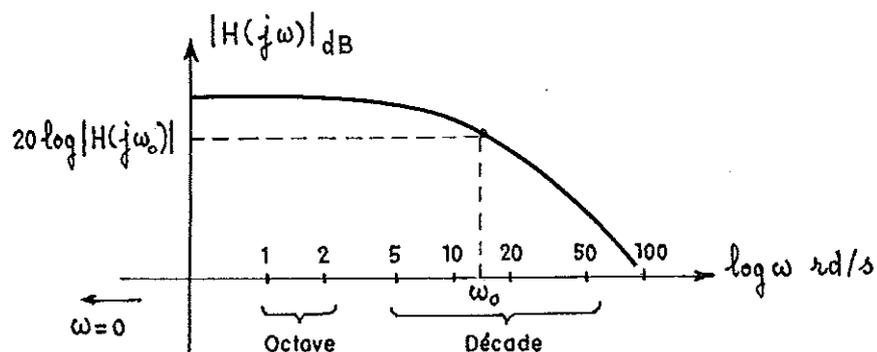
$$H(j\omega) = \text{Re}(j\omega) + j \text{Im}(j\omega)$$

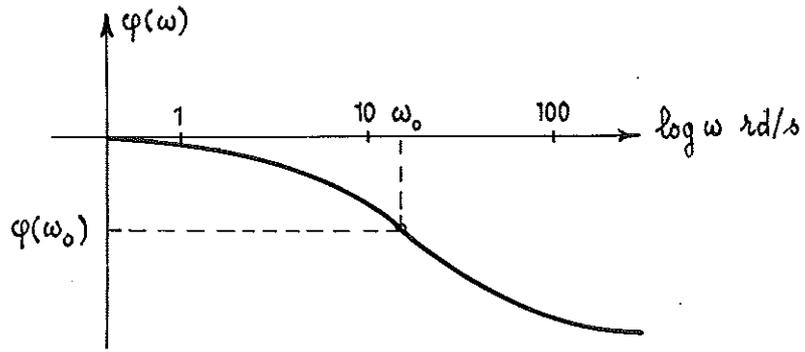
Dans le plan complexe, à ω donné, $H(j\omega)$ est représenté par un point. Lorsque ω varie ce point décrit une courbe que l'on gradue dans le sens des ω croissants.



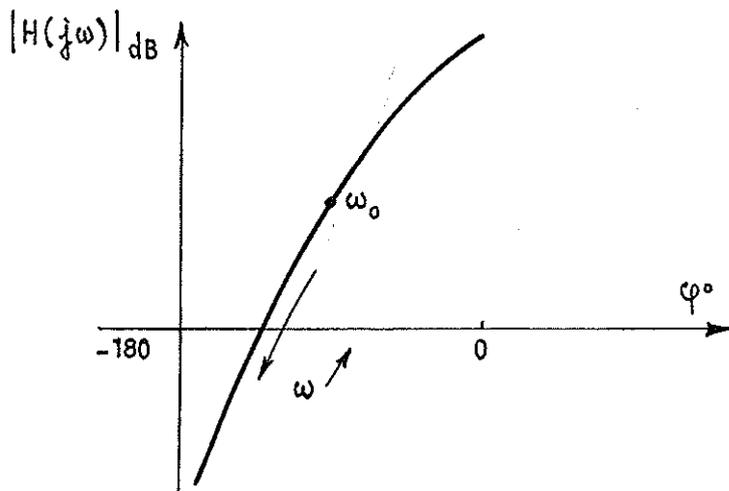
(b) Diagramme de Bode -

Deux tracés figurent dans ce diagramme $20 \log_{10} |H(j\omega)|$ et $\text{Arg } H(j\omega)$ en fonction de $\log_{10} \omega$. Le gain s'exprime alors en décibels (dB).





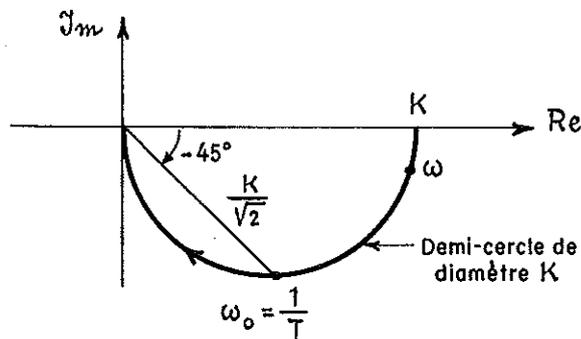
ⓐ Diagramme de Black-Nichols -



Cette courbe représente le module de $H(j\omega)$ en dB en fonction de la phase de $H(j\omega)$.

III.3.2. - Systèmes du premier ordre $H(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega T}$

ⓐ Nyquist



② Bode $|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$ $\text{Arg } H(j\omega) = -\text{Arc } \text{tg } \omega T$

Dans le plan de Bode on tracera donc

$20 \log \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$ et $-\text{Arc } \text{tg } \omega T$

La courbe de gain et de phase se construit de la manière suivante :

$\omega T \ll 1$	$\omega T \gg 1$
$20 \log H \simeq 20 \log K$	$20 \log H \simeq 20 \log \frac{K}{T\omega}$ $\simeq 20 \log \frac{K}{T} - 20 \log \omega$
$\angle H(j\omega) = 0$	$\angle H(j\omega) \simeq -\frac{\pi}{2}$

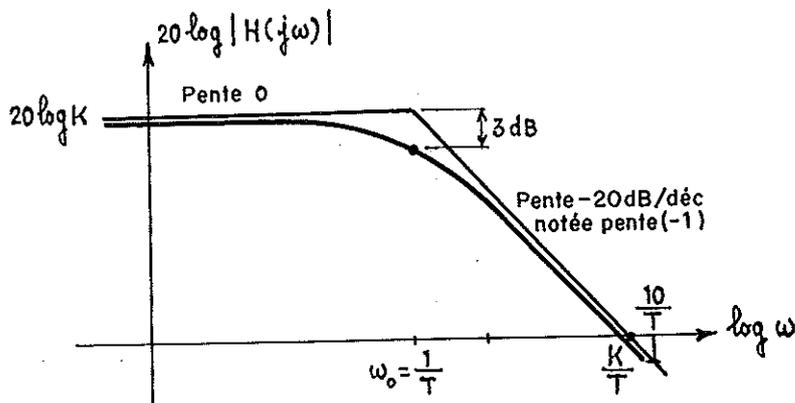
Ces valeurs servent à construire le tracé asymptotique de Bode :

Gain : 2 demi-droites de pente 0 et - 20 dB/déc

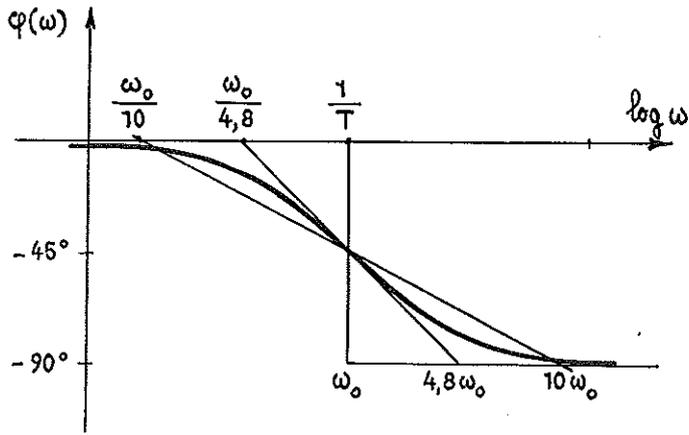
Phase : 2 asymptotes à 0 et $-\frac{\pi}{2}$

Les courbes réelles passent par les points suivants :

ω	$\omega_0/16$	$\omega_0/8$	$\omega_0/4$	$\omega_0/2$	ω_0	$2\omega_0$	$4\omega_0$	$8\omega_0$	$16\omega_0$
φ	$-3^\circ,5$	-7°	-14°	$-26^\circ,5$	-45°	$-63^\circ,5$	-76°	-83°	$-86^\circ,5$
$\frac{ H_{\text{réel}} }{ H_{\text{asymptotique}} }$	$\sim 0 \text{ dB}$		-1 dB	-3 dB	-1 dB	$\sim 0 \text{ dB}$			



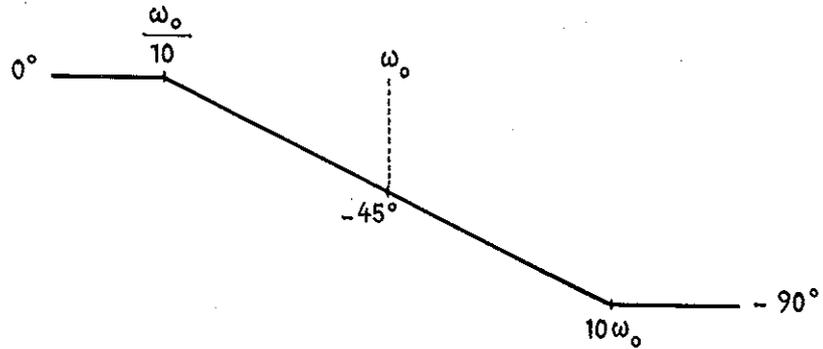
La courbe de gain est en général bien approximée par le tracé asymptotique.



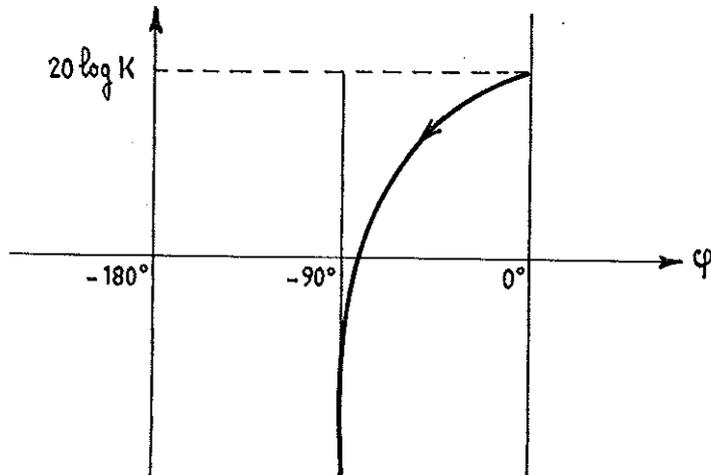
Le tracé de la phase est symétrique par rapport au point $\omega_0 = \frac{1}{T}$ et $\varphi = -45^\circ$.

La tangente au point de symétrie coupe l'asymptote 0° à $\omega = \frac{\omega_0}{4,8}$, et, par symétrie, l'asymptote -90° à $\omega = 4,8 \omega_0$.

La courbe de phase peut-être globalement approximée par le tracé suivant:



© Black-Nichols -



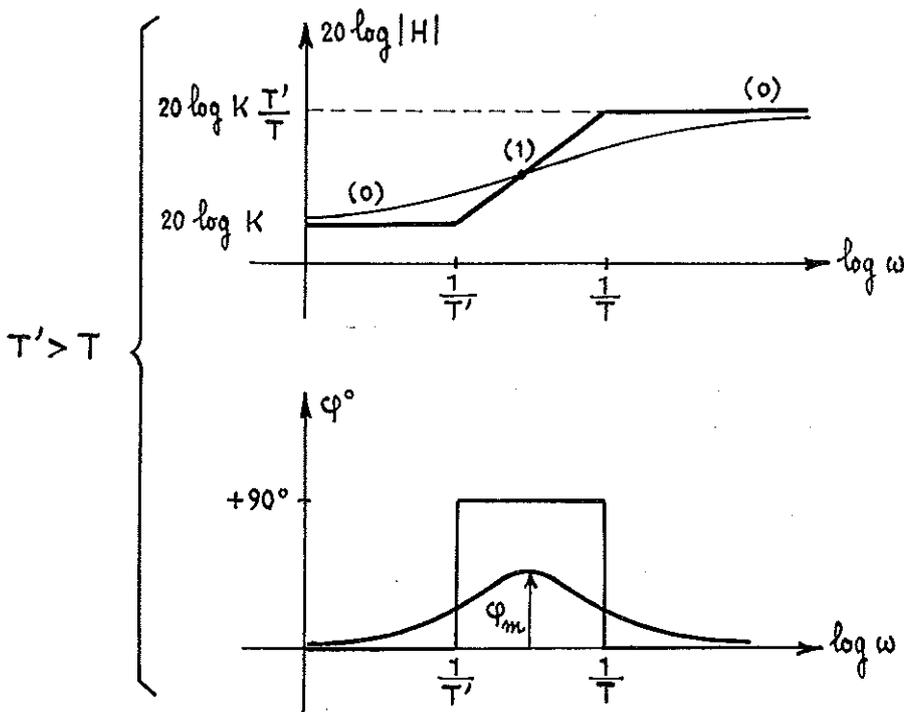
III.3.3. - Premier ordre avec zéro

$$H(j\omega) = K \frac{1 + j\omega T'}{1 + j\omega T}$$

(a) Bode

Construction asymptotique

	$\omega \ll 1/T' < 1/T$	$1/T' < \omega < 1/T$	$1/T' < 1/T \ll \omega$
$T' > T$	$20 \log H = 20 \log K$ $\varphi = 0^\circ$	$20 \log H = 20 \log K$ $+ 20 \log \omega T'$ $\varphi = +90^\circ$	$20 \log H = 20 \log K$ $+ 20 \log \omega T'$ $- 20 \log \omega T$ $\varphi = 0^\circ$
	$\omega \ll 1/T < 1/T'$	$1/T < \omega < 1/T'$	$1/T < 1/T' \ll \omega$
$T' < T$	$20 \log H = 20 \log K$ $\varphi = 0^\circ$	$20 \log H = 20 \log K$ $- 20 \log \omega T$ $\varphi = -90^\circ$	$20 \log H = 20 \log K$ $- 20 \log \omega T$ $+ 20 \log \omega T'$ $\varphi = 0^\circ$

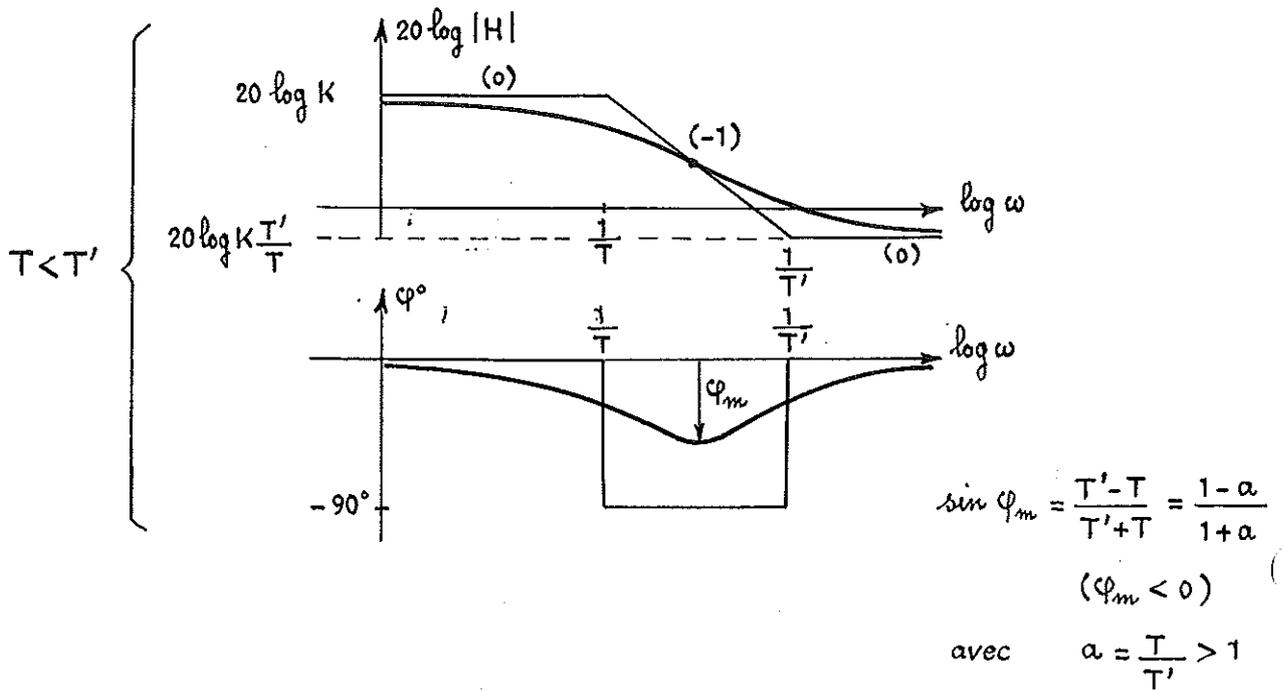


φ_m est obtenue
à $\omega = \frac{1}{\sqrt{TT'}}$ et est telle

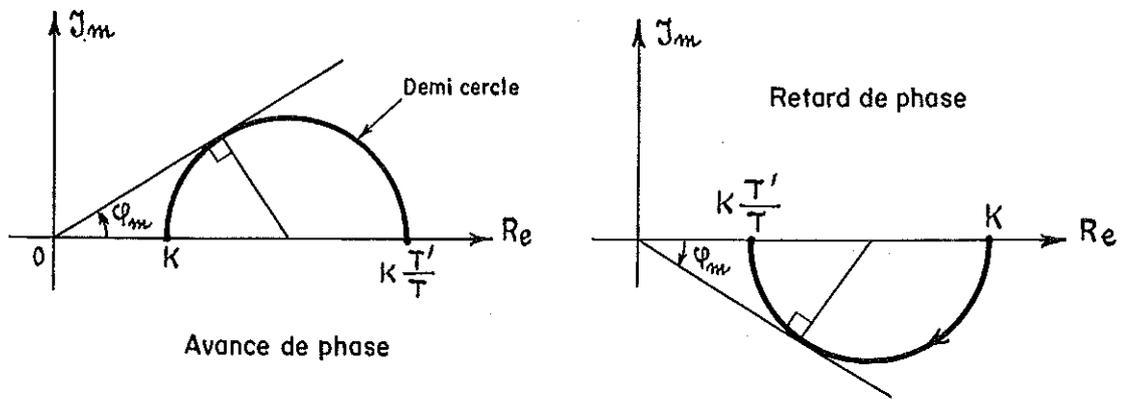
que $\sin \varphi_m = \frac{T' - T}{T' + T} = \frac{1 - a}{1 + a}$

avec

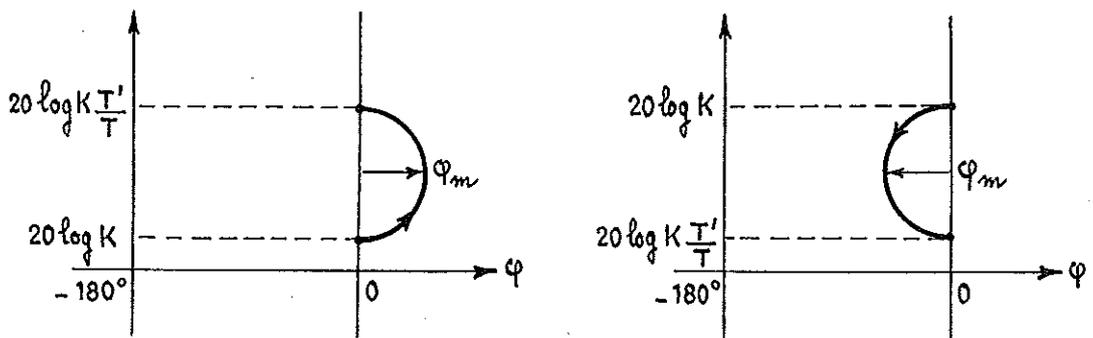
$$a = \frac{T}{T'} < 1$$



(b) Nyquist



(c) Black Nichols

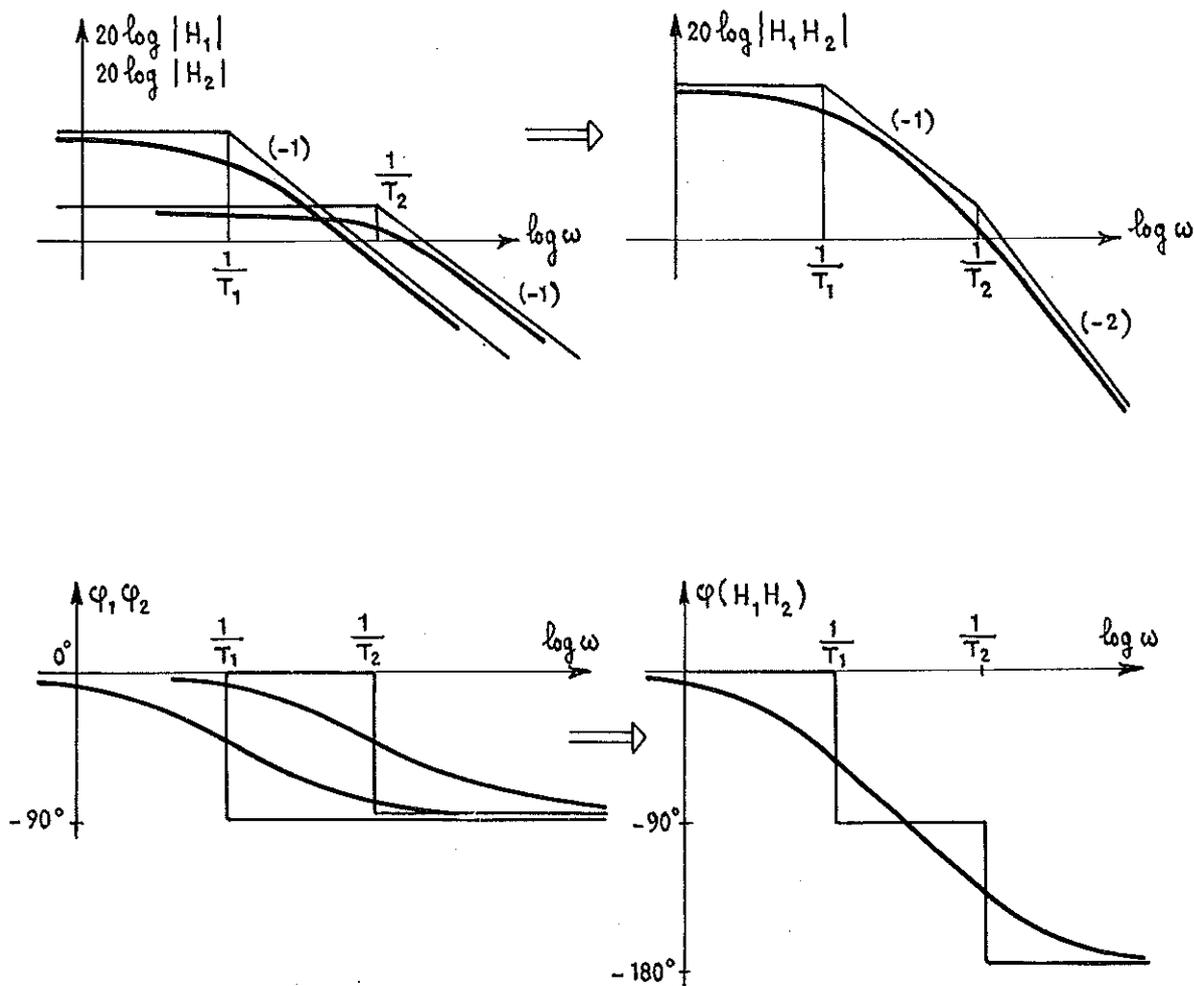


III.3.4. - Système du second ordre

$$H(j\omega) = \frac{K}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + 2j \frac{\omega}{\omega_0} \zeta}$$

(a) $\zeta \geq 1$

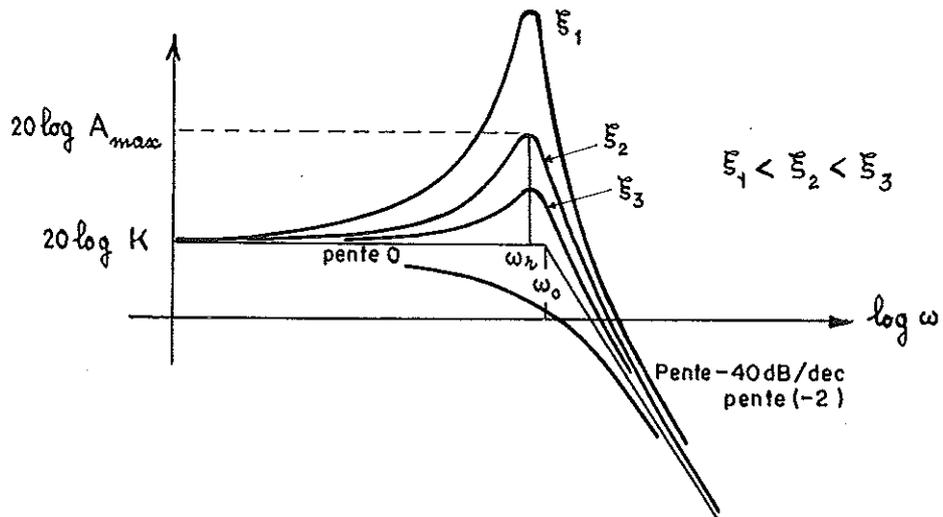
Nous avons vu qu'alors le système était la mise en cascade de deux systèmes du premier ordre. Le tracé asymptotique se construit en ajoutant les tracés des deux systèmes construits séparément.



(b) $\zeta < 1$

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

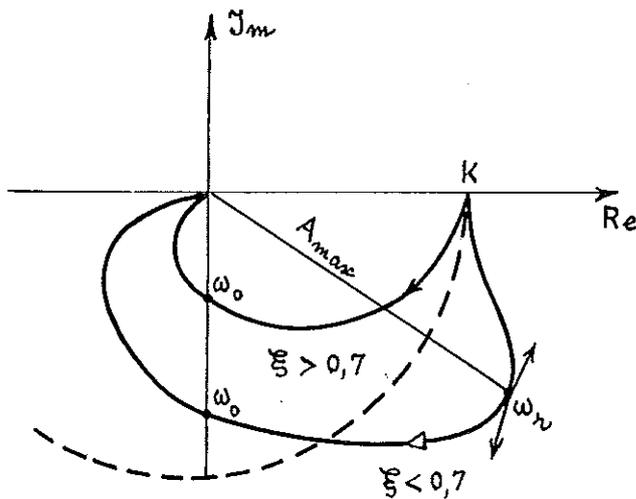
l'allure des courbes en fonction de ζ est la suivante :



$$\left. \begin{aligned} \omega_r &= \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} \\ A_{max} &= \frac{K}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}} \end{aligned} \right\} \text{ pour } \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

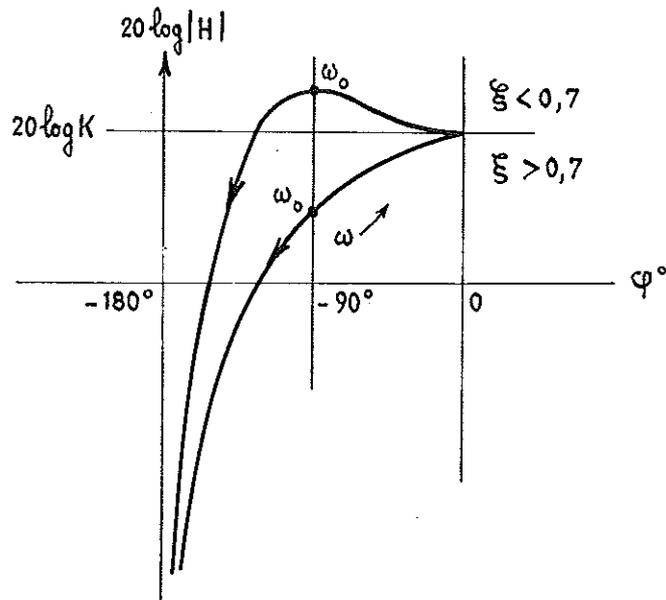
Un tracé précis des courbes de gains et phase est donné en Annexe II.

© Nyquist



Le cercle (en pointillé) de rayon K délimite la zone où il y a surtension ($\xi < 0,7$).

(d) Black-Nichols



III.3.5. - Systèmes retardés

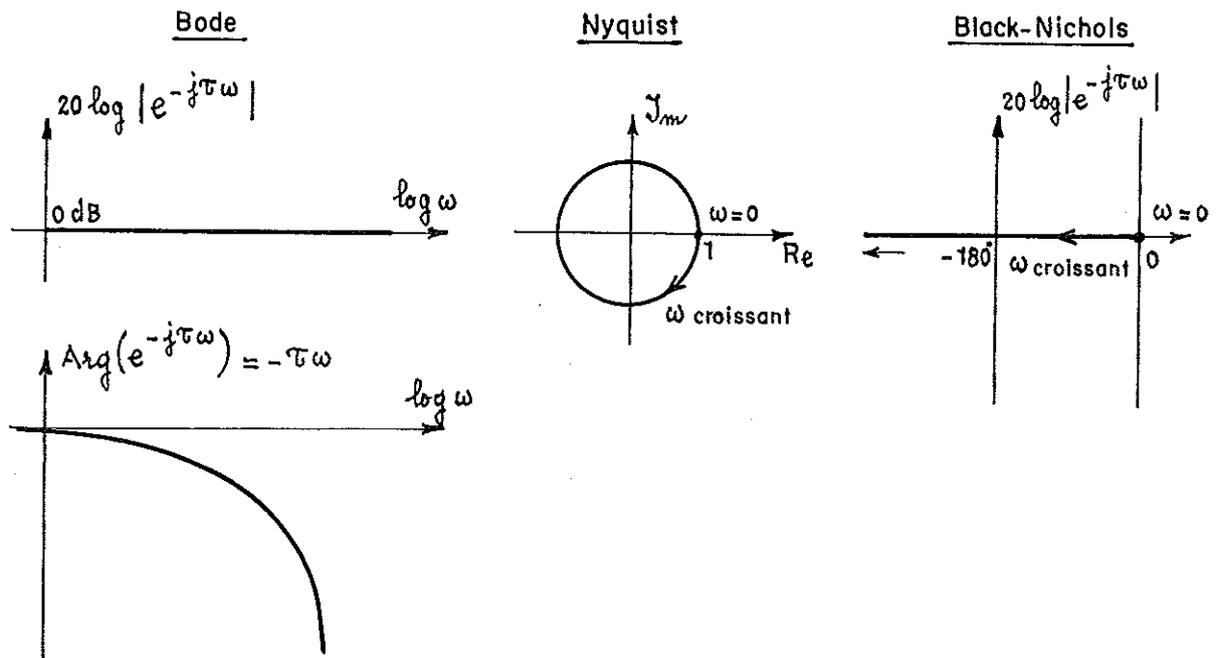
$$H(j\omega) = e^{-\tau j\omega} \times \underbrace{H_1(j\omega)}_{\text{non retardé}}$$

$$|H(j\omega)| = \underbrace{|e^{-\tau j\omega}|}_{=1} \cdot |H_1(j\omega)|$$

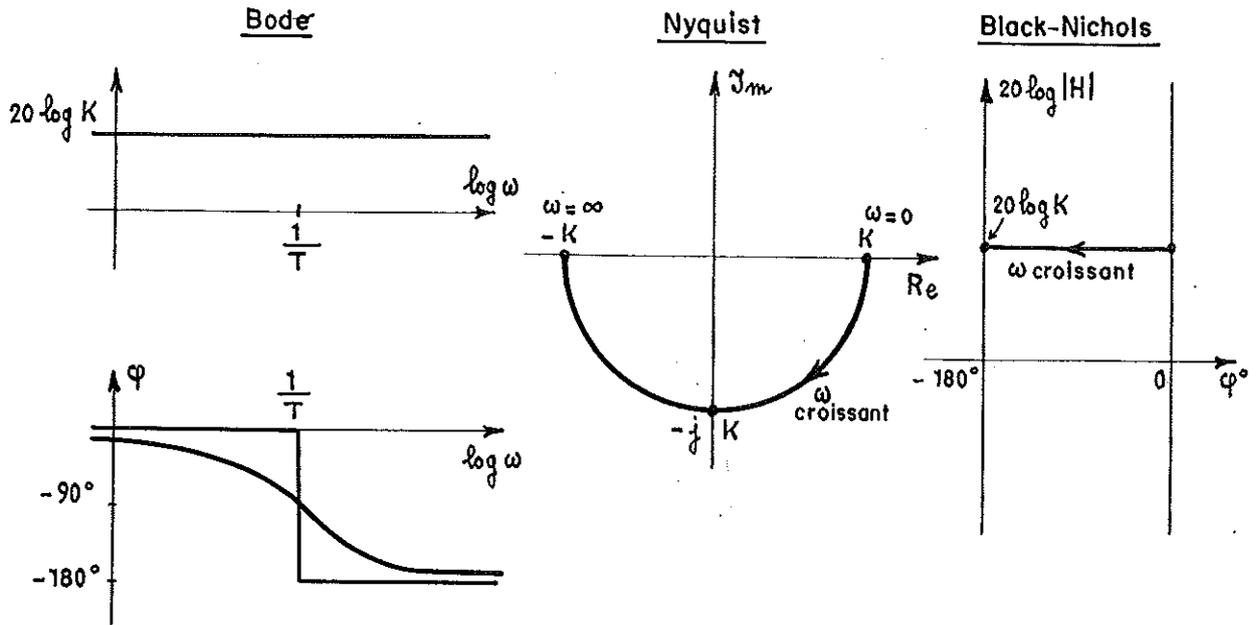
Le module de $H(j\omega)$ n'est pas affecté par la présence du retard pur.

$$\text{Arg } H(j\omega) = -j\tau\omega + \text{Arg } H_1(j\omega)$$

Par contre, la phase de $H(j\omega)$ est la somme de la phase de $H_1(j\omega)$ et d'une phase variant linéairement avec la pulsation :



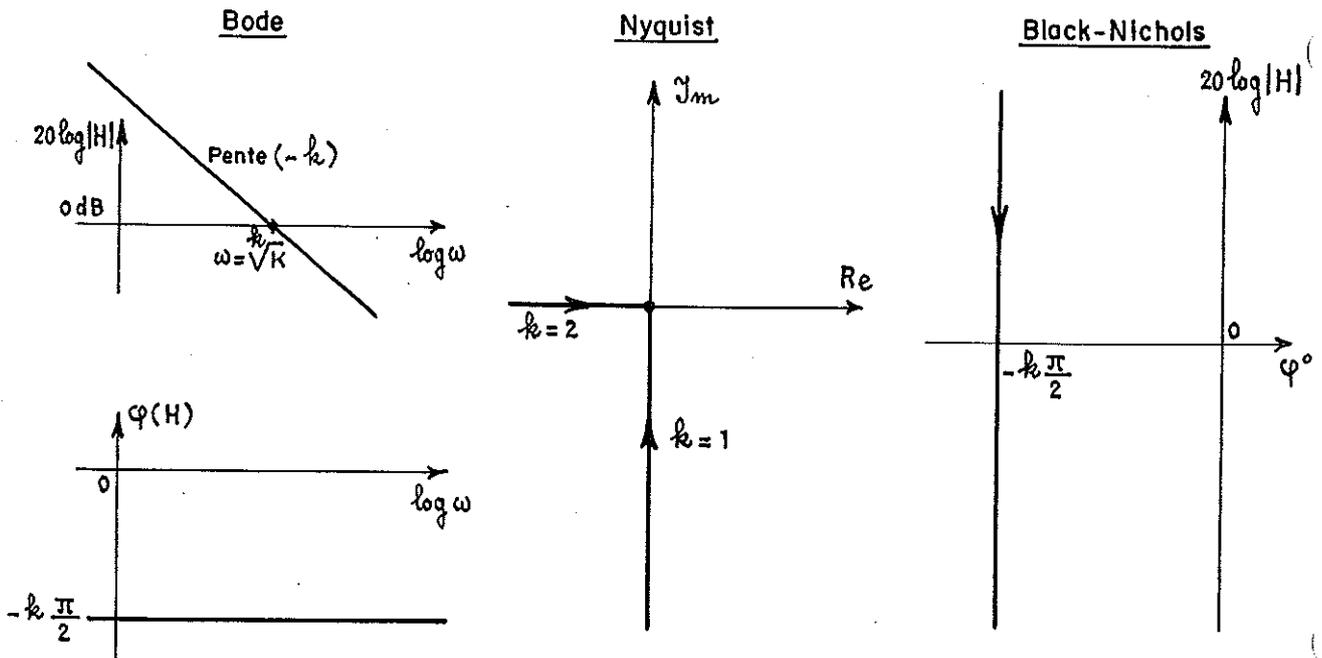
III.3.6. - Systèmes à déphasage non minimal $H(j\omega) = K \frac{1 - jT\omega}{1 + jT\omega}$



III.3.7. - Systèmes instables -

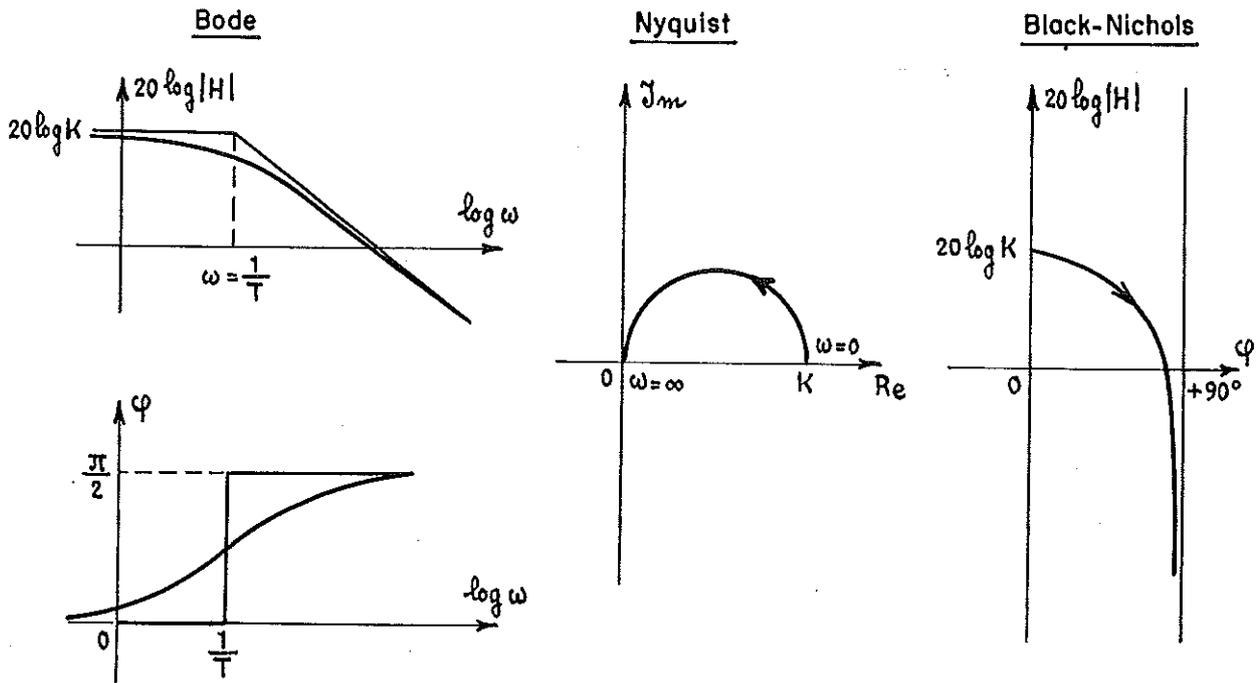
Rappelons que l'analyse harmonique directe est impossible dans ce cas. Il est nécessaire de stabiliser le système par un bouclage convenable. Envisageons deux cas de systèmes instables.

(a) $H(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^k}$ intégrateur multiple



(b)

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 - jT\omega}$$



III.3.8. - Cas général : construction dans le plan de Bode -

Soit une transmittance de la forme

$$H(p) = e^{-\tau p} \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{d_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n}$$

(a) Ecrire la transmittance sous la forme :

$$H(p) = e^{-\tau p} \cdot \frac{K}{p^k} \cdot \frac{1 + \beta_1 p + \dots + \beta_m p^m}{1 + \alpha_1 p + \dots + \alpha_n p^n}$$

puis factoriser les numérateur et dénominateur pour obtenir :

$$H(p) = e^{-\tau p} \frac{K}{p^k} \frac{(1 + T'_1 p)(1 + T'_2 p) \dots (1 + T'_m p)}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p) \dots (1 + T_n p)}$$

sans préjuger de la nature réelle des racines. On groupe ensuite les racines complexes conjuguées.

$H(p)$ apparaît comme la mise en cascade d'un retard pur, d'éléments du premier et du second ordre, et d'intégrateur multiple.

(b) Ordonner ensuite les T_i et T'_i suivant l'ordre décroissant. Les brisures du tracé asymptotique correspondront alors aux valeurs $\frac{1}{T_i}$ ou $\frac{1}{T'_i}$.

(c) Construire $\frac{K}{p^k}$ puis successivement en avançant vers les ω croissants, faire intervenir les pôles et zéros selon l'ordre précédemment

défini en utilisant les constructions asymptotiques.

- (d) Affiner le tracé asymptotique en combinant les courbes réelles et ajouter le retard pur à la phase.

Exemple :

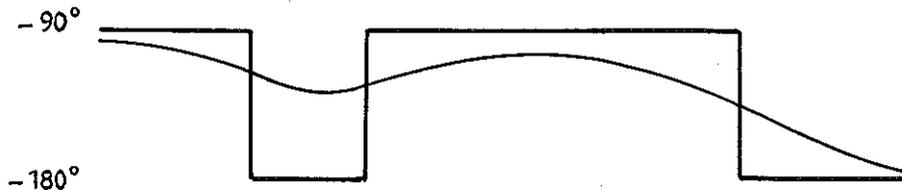
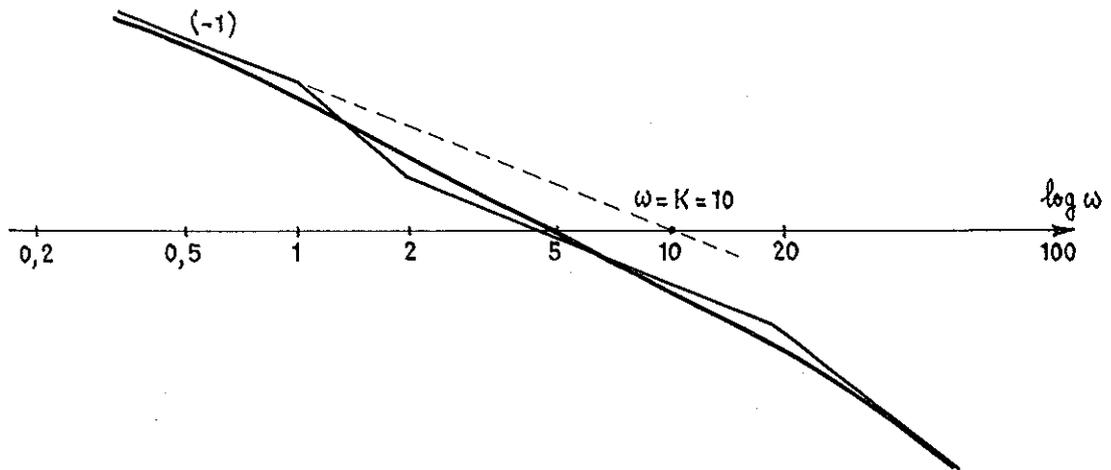
$$H(\nu) = \frac{10 + 5\nu}{\nu + 1,05\nu^2 + 0,05\nu^3}$$

(a)

$$H(\nu) = \frac{10}{\nu} \times \frac{1 + 0,5\nu}{(1 + \nu)(1 + 0,05\nu)}$$

- (b) Brisures du tracé asymptotique aux pulsations $\omega = 1$ (pôle), $\omega = 2$ (zéro), $\omega = 20$ (pôle)

(c) et (d)



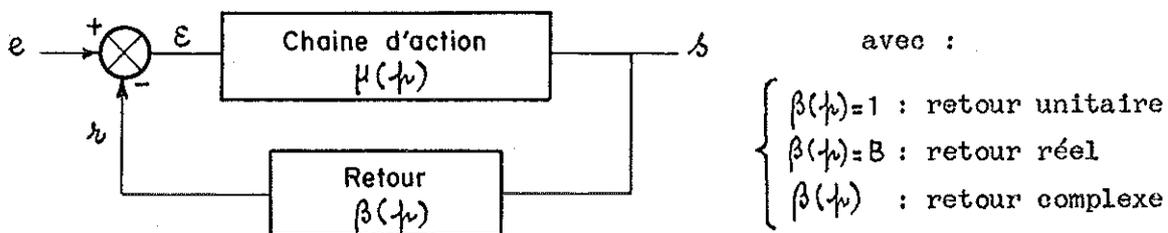
Chapitre IV

ANALYSE DES SYSTEMES ASSERVIS PRECISION - RAPIDITE - STABILITE

IV.1. - STRUCTURE GENERALE - FONCTION DE TRANSFERT EN BOUCLE FERMEE -

IV.1.1. - Boucle ouverte - Boucle fermée -

Rappelons ici la structure d'une chaîne d'asservissement bouclée.



- (a) On appelle transmittance en boucle ouverte (B.O.) d'une telle chaîne, la transmittance $\frac{r(p)}{\varepsilon(p)} = \mu(p) \beta(p)$.

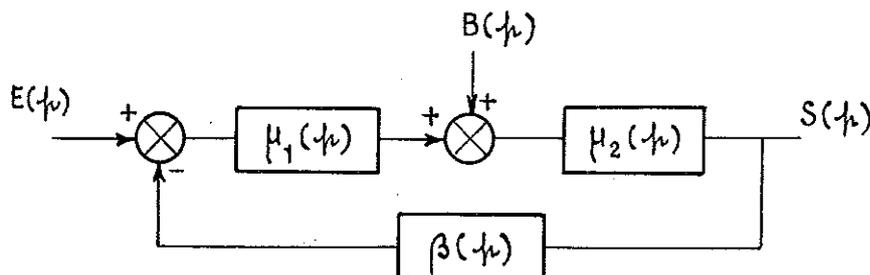
On appelle transmittance en boucle fermée (B.F.) le rapport $\frac{S(p)}{E(p)}$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(p) &= E(p) - R(p) \\ R(p) &= \beta(p) S(p) \\ S(p) &= \mu(p) \varepsilon(p) \end{aligned} \right\} S(p) = \mu(p) [E(p) - \beta(p) S(p)]$$

d'où

$$\boxed{\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\mu(p)}{1 + \mu(p) \beta(p)}}$$

- (b) Considérons la structure plus complète suivante :

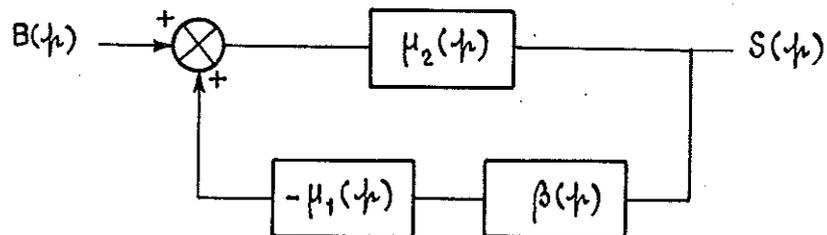


$B(p)$ représente les perturbations agissant sur le système (attention au signe des comparateurs).

$$\text{si } B(p) = 0 \quad S(p) = \frac{\mu_1(p) \mu_2(p)}{1 + \mu_1(p) \mu_2(p) \beta(p)} E(p)$$

$$\text{si } E(p) = 0 \quad S(p) = \frac{\mu_2(p)}{1 + \mu_1(p) \mu_2(p) \beta(p)} B(p)$$

En effet, le schéma bloc se ramène au schéma suivant déjà étudié :



si $B(p)$ et $E(p)$ coexistent, en vertu du principe de superposition,

$$S(p) = \frac{\mu_2(p)}{1 + \mu_1(p) \mu_2(p) \beta(p)} [B(p) + \mu_1(p) E(p)]$$

(c) Bande passante en boucle ouverte -

Elle se définit par l'intervalle de pulsations où le gain en boucle ouverte est supérieur à 1 en module : $|\mu(j\omega) \beta(j\omega)| > 1$

On en déduit une expression approximative de la transmittance en boucle fermée :

- si $|\mu \beta| \gg 1 \quad \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} \approx \frac{1}{\beta(j\omega)} \quad (\text{inverse du retour}),$

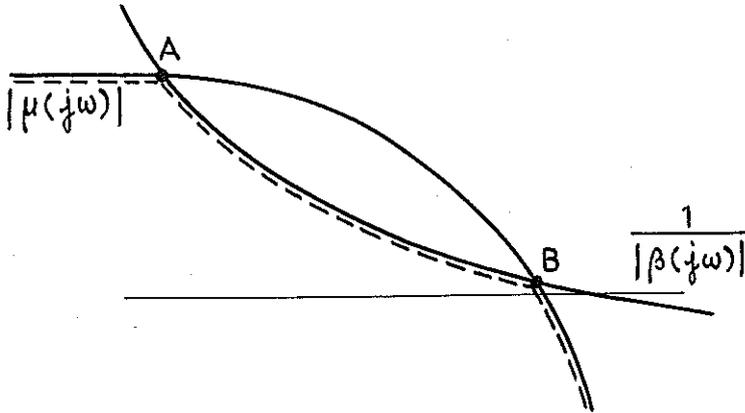
- $|\mu \beta| \ll 1 \quad \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} = \mu(j\omega)$

IV.1.2. - Analyse harmonique en boucle fermée : Abaque de Black Nichols -

Soit $\mu \beta(j\omega)$ la réponse harmonique de la boucle ouverte du système. Peut-on en déduire l'expression de la réponse harmonique en boucle fermée ?

- (a) Tracé approximatif de la transmittance en boucle fermée dans le plan de Bode. Nous venons de voir deux expressions approximatives de la réponse harmonique en boucle fermée. Traçons la réponse harmonique de la chaîne directe et celle de l'inverse du retour dans le plan de Bode.

Ces deux tracés se coupent en deux points A et B.



Le segment AB correspond à la relation $|\mu\beta| > 1$ donc à la bande passante du système en B.O.

Entre A et B la B.F. est équivalente à $\frac{1}{\beta}$ et hors du segment AB équivalente à μ .

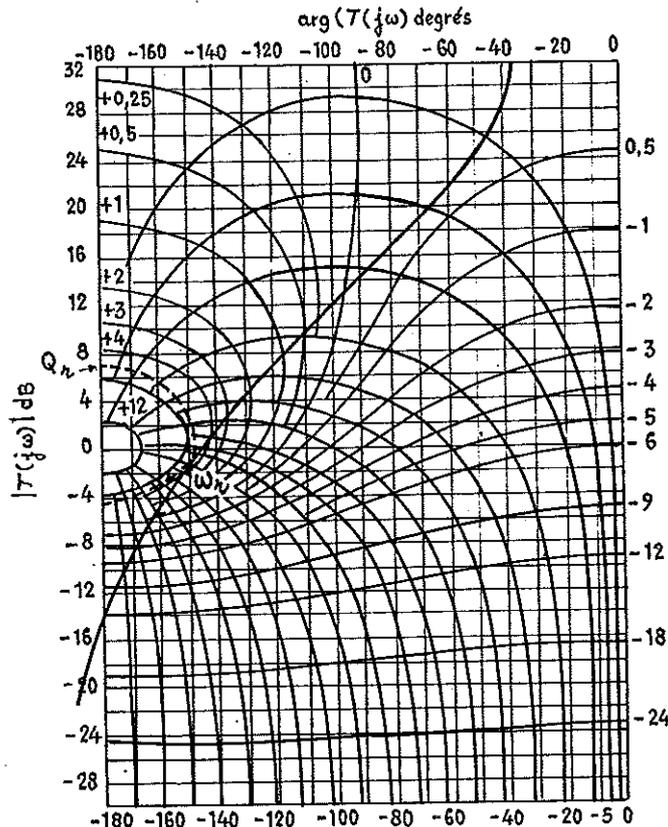
La courbe en pointillé donne une image de la transmittance en B.F.

Remarque : le point A est souvent rejeté à l'infini à gauche ($\omega = 0$ dans le plan de Bode).

- (b) Abaque de Black Nichols

Cet abaque est construit dans le plan de Black-Nichols. Y figurent les courbes isomodule et isophase de la transmittance $\frac{T(j\omega)}{1+T(j\omega)}$

Ces courbes sont appelées contours de Black-Nichols.



On porte sur l'abaque la réponse harmonique de la B.O. dans les axes classiques (phase, module en dB) graduées en ω . On obtient par simple lecture sur les contours de Black Nichols module et phase de $\frac{\mu \beta(j\omega)}{1 + \mu \beta(j\omega)}$, point par point en fonction de ω .

L'expression de la transmittance en B.F. s'obtient par multiplication par le nombre complexe $\frac{1}{\beta(j\omega)}$.

Dans le cas de retour unitaire, la transmittance en B.F. s'obtient par lecture directe. On peut (toujours dans ce cas) lire la pulsation de résonance ω_h ainsi que la surtension Q_h (voir figure).

(c) Estimation des performances temporelles de la B.F. à partir de l'analyse harmonique.

- Dans le cas d'un retour unitaire, Q_h donne une idée de l'amortissement du système. On adopte habituellement une valeur inférieure à 3 dB : des corrections se feront en ce sens.

- Le temps de réponse t_h pour un "bon" amortissement est donné approximativement par la relation

$$t_h \times \omega_c = \pi$$

où ω_c désigne la pulsation de coupure en B.O. (pulsation pour laquelle le gain est égal à 1 en module).

IV.2. - STABILITE -

Un système bouclé sera dit "stable" si sa réponse impulsionnelle en B.F. est absolument intégrable ou (ce qui est équivalent) si les pôles de sa transmittance sont à partie réelle strictement négative.

La transmittance en B.F. s'écrit :

$$G(p) = \frac{\mu(p)}{1 + \mu(p) \beta(p)}$$

Les pôles de $G(p)$ sont, en fait, les zéros de $1 + \mu(p) \beta(p)$. On appelle équation caractéristique l'équation :

$$1 + \mu(p) \beta(p) = 0$$

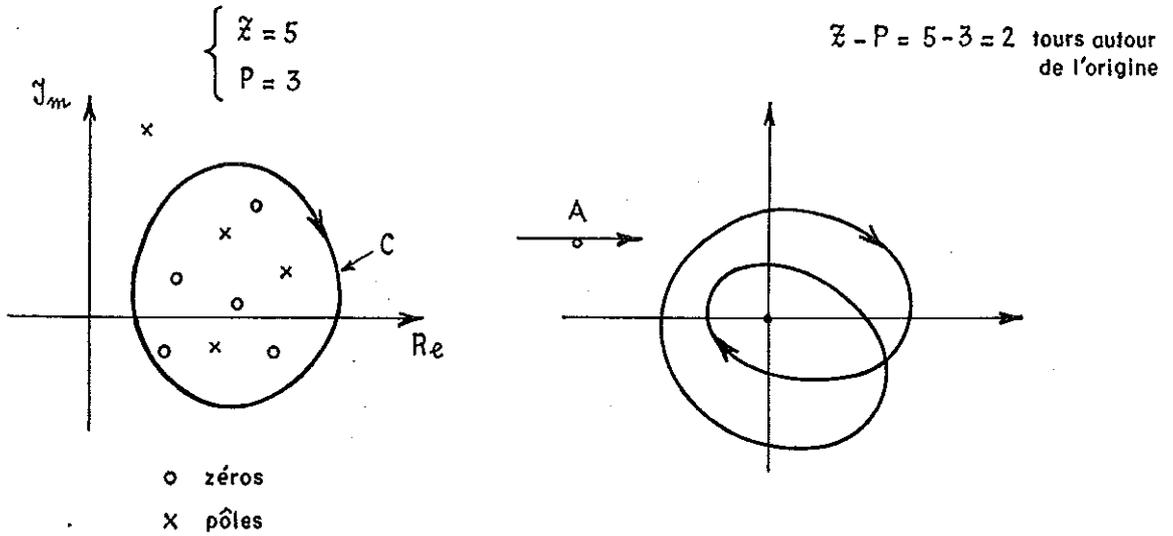
Le système sera stable si cette équation n'a pas de racines à partie réelle positive ou nulle.

IV.2.1. - Critère de Nyquist -

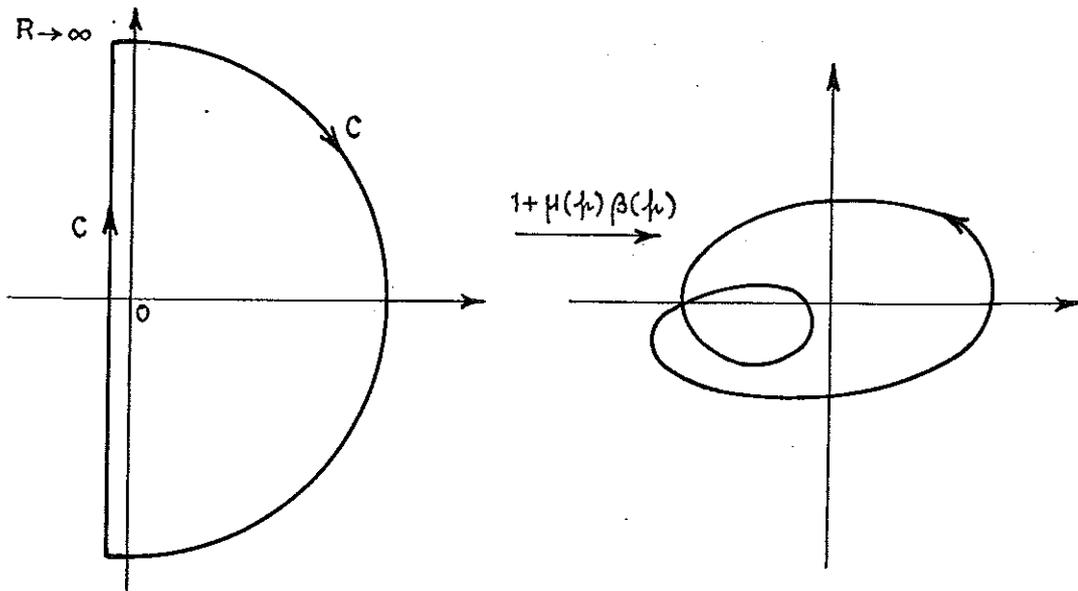
(a) Un théorème de Cauchy

Si un point M (d'affixe p) décrit dans le plan complexe un contour

fermé C dans le sens des aiguilles d'une montre, entourant P pôles et Z zéros d'une fonction $A(\lambda)$ de la variable complexe λ , alors l'image du point M par l'application A entoure $P - Z$ fois l'origine (contour orienté dans le sens trigonométrique).



(b) Application au critère de Nyquist



Considérons la transformation $A(\lambda) = 1 + \mu(\lambda) \beta(\lambda)$ et le contour C représenté ci-dessus. On désire que $1 + \mu(\lambda) \beta(\lambda)$ n'ait pas de zéro à l'intérieur de C ($Z=0$). L'image de C par $1 + \mu(\lambda) \beta(\lambda)$ doit donc entourer l'origine dans le sens direct un nombre de fois égal au nombre de pôles instables de $1 + \mu(\lambda) \beta(\lambda)$ (donc de $\mu(\lambda) \beta(\lambda)$).

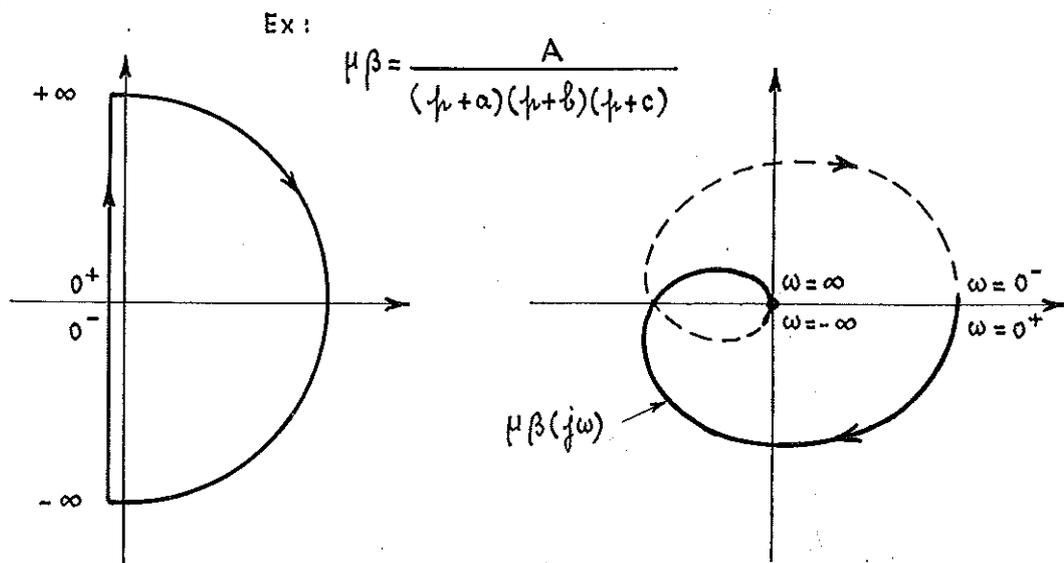
Remarques :

- Si $\mu(p) \beta(p)$ est stable (stabilité en B.O.), $P=0$: l'image de C par $1+\mu(p) \beta(p)$ ne doit pas entourer l'origine.
- le nombre de tours dans la transformation $1+\mu \beta$ autour de l'origine est égal au nombre de tours dans la transformation $\mu \beta$ autour du point -1.

Ce point -1 dans le plan complexe est appelé point critique.

Nous étudierons désormais l'image du contour C par la transformation $\mu(p) \beta(p)$.

1er cas : Système stable en boucle ouverte ($P=0$).



L'image du segment $] 0^+, +\infty [$ est le tracé de la B.O. dans le plan de Nyquist décrit dans le sens des ω croissants.

L'image du segment $] -\infty, 0^- [$ est symétrique de la précédente par rapport à l'axe réel. (*)

L'image du demi cercle de l'infini est réduite à un point (en général l'origine) si le système est physiquement réalisable.

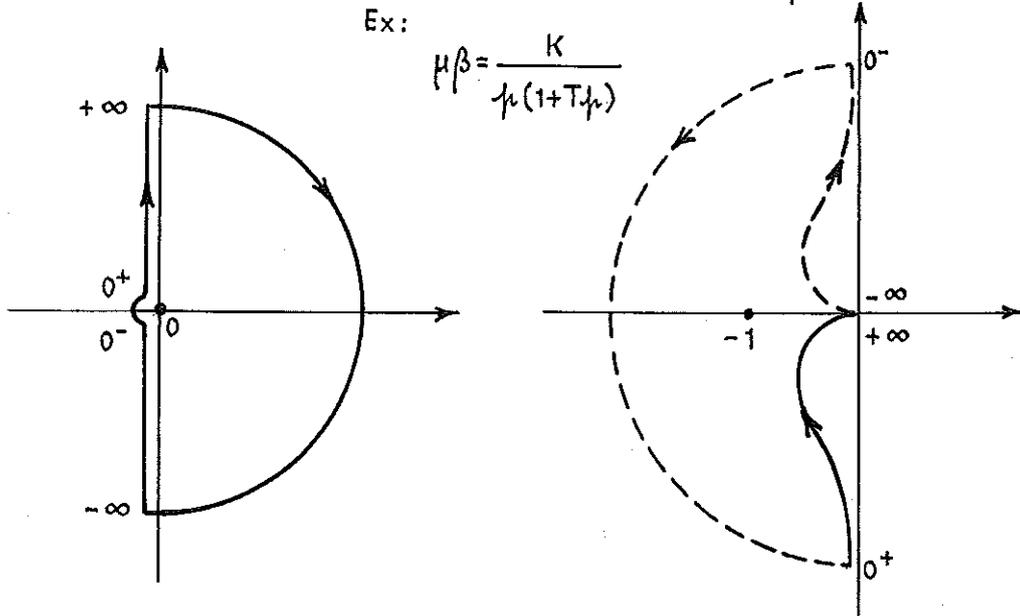
(*) En effet $\mu \beta(j\omega) = \int_0^\infty h(\theta) e^{-j\omega\theta} d\theta$ où $h(\theta)$ est la réponse impulsionnelle de la B.O. d'où

$$\mu \beta(j\omega) = \int_0^\infty h(\theta) [\cos(-\omega\theta) + j \sin(-\omega\theta)] d\theta$$

$$\mu \beta(-j\omega) = \int_0^\infty h(\theta) [\cos(\omega\theta) + j \sin(\omega\theta)] d\theta = \overline{\mu \beta(j\omega)}$$

2ème cas : Système intégrateur multiple en B.O.

$\mu\beta$ présente alors des termes de la forme $\frac{K}{\mu^k}$



L'image du segment $]0^+, +\infty[$ est le tracé de la B.O. dans le plan de Nyquist orienté dans le sens ω croissant.

L'image du segment $] -\infty, 0^- [$ est symétrique de la précédente par rapport à l'axe réel.

L'image du demi cercle à l'infini est l'origine.

L'image du demi cercle en zéro est composée de $\frac{k}{2}$ demi cercle à l'infini décrit dans le sens direct. (\times)

On pourrait envisager un troisième cas où $\mu\beta$ comporterait des pôles complexes conjugués. Ce cas rare en pratique ne sera pas traité ici.

© Enoncé du Critère de Nyquist -

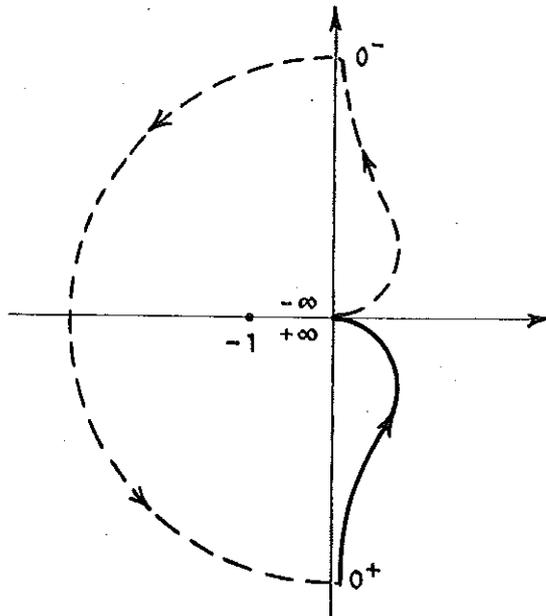
Pour qu'un système soit stable en boucle fermée, il faut et il suffit que le lieu de Nyquist de la B.O. $\mu\beta$, convenablement complété et décrit dans le sens des ω croissants, fasse autour du point -1 dans le sens direct un nombre de tours égal au nombre de pôles de $\mu\beta$ à partie réelle positive ou nulle.

(\times) au voisinage de $\mu = 0$ $\mu\beta \simeq \frac{K}{\mu^k} = \frac{K}{r^k} e^{-ik\theta}$ ($\mu = re^{i\theta}$)

θ varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{3\pi}{2} \Rightarrow$ l'argument de $\mu\beta$ varie de $\frac{k\pi}{2}$ à $\frac{3k\pi}{2} \Rightarrow \mu\beta$ décrit $\frac{k}{2}$ demi cercle à l'infini ($k \rightarrow 0$) dans le sens direct.

Exemple 1

$$\mu\beta = \frac{K}{\mu(1-T\mu)}$$



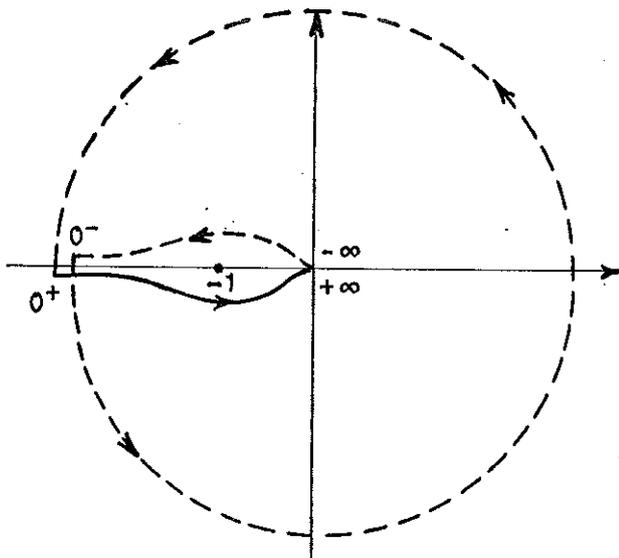
Le lieu de Nyquist complété, fait un tour dans le sens direct autour du point -1.

Il y a deux pôles à partie réelle positive ou nulle :

le système est instable en boucle fermée.

Exemple 2

$$\mu\beta = \frac{K(1+\mu)}{\mu^2(1+0,1\mu)}$$



Le lieu de Nyquist complété fait deux tours autour du point critique dans le sens direct.

Il y a deux pôles à l'origine.

Le système est stable en B.F.

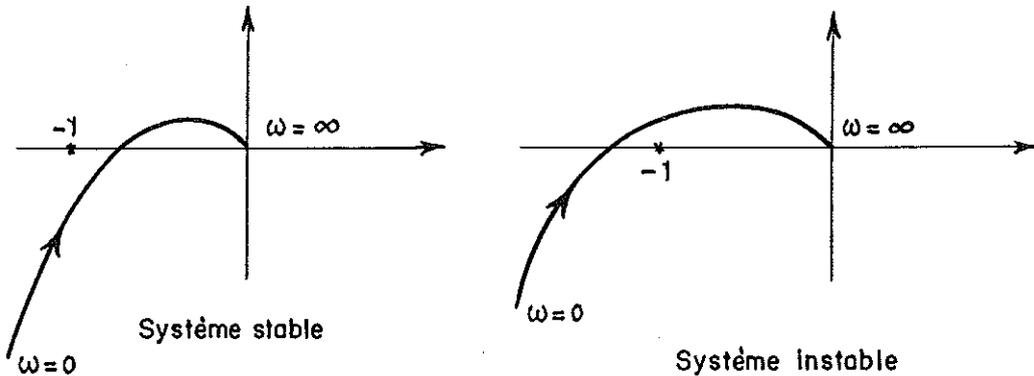
Remarque importante :

La définition adoptée pour la stabilité (absolue intégrabilité de la réponse impulsionnelle) nous conduit à exclure les systèmes intégrateurs ou oscillateurs. (pôles à partie réelle nulle) de la classe des systèmes stables. Le critère de Nyquist énoncé prend en compte cette remarque et diffère ainsi du critère généralement cité.

(d) Critère de Nyquist simplifié : critère du revers -

Ce critère simplifié n'est applicable que dans le cas où $\mu\beta$ n'a pas de pôle à partie réelle strictement positive.

Un tel système est stable en boucle fermée si, parcourant le lieu de Nyquist de $\mu\beta$ dans le sens des ω croissants, on laisse le point critique à gauche. Le système sera instable dans le cas où le point -1 est laissé à droite.



Ce critère se déduit simplement du critère énoncé plus haut.

IV.2.2. - Degré de stabilité - Marge de phase - Marge de gain pour les systèmes sans pôles à partie réelle strictement positive -

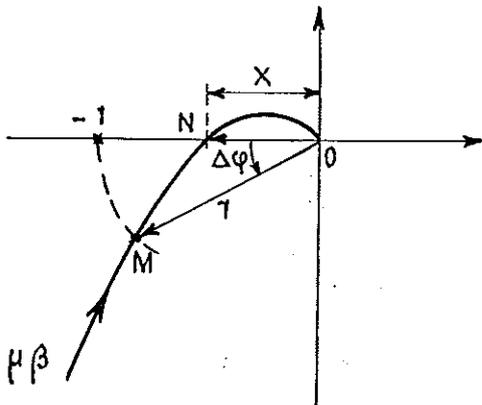
Nous venons de distinguer les systèmes stables des systèmes instables. En pratique, un système strictement stable n'est pas satisfaisant.

En effet, si le lieu de Nyquist de la B.O. d'un système stable en B.F. est "trop voisin" du point critique, sa réponse sera très mal amortie.

Les notions de marge de phase et marge de gain minimales interdisent un voisinage immédiat du point -1 .

(a) Marge de phase - Marge de gain

- Plan de Nyquist -



Le point M est défini par l'intersection du lieu de Nyquist de $\mu\beta$ avec le cercle centré à l'origine de rayon unité.

Le point N est défini par l'intersection du lieu de Nyquist de $\mu\beta$ avec le demi-axe réel négatif.

La marge de phase $\Delta\varphi$ est l'angle orienté (\vec{ON}, \vec{OM}) .

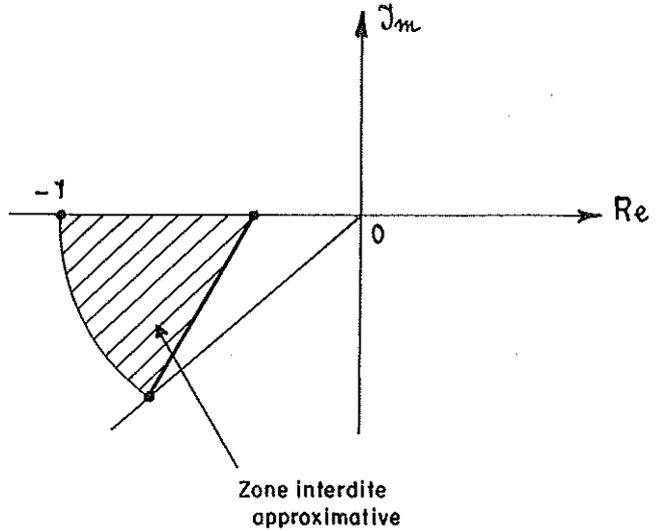
La marge de gain, exprimée en

décibels, est $\Delta G = 20 \log \frac{1}{X}$ où $X = \| \overrightarrow{ON} \|$.

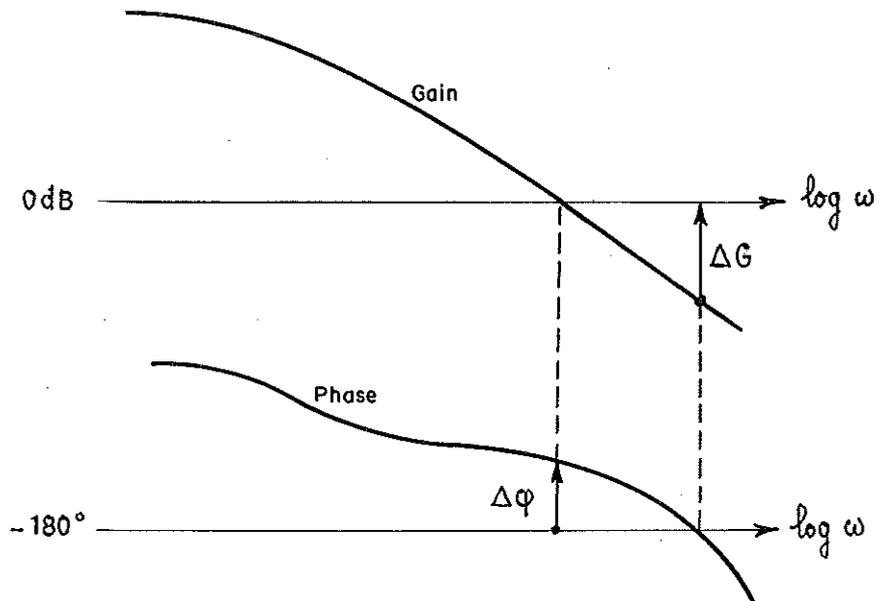
En pratique, on prend :

$$\Delta \varphi_{\min} = 45^\circ \text{ à } 50^\circ$$

$$\Delta G_{\min} = 8 \text{ à } 10 \text{ dB}$$



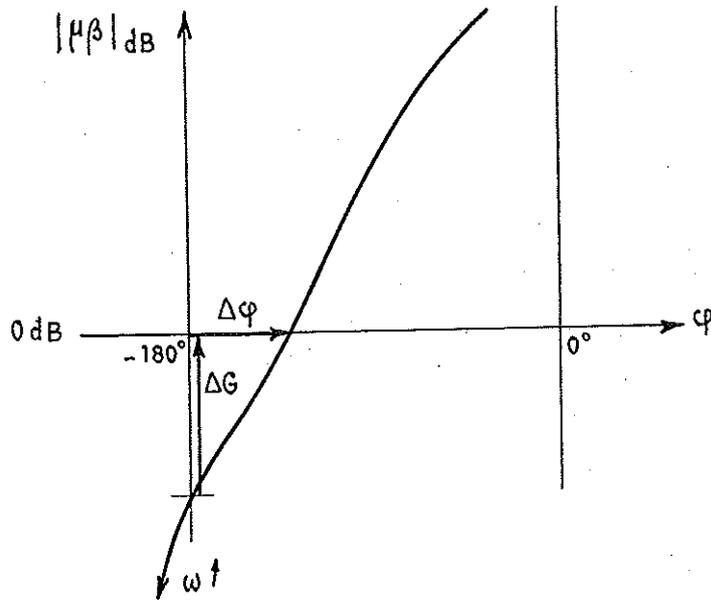
- Plan de Bode



En pratique, si, dans le plan de Bode, les courbes de module et phase de $\mu\beta$ ont une allure monotone décroissante, la seule considération de marge de phase suffit à assurer un amortissement convenable.

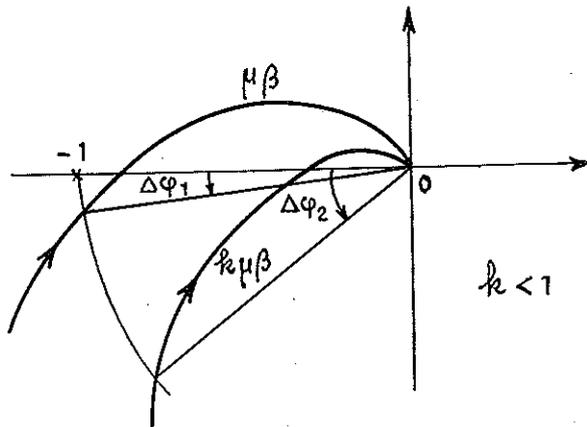
En conséquence, il suffit le plus souvent que le tracé asymptotique du module coupe l'axe 0 dB avec une pente (-1) sur un intervalle de pulsation de largeur suffisante (2 à 3 octaves).

- Plan de Black-Nichols



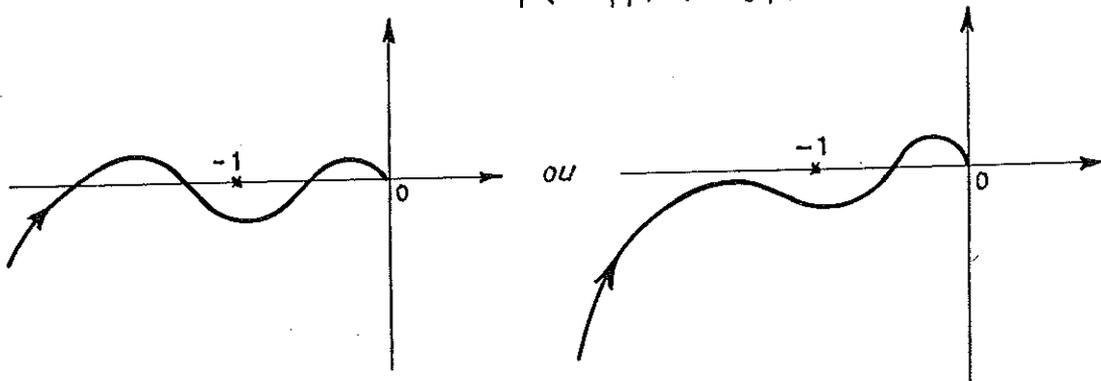
(b) Stabilité conditionnelle -

En général, il suffit d'affaiblir le gain pour améliorer le degré de stabilité.



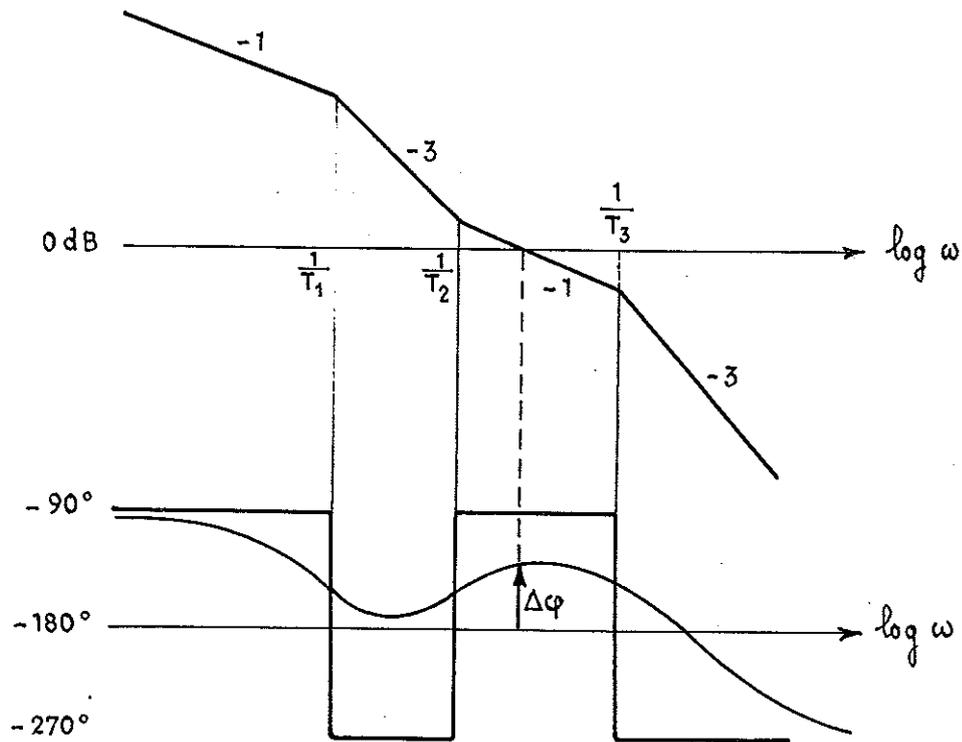
Cependant, pour certains systèmes dits "conditionnellement stables", une diminution de gain n'entraîne pas systématiquement une amélioration du degré de stabilité.

Ex:
$$\frac{K(1+T_2 \tau)^2}{\tau(1+T_1 \tau)^2(1+T_3 \tau)^2}$$



avec $T_3 < T_2 < T_1$

Ce dernier cas de figure est fréquent dans les servomécanismes à haute performance. Dans le plan de Bode l'allure des courbes d'un système conditionnellement stable est :



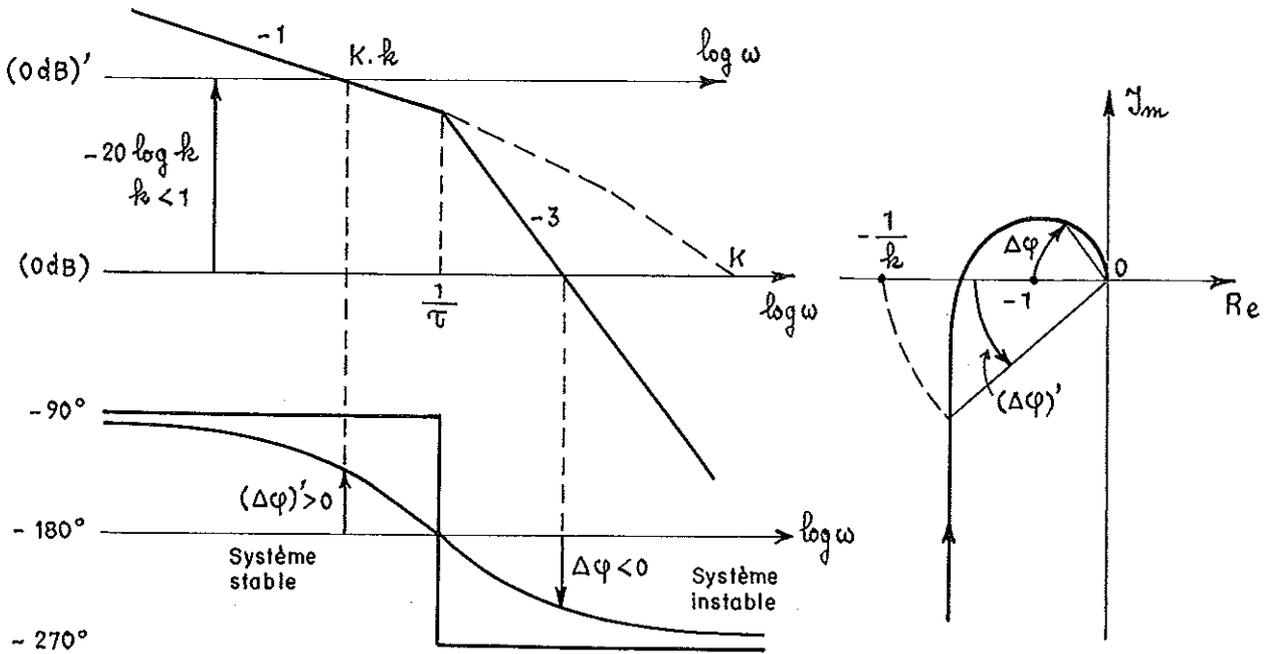
Ce système, mathématiquement stable, risque de présenter de sérieux inconvénients dès que le système quitte sa zone de linéarité.

ⓐ Remarque sur la discussion pratique de la stabilité -

En pratique, une modification du gain de la boucle ouverte $\mu\beta$ se traduira dans le plan de Bode par une translation de l'axe 0 dB et non par une nouvelle construction de $k\mu\beta$.

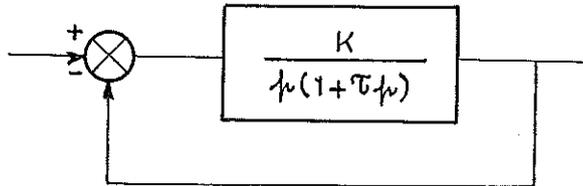
Dans le plan de Nyquist on discutera de la stabilité par rapport au point $(-1/k)$ au lieu du point (-1) .

Ex: $\frac{K}{\mu(1+\tau\mu)^2}$



(d) Relation entre degré de stabilité et amortissement de la réponse indicielle

Soit le système suivant, à retour unitaire ($\beta = 1$)



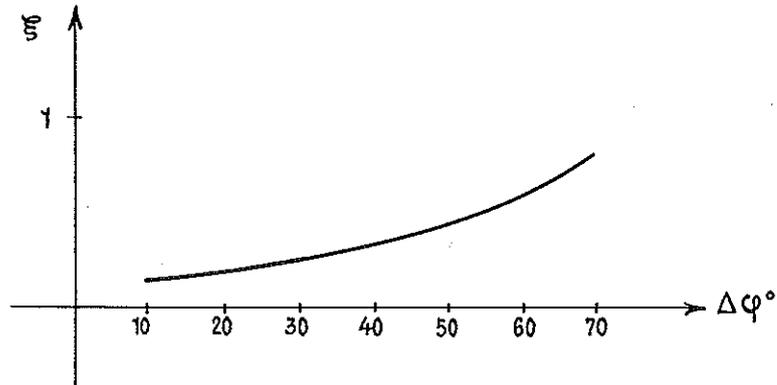
La transmittance en B.F. s'écrit $\frac{\mu}{1+\mu}$ soit

$$\frac{K}{\mu(1+\tau\mu) + K} = \frac{1}{1 + \frac{1}{K}\mu + \frac{\tau}{K}\mu^2}$$

En B.F. ce système se comporte comme un système du second ordre. On peut alors essayer d'établir une relation entre le coefficient d'amortissement (ou le dépassement, voir § III.1.3) et la marge de phase du système en B.O.

On a

$$\frac{2\zeta}{\omega_0} = \frac{1}{K} \quad \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{\tau}{K}$$



En particulier, une marge de phase de 65° est nécessaire pour avoir un amortissement $\xi = 0,7$; une marge de phase de 45° conduit à $\xi = 0,42$ soit un dépassement de 22 %.

Cet exemple est d'une importance pratique très grande. Cependant, dans le cas général, on ne peut pas établir de relation aussi directe entre le dépassement en réponse indicielle et la marge de phase en B.O. Toutefois, retenons qu'une marge de phase de 45 à 50° conduit dans la plupart des cas à un dépassement de l'ordre de 20 % dans le cas où le retour β est réel.

Dans le cas où β est complexe la marge de phase n'est plus significative de l'amortissement de la réponse indicielle : une analyse du système en simulation est alors souvent nécessaire.

IV.2.3. - Critère algébrique de Routh -

Ce critère énonce une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme ait ses zéros à partie réelle strictement négative.

Appliquons ce critère à l'équation caractéristique $1 + \mu(p) \beta(p) = 0$.

Le numérateur de $1 + \mu(p) \beta(p)$ s'écrit :

$$a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n$$

Formons le tableau suivant : (tableau de Routh).

a_n a_{n-1}	a_{n-2} a_{n-3}	$a_{n-4} \dots$ $a_{n-5} \dots$
$c_1 = \frac{a_{n-1} a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$	$c_2 = \frac{a_{n-1} a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$	$c_3 = \frac{a_{n-1} a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$
$d_1 = \frac{c_1 a_{n-3} - c_2 a_{n-1}}{c_1}$	$d_2 = \frac{c_1 a_{n-4} - c_3 a_{n-1}}{c_1}$	$d_3 = \frac{c_1 a_{n-6} - c_4 a_{n-1}}{c_1}$
\vdots	\vdots	\vdots

et ainsi de suite jusqu'à obtention d'une ligne de zéro.

Le critère de Routh s'énonce alors :

Les zéros de l'équation algébrique

$$a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n = 0$$

sont à partie réelle strictement négative si, et seulement si les termes de la première colonne du tableau de Routh sont de même signe.

Le critère de Routh est intéressant pour l'étude de la stabilité dès que la transmittance en B.O. est donnée sous forme polynomiale (difficulté de construction graphique).

Exemple :

$$1 + \mu \beta = 0 \iff 3,5 + 3p + 0,5p^2 + p^3 = 0$$

$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3$

$$a_3 = 1$$

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 0,5$$

$$a_0 = 3,5$$

$$c_1 = -4$$

$$c_2 = 0$$

$$d_1 = 3,5$$

$$d_2 = 0$$

$$e_1 = 0$$

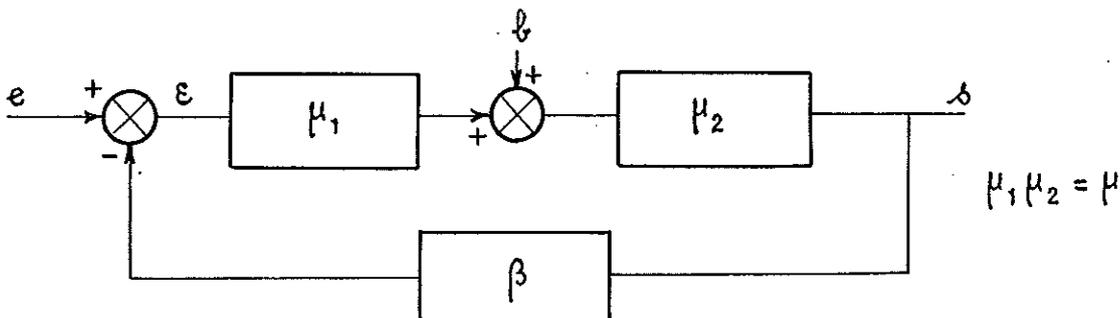
$$e_2 = 0$$

← on s'arrête

Conclusion : le système proposé est instable en B.F. (changement de signe dans la première colonne).

IV.3. - PRECISION -

Soit la structure suivante d'un système asservi :



On a vu que le rôle d'un système asservi est de faire suivre à la sortie δ une loi déterminée en général par l'entrée.

La qualité d'un tel système se jugera

- par sa stabilité
- par la précision avec laquelle la loi est suivie.

Cette précision conduit à imposer des conditions sur l'erreur ε .

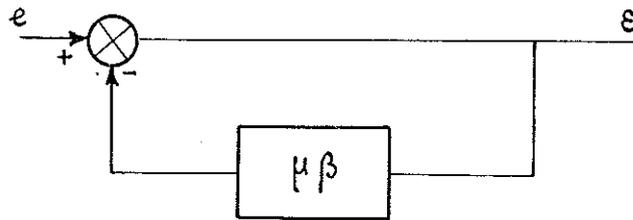
En vertu du principe de superposition,

$$\varepsilon(\nu) = \varepsilon_e(\nu) + \varepsilon_b(\nu) \quad \text{où} \quad \frac{\varepsilon_e(\nu)}{E(\nu)} = \frac{1}{1 + \mu_1 \mu_2 \beta}$$

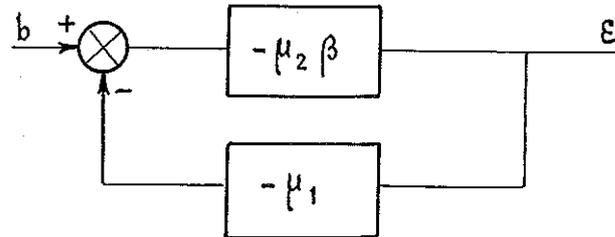
$$\text{et} \quad \frac{\varepsilon_b(\nu)}{B(\nu)} = - \frac{\mu_2 \beta}{1 + \mu_1 \mu_2 \beta}$$

Ces expressions se calculent simplement en envisageant les deux cas suivants :

* $b = 0$ $e \neq 0$



* $b \neq 0$ $e = 0$



Remarque : le comparateur utilisé dans le schéma ci-dessus réalise bien une différence ce qui justifie le signe - du retour.

Les erreurs ε_e et ε_b comportent une partie transitoire et une partie permanente

- l'erreur transitoire est l'erreur en réponse à des variations de e ou b . Cette erreur caractérise ce que l'on appelle la précision dynamique.
- l'erreur permanente est l'erreur subsistant lorsque le temps tend vers l'infini, en réponse à des signaux e ou b canoniques (échelon - rampe - signal harmonique). L'erreur en réponse à des échelons caractérise la précision statique.

Lors de la synthèse des systèmes asservis, on cherche à limiter ces erreurs à des erreurs maximales fixées par avance.

IV.3.1. - Erreur permanente -

- (a) Entrée en échelon (précision statique - erreur statique)
perturbation nulle

$$\frac{E_o(\mu)}{E(\mu)} = \frac{1}{1 + \mu_1 \mu_2 \beta}$$

Avec $E(\mu) = \frac{E_o}{\mu}$ (échelon) on a $\varepsilon_e(\mu) = \frac{E_o}{\mu} \times \frac{1}{1 + \mu_1 \mu_2 \beta}$

Le théorème de la valeur finale (voir annexe) nous permet d'écrire :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_e(t) = \lim_{\mu \rightarrow 0} \mu \varepsilon_e(\mu) = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{E_o}{1 + \mu_1 \mu_2 \beta}$$

Cette erreur est nulle si $1 + \mu_1 \mu_2 \beta$ a au moins un pôle à l'origine $\iff \mu_1 \mu_2 \beta$ présente au moins une intégration.

En général $\lim_{\mu \rightarrow 0} \beta(\mu)$ est finie, d'où la condition équivalente $\mu_1 \mu_2(\mu) \simeq \frac{K}{\mu^k}$ lorsque $\mu \rightarrow 0$ ($k \geq 1$).

Conclusion :

Un système de classe au moins égale à 1 en B.O. présente une erreur appelée erreur statique nulle en réponse à un échelon d'entrée.

Si le système en B.O. est de classe 0, l'erreur statique est égale à

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_e(t) = \frac{E_o}{1 + K} \quad (K \text{ gain statique})$$

lorsque K est élevé, on dit que l'erreur est inversement proportionnelle au gain statique.

- (b) Perturbation en échelon (précision et erreur statiques)
entrée nulle.

$$\frac{\varepsilon_b(\mu)}{B(\mu)} = - \frac{\mu_2 \beta}{1 + \mu_1 \mu_2 \beta}$$

$$B(\mu) = \frac{B_o}{\mu} \implies \varepsilon_b(\mu) = - \frac{B_o}{\mu} \frac{\mu_2 \beta}{1 + \mu_1 \mu_2 \beta}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_b(t) = \lim_{\mu \rightarrow 0} \mu \varepsilon_b(\mu) = - B_o \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\mu_2 \beta}{1 + \mu_1 \mu_2 \beta}$$

On vérifiera les propositions suivantes

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_b(t) = 0 \iff \begin{cases} \lim_{\mu \rightarrow 0} \mu_2 \beta = 0 \\ \text{ou} \\ \mu_1(\mu) \approx \frac{K}{\mu^k} \quad k \geq 1 \text{ quand } \mu \rightarrow 0 \end{cases}$$

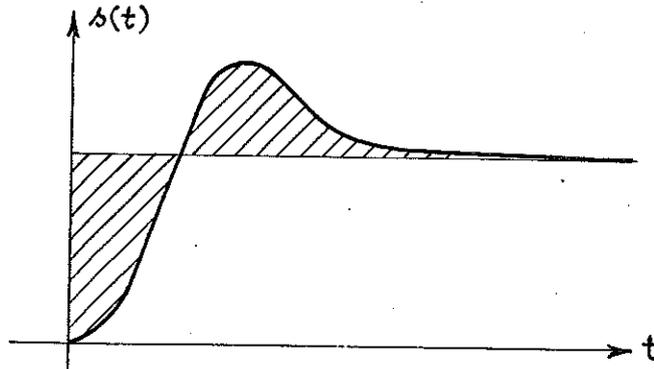
En général μ_2 et β ne sont pas dérivateurs, la première condition est donc rarement remplie.

Conclusion :

Un système comportant en B.O. au moins une intégration en amont du point d'application de la perturbation (donc dans μ_1), présente une erreur statique nulle en réponse à un échelon de perturbation.

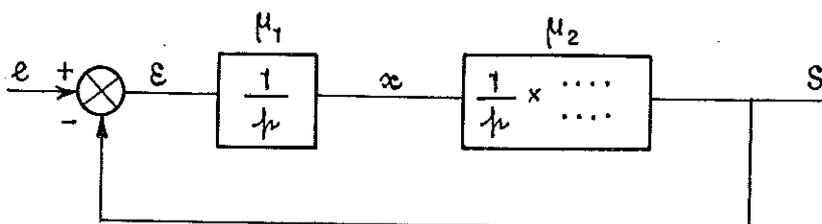
ⓐ Remarques

- si μ_2 ne comporte pas d'intégration il suffit, pour annuler à la fois les erreurs statiques ε_b et ε_e , que μ_1 soit un système intégrateur (donc de placer une intégration en amont de la perturbation).
- si μ_2 comporte une intégration, on peut être conduit à introduire une intégration supplémentaire dans μ_1 pour annuler $\varepsilon_b(\infty)$. On aura alors affaire à un système de classe 2 en B.O. qui, s'il est stable, présentera une réponse indicielle du type suivant :



On remarque que les 2 aires hachurées sont égales.

En effet :



$\beta = 1$

$$x = \int_0^t \varepsilon(\theta) d\theta = \int_0^t [e(\theta) - s(\theta)] d\theta$$

Si le système est stable, en réponse, à un échelon,

$$\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = E_0 \quad \text{d'où} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad \text{car}$$

$s(t)$ est obtenue à partir de $x(t)$ par intégration (μ_2).

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (e(\theta) - s(\theta)) d\theta = 0$$

Cette intégrale représente l'aire algébrique hachurée plus haut C.Q.F.D.

Ces systèmes présentent un double inconvénient :

- stabilité conditionnelle
- dépassement élevé en réponse indicielle

(d) Entrées en rampe (perturbation nulle)

$$\frac{\mathcal{E}_e(\mu)}{E(\mu)} = \frac{1}{1 + \mu_1 \mu_2 \beta} \quad E(\mu) = \frac{V_0}{\mu^2}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}_e(t) = \lim_{\mu \rightarrow 0} \mu \mathcal{E}_o(\mu) = V_0 \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(1 + \mu_1 \mu_2 \beta)}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}_o(t) = 0 \quad \iff \quad \mu_1 \mu_2 \beta \simeq \frac{K}{\mu^k} \quad k \geq 2 \quad \text{quand } \mu \rightarrow 0$$

En général, $\mu_1 \mu_2$ doit comporter au moins 2 intégrations pour annuler l'erreur permanente (voir remarque en (c) pour les doubles intégrateurs).

Si le système ne comporte, en chaîne directe, qu'une intégration,

$$\mu_1 \mu_2 \beta \simeq \frac{K_V}{\mu} \quad \text{lorsque } \mu \rightarrow 0$$

$$\implies \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}_e(t) = \frac{V_0}{K_V}$$

(e) Entrée sinusoïdale (perturbation nulle)

$e(t) = E_0 \sin \omega_0 t$ \mathcal{E}_e est en régime permanent un signal harmonique de module $|\mathcal{E}_e|$ tel que

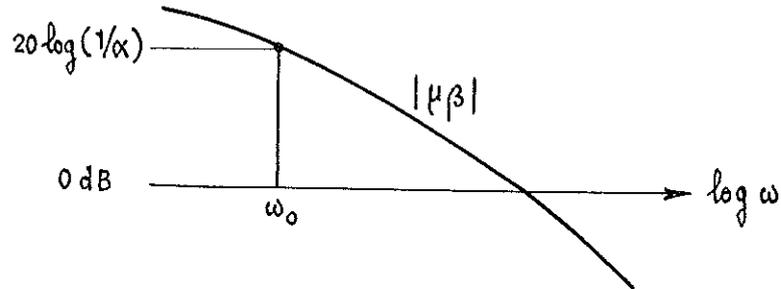
$$\frac{|\mathcal{E}_e|}{E_0} = \left| \frac{1}{1 + \mu_1 \mu_2 \beta} \right|_{\mu = j\omega_0}$$

Si ω_0 est dans la bande passante de la boucle ouverte, $\left| \mu_1 \mu_2 \beta \right|_{\mu = j\omega_0} > 1$ d'où :

$$\frac{|\mathcal{E}_e|}{E_0} \simeq \left| \frac{1}{\mu_1 \mu_2 \beta} \right|_{\mu = j\omega_0}$$

L'amplitude de l'erreur est inversement proportionnelle au gain de la B.O. à la pulsation ω_0 .

Afin d'obtenir une précision de recopie α donnée (par exemple 1 % à $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$) il est nécessaire que le gain en B.O. à la pulsation ω_0 soit supérieur ou égal à $1/\alpha$ (40 dB à $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$ pour l'exemple précité).



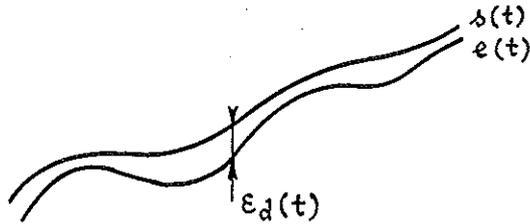
Ⓣ Tableau récapitulatif : retour unitaire $\beta = 1$

Comportement de $H_1 H_2$ à $\nu \approx 0$		$\mu_1 \approx K_1$ $\mu_2 \approx K_2$	$\mu_1 \approx K_1$ $\mu_2 \approx \frac{K\nu_2}{\nu}$	$\mu_1 \approx \frac{K\nu_1}{\nu}$ $\mu_2 \approx K_2$	$\mu_1 \approx \frac{K\nu_1}{\nu}$ $\mu_2 \approx \frac{K\nu_2}{\nu}$
Entrée $e(t)$ à $b=0$	Echelon				
	Rampe				
Perturbation Echelon à $e=0$					

IV.3.2. - Erreur transitoire (précision dynamique)

Méthode de la "sinusoïde équivalente".

Cas d'un retour unitaire - perturbation nulle.



On cherche à limiter ϵ_d à une valeur $\epsilon_{d_{max}}$.

Pour un signal d'entrée quelconque, l'expression de l'erreur dynamique est excessivement complexe. Cependant s'il existe une limitation des signaux d'entrée en vitesse et en accélération, il est possible d'obtenir une condition caractérisant la précision exigée.

Le signal d'entrée est alors défini par :

$$v \leq v_M$$

$$\gamma \leq \gamma_M$$

Parmi les signaux satisfaisant ces conditions, le signal sinusoïdal est de loin le plus simple.

Soit $e(t) = E_0 \sin \omega_0 t$ un tel signal.

La vitesse maximale de ce signal est donnée par $v_M = E_0 \omega_0$ et l'accélération maximale par $\gamma_M = E_0 \omega_0^2$.

Ces deux équations définissent un signal qui doit être recopié avec une erreur inférieure à $\epsilon_{d_{max}}$.

On a $E_0 = \frac{v_M^2}{\gamma_M}$ et $\omega_0 = \frac{\gamma_M}{v_M}$ d'où la condition (voir § IV.3.1.e)

$$\frac{1}{|H_1 H_2 \beta|} \Big|_{p = j \frac{\gamma_M}{v_M}} \leq \frac{\epsilon_{d_{max}}}{\frac{v_M^2}{\gamma_M}}$$

ou

$$\boxed{|H_1 H_2 \beta| \Big|_{p = j \frac{\gamma_M}{v_M}} \geq \frac{v_M^2}{\gamma_M \epsilon_{d_{max}}}}$$

Notons que cette condition est nécessaire et peut dans certains cas n'être pas suffisante.

IV.3.3. - Conclusions -

D'une manière générale, les erreurs décroissent lorsque le gain de la B.O. augmente, c'est-à-dire lorsque la bande passante du système augmente.

Chapitre V

SYNTHESE DES SYSTEMES ASSERVIS ETUDE DE LA CORRECTION

V.1. - ROLE DES CORRECTEURS : DILEMME PRECISION - STABILITE

Rappelons que pour obtenir :

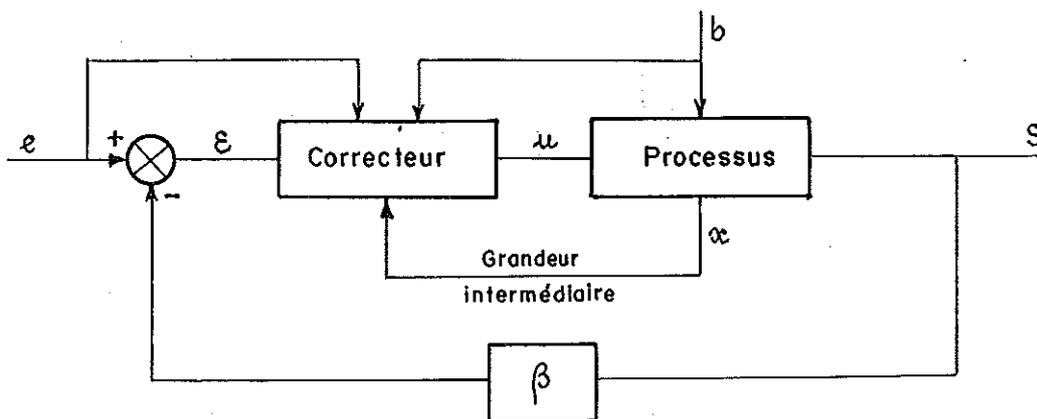
- une bonne précision, il faut :

- en statique, avoir une ou plusieurs intégrations en chaîne directe.
- en dynamique, avoir un gain élevé pour certaines pulsations, c'est-à-dire une large bande passante.

- un bon degré de stabilité, il faut :

- que le gain soit le plus faible possible en B.O. d'où une faible bande passante
- que le déphasage soit faible d'où le minimum d'intégrateurs possible.

Les correcteurs ou régulateurs ont pour but de délivrer un signal de commande u du système de manière à préserver les exigences de précision et stabilité à priori incompatibles. Ils s'insèrent dans un système bouclé de la manière suivante :

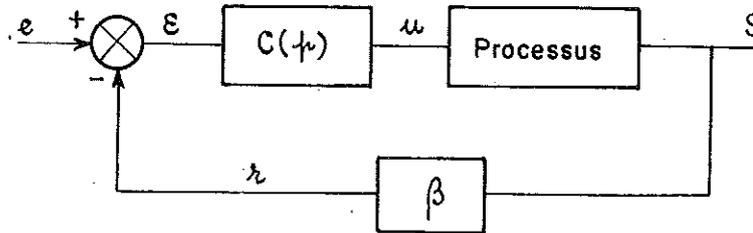


$$u = f(\varepsilon, \alpha, b, e)$$

Selon la nature de cette fonction, on distinguera différents types de correcteurs.

Les méthodes de correction qui vont être développées dans la suite, sont considérées essentiellement dans l'optique des asservissements et non des régulations.

V.1.1. - Correction série -



Ce type de correcteur est inséré dans la chaîne directe en série avec le processus, et délivre un signal de commande

$$u(t) = f(\varepsilon)$$

On distingue trois fonctions principales :

- action proportionnelle notée P

$$u(t) = k \varepsilon(t) \qquad U(p) = k \varepsilon(p)$$

- action intégrale, notée I

$$u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\theta) d\theta \qquad U(p) = \frac{1}{T_i p} \varepsilon(p)$$

- action dérivée, notée D

$$u(t) = T_d \frac{d}{dt} (\varepsilon(t)) \qquad U(p) = T_d p \varepsilon(p)$$

Un correcteur série réalise plus ou moins parfaitement des combinaisons de ces trois actions.

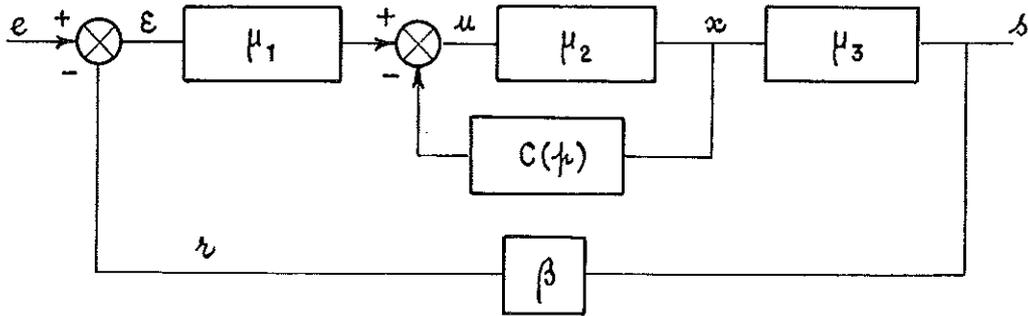
Notons que ce correcteur agit à la fois sur la précision statique, dynamique et sur la stabilité. En première approximation :

- l'action I annule l'erreur statique.
- l'action P augmente la précision dynamique.
- l'action D tend à stabiliser le système.

V.1.2. - Correction parallèle

Ce type de correcteur se greffe en parallèle sur un élément figé de la chaîne directe

$$u = f_1(\varepsilon) + f_2(x)$$



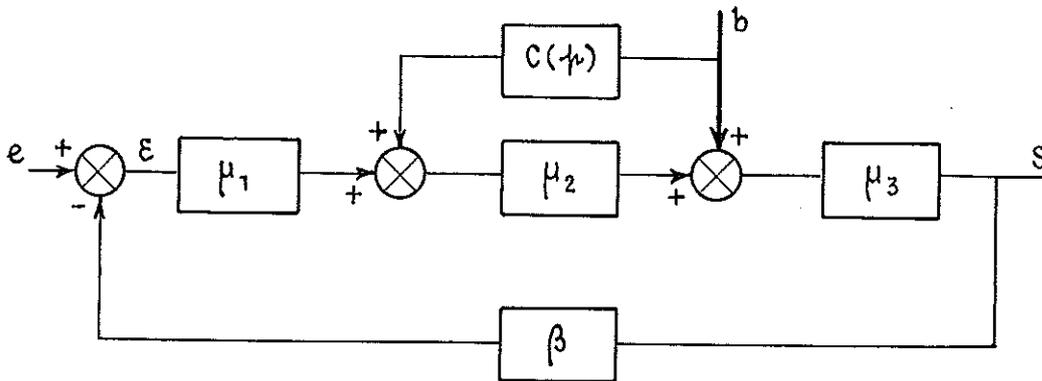
μ_1 caractérisant $f_1(\epsilon)$ peut être un correcteur série.

$f_2(x)$ caractérise l'action de la correction parallèle où x est une grandeur intermédiaire entre la commande et la sortie. Souvent $x = \frac{ds}{dt}$ et on dit avoir affaire à une correction tachymétrique.

Notons que ce correcteur agit essentiellement sur la stabilité et la précision dynamique et non sur l'erreur statique (ce correcteur ne peut pas introduire d'intégration).

V.1.3. - Correction par anticipation (compensateur) -

(a) Compensation des perturbations (entrée nulle).



Supposons que la perturbation b soit mesurable.

Il est alors possible - du moins théoriquement - d'éliminer l'influence de la perturbation b par l'intermédiaire d'un correcteur par anticipation $C(p)$ décrit sur le schéma ci-dessus.

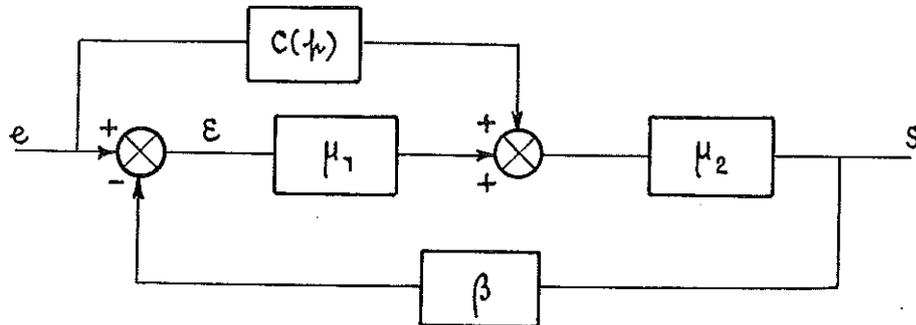
Il suffit, en effet, de choisir $C(p) = - \frac{1}{\mu_2(p)}$

Notons dans ce cas que la stabilité n'est pas affectée non plus que la précision vis-à-vis de l'entrée.

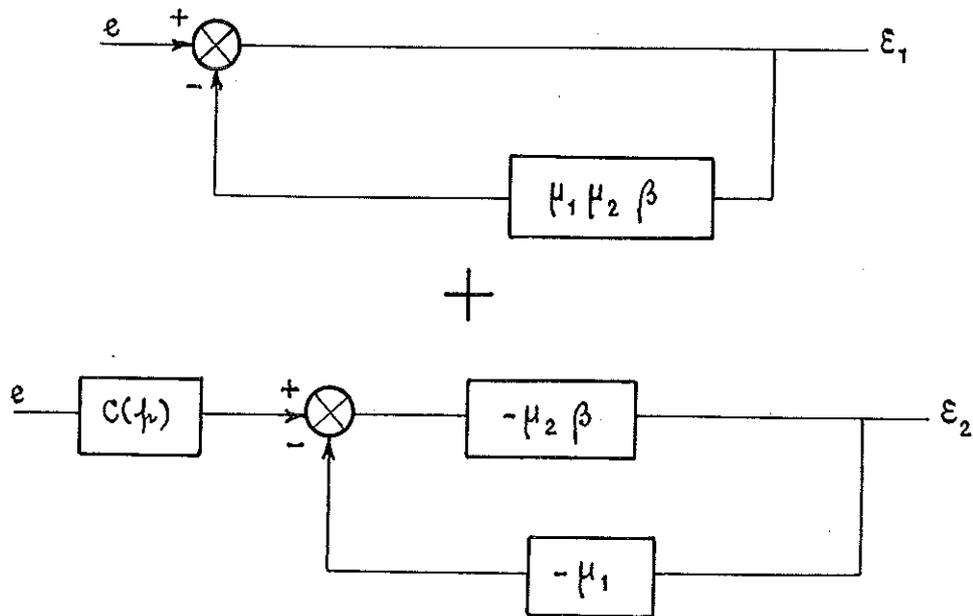
Le plus souvent, $\frac{1}{\mu_2(p)}$ n'est pas physiquement réalisable, ce qui conduit à adopter des formes approximatives de $\frac{1}{\mu_2}$. Il n'y a plus alors compensation parfaite du régime transitoire des perturbations.

Exemple : si $\mu_2(p) = \frac{K}{p}$, on prendra $C(p) = -\frac{1}{K} \frac{p}{1+\tau p}$ avec τ inférieur aux constantes de temps principales de μ_3 .

(b) Compensation de l'entrée (perturbation nulle) -



Ce schéma peut être considéré vis-à-vis de l'erreur comme la superposition des deux schémas suivants :



$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{E(p)}{1 + \mu_1 \mu_2 \beta} + \frac{E(p) [C(p)] [-\mu_2 \beta]}{1 + \mu_1 \mu_2 \beta}$$

Afin d'annuler l'erreur vis-à-vis de l'entrée, il suffit de choisir

$$C(p) = \frac{1}{\mu_2 \beta}$$

On notera que, dans ce cas, le système asservi suit parfaitement la loi d'entrée sans introduction d'intégration dans la chaîne directe. La stabilité du système n'est pas modifiée non plus que l'influence des perturbations vis-à-vis de l'erreur. Le plus souvent $\frac{1}{\mu_2 \beta}$ n'est pas physiquement réalisable. La compensation ne sera donc pas parfaite dans les régimes transitoires.

V.1.4. - Conclusions -

- (a) Les correcteurs par anticipation - lorsqu'ils sont réalisables - ne modifient pas la stabilité de la boucle et compensent soit l'erreur due à l'entrée, soit l'effet d'une perturbation.

Dans un cas complexe (plusieurs perturbations dont certaines non mesurables), la mise en oeuvre de ces compensateurs peut être lourde et imparfaite.

- (b) Les correcteurs parallèles modifient en général un élément de la chaîne directe sans introduire d'intégration. Ils peuvent être utilisés soit pour améliorer la stabilité, soit encore pour linéariser le bloc sur lequel il agit.

- (c) Les correcteurs séries modifient à la fois la stabilité et la précision vis-à-vis de l'entrée et des perturbations. Ce mode de correction est le plus important.

V.2. - CORRECTION SERIE -

V.2.1. - Correction par avance de phase - Correction proportionnelle dérivée (P.D.) -

- (a) Fonction de transfert

Un correcteur à actions proportionnelle et dérivée a pour fonction de transfert

$$C(p) = K(1 + T_d p)$$

L'action dérivée n'est pas physiquement réalisable.

On l'approxime par une transmittance de la forme :

$$\frac{T_d p}{1 + \tau p} \quad \tau \ll T_d$$

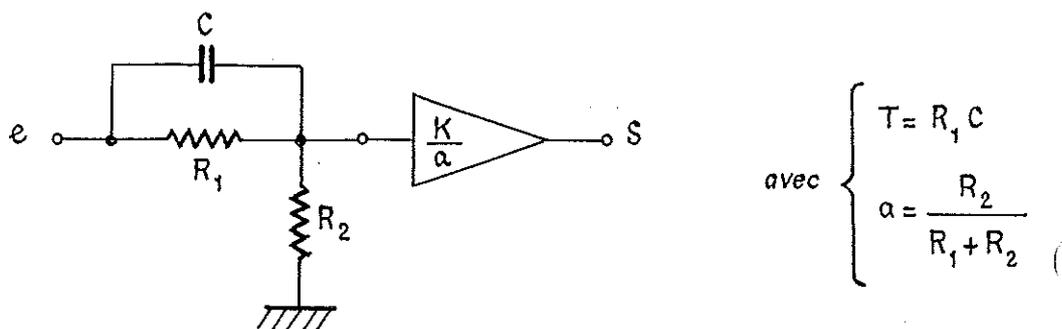
Le nouveau correcteur a alors pour transmittance :

$$C(p) = K \left(1 + \frac{T_d p}{1 + \tau p} \right) \approx K \left(\frac{1 + T_d p}{1 + \tau p} \right)$$

D'une manière générale, on appelle correcteur à avance de phase un correcteur de transmittance

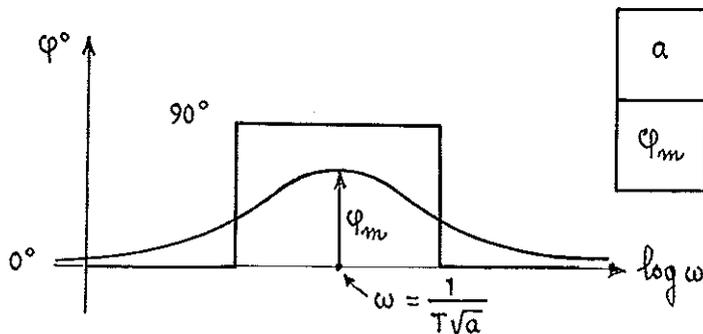
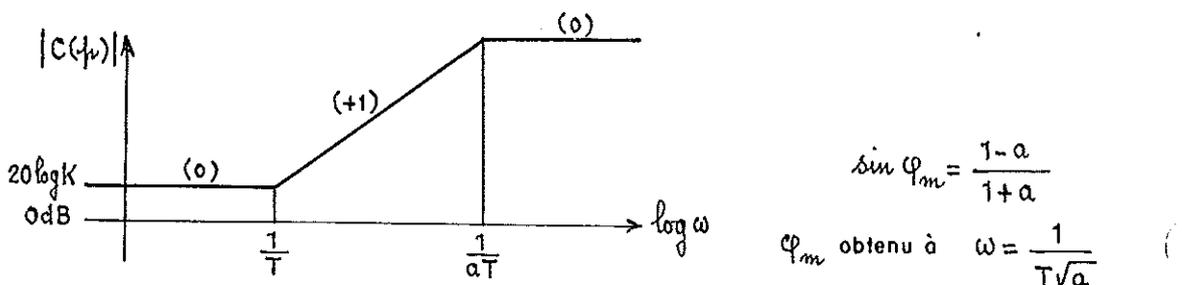
$$C(\omega) = K \frac{1+T\omega}{1+aT\omega} \quad \text{avec } a < 1$$

Cette correction peut être réalisée par le circuit suivant :



On remarquera que la cellule RC, seule, apporte une atténuation de a aux faibles pulsations, ce qui justifie le gain $\frac{K}{a}$ suivant le réseau passif.

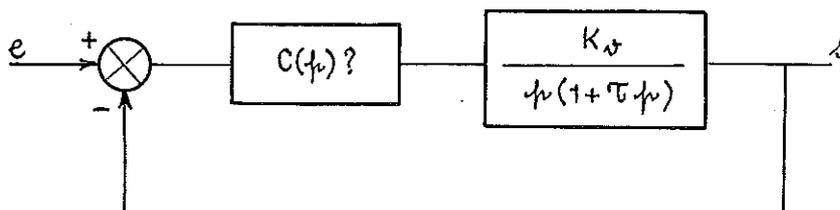
Plan de Bode



a	1/4	1/6	1/8	1/10	1/12
φ_m	37°	45°	51°	55°	58°

(b) Principe d'action d'un correcteur à avance de phase.

Il n'existe pas de méthode générale de réglage d'un tel correcteur. Voyons sur un cas particulier fréquent les problèmes posés par ce réglage



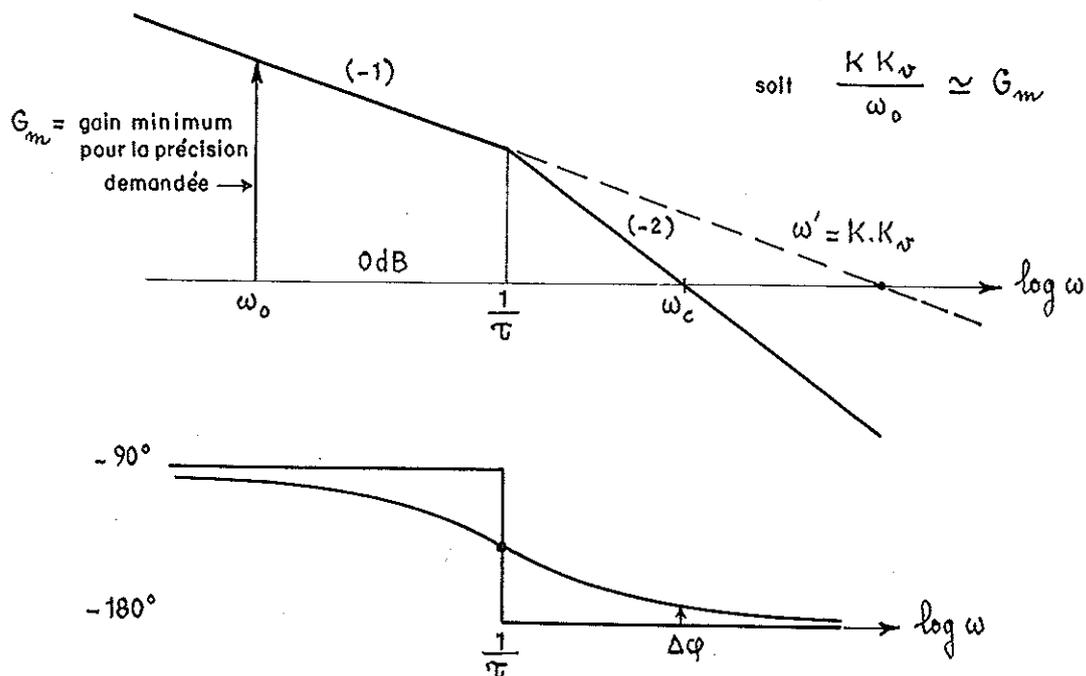
La B.O. du système non corrigé présente une intégration. Une action intégrale est donc inutile.

Supposons que l'on veuille un temps de réponse t_x , en boucle fermée, minimum, ou bien une précision dynamique donnée à la pulsation $\omega_0 \ll \frac{1}{T}$.

On est alors conduit à introduire un gain K (action proportionnelle) dans la chaîne.

$$\mu\beta = \frac{K K_v}{p(1+T_p)}, \text{ avec } K \text{ tel que}$$

$$\left| \frac{K K_v}{p(1+T_p)} \right|_{p=j\omega_0} = G_m \text{ et } \omega_0 \ll \frac{1}{T}$$

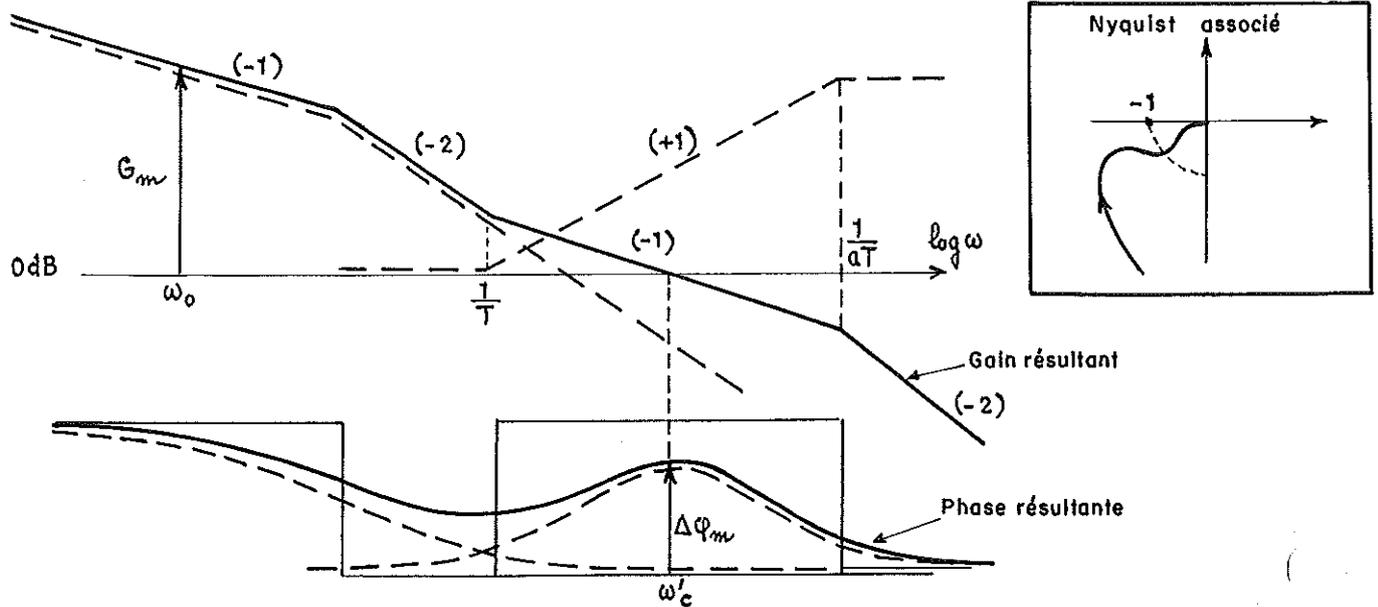


On constate sur la construction ci-dessus que la marge de phase est insuffisante. Une correction est alors nécessaire, correction à avance de phase par exemple.

Ce correcteur étant en série avec $\mu\beta$, il y a addition des courbes de gain et de phase dans le plan de Bode.

$$C(p) = K \frac{1+T_p p}{1+a T_p p}$$

(le gain K est pris en compte dans le tracé précédent).



Remarques :

On constate que le système en B.O. sans correction ne déphase pas en deçà de -180° . En conséquence, un correcteur à avance de phase choisi pour $\alpha = \frac{1}{6}$, s'il est convenablement placé, peut apporter une avance de phase de 45° , suffisant à assurer un degré de stabilité convenable au système.

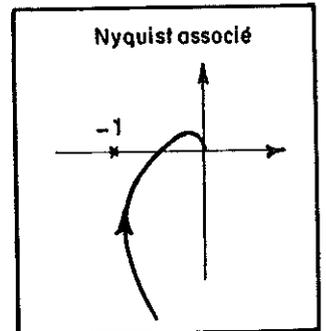
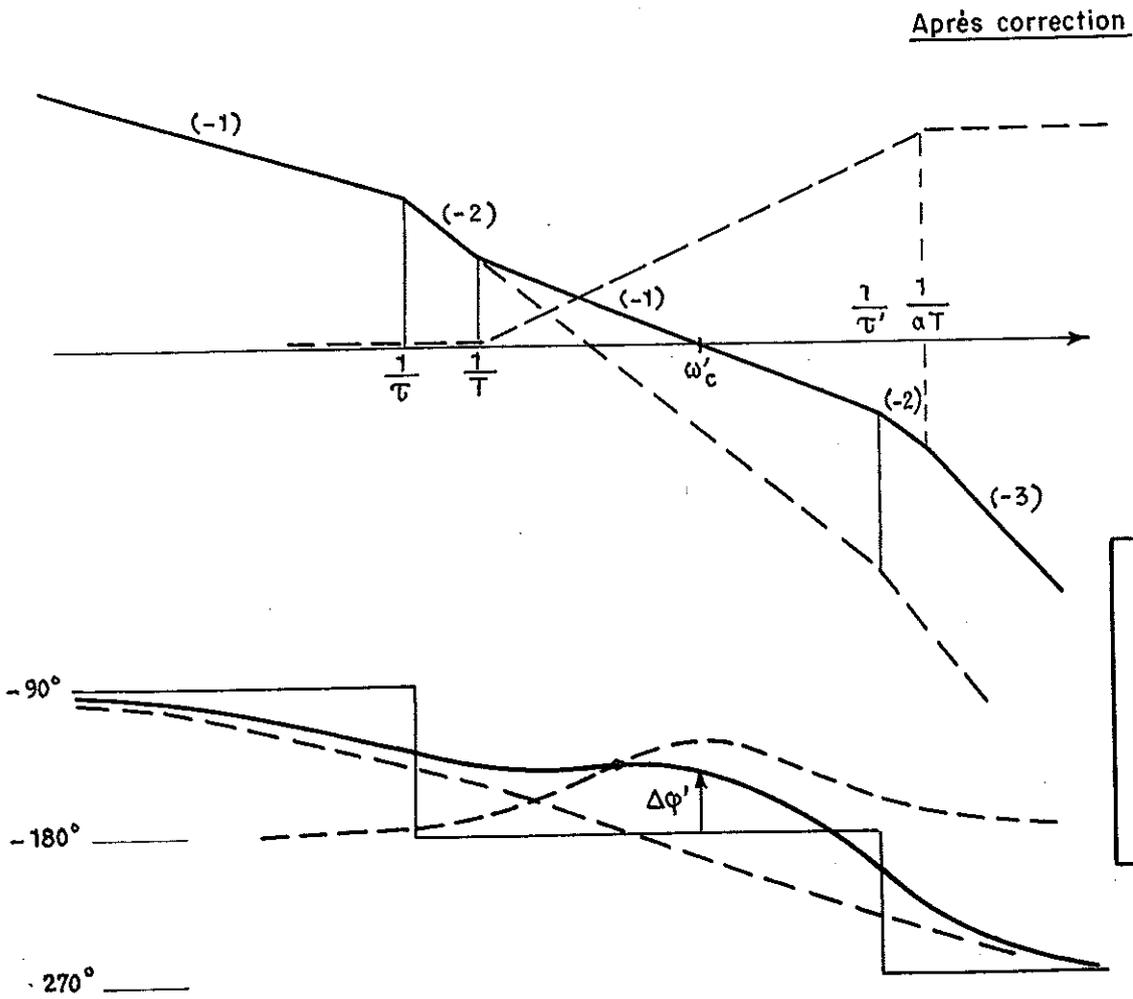
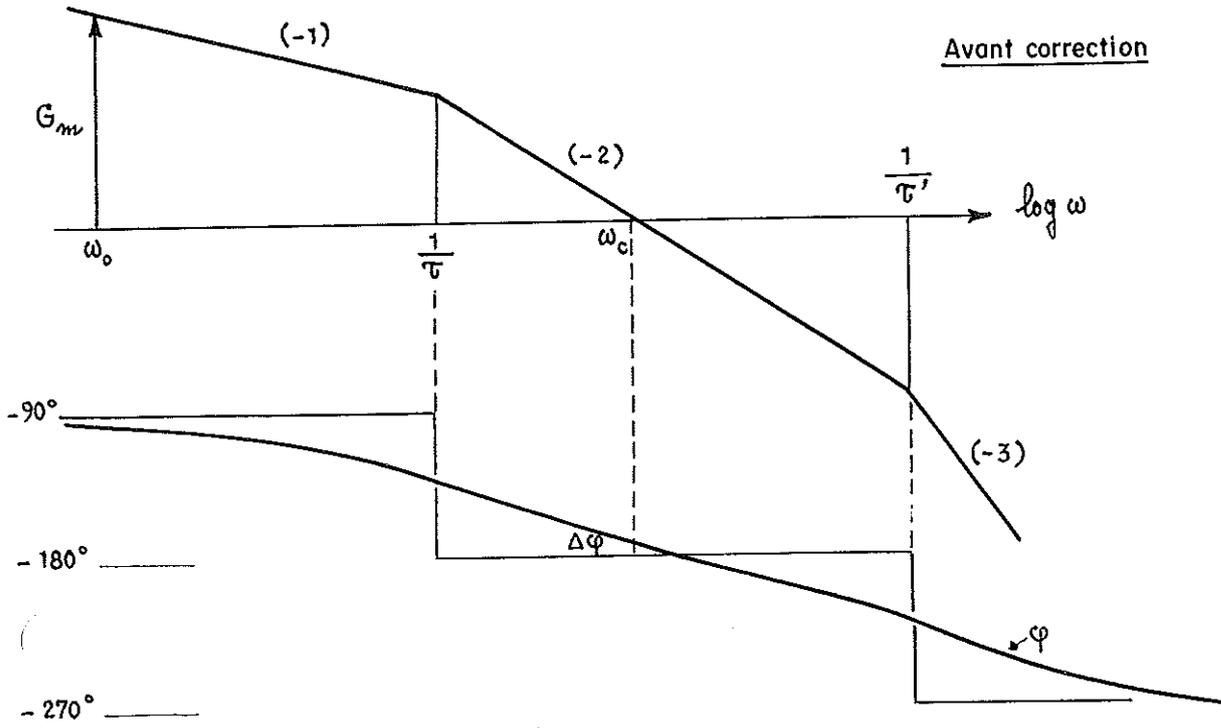
Il s'agit alors de couper l'axe 0 dB à la pulsation $\omega'_c = \frac{1}{\sqrt{\alpha T}}$ où l'avance de phase du correcteur est maximale (voir tableau) (milieu en représentation de Bode du segment $\frac{1}{T}, \frac{1}{aT}$). Le paramètre α étant choisi ainsi que la position relative de ω'_c , le réglage du correcteur se fait par approximations successives sur la courbe de gain.

La marge de phase résultante se calcule en additionnant la phase résiduelle du système non corrigé à ω'_c par rapport à -180° et le φ_m du correcteur. Notons, dans cet exemple, que la phase résiduelle par rapport à -180° est toujours positive.

Il n'en est pas toujours ainsi, en particulier, lorsque la transmittance en B.O. du système non corrigé, déphase en deçà de -180° .

Exemple :

$$\frac{K}{\mu(1+\tau\mu)(1+\tau'\mu)}$$



$$\Delta\varphi' = \varphi_m + \left\{ 180^\circ - \varphi(\omega'_c) \right\}$$

le terme entre crochet est ici négatif. La marge de phase obtenue est inférieure au φ_m du correcteur. Il apparaît donc nécessaire de choisir un α beaucoup plus faible que dans le premier cas pour augmenter φ_m .

Lorsque la courbe de phase du système avant correction décroît trop rapidement, l'avance de phase apportée par le correcteur risque d'être considérablement réduite au point ω'_c . La correction par avance de phase s'avère alors insuffisante.

③ Conclusions -

Le correcteur à avance de phase :

- augmente la bande passante ($\omega'_c > \omega_c$).
- apporte en ω'_c une avance de phase φ_m définie par $\sin \varphi_m = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$ s'il est judicieusement placé ($\omega'_c = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$). Ce choix de ω'_c évite la construction complète de la phase pour déterminer la marge de phase obtenue.

Lorsque la correction est parfaitement figée, afin de déterminer les performances finales du système corrigé en boucle fermée, une construction complète du module et de la phase est nécessaire dans le plan de Bode. Un tracé dans l'abaque de Nichols permettra d'obtenir alors la transmittance en boucle fermée.

V.2.2. - Correction par retard de phase - Correction proportionnelle - Intégrale (P.I) -

③ Fonction de transfert

Un correcteur à action proportionnelle et intégrale a pour fonction de transfert :

$$C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right) = K \left(\frac{1 + T_i p}{T_i p} \right)$$

Ce correcteur admet une forme approchée dès que l'intégration n'est pas pure :

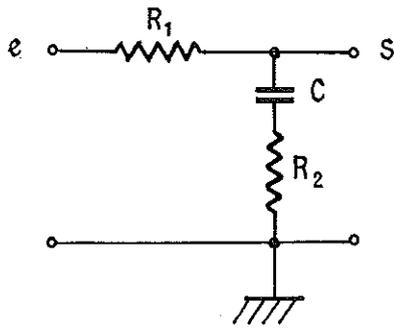
$$C'(p) = k \left(1 + \frac{1}{T_i p + \frac{1}{\alpha}} \right) \simeq ka \frac{(1 + T_i p)}{(1 + \alpha T_i p)}$$

avec $\alpha \gg 1$.

D'une manière générale, on appelle correcteur à retard de phase un correcteur de transmittance

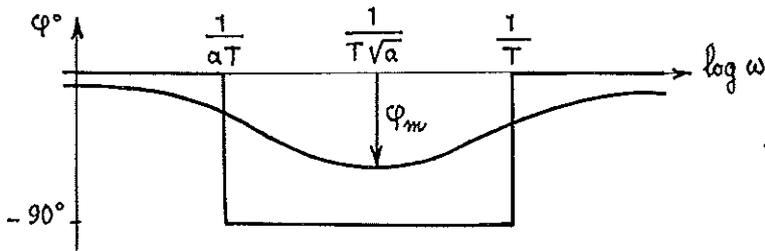
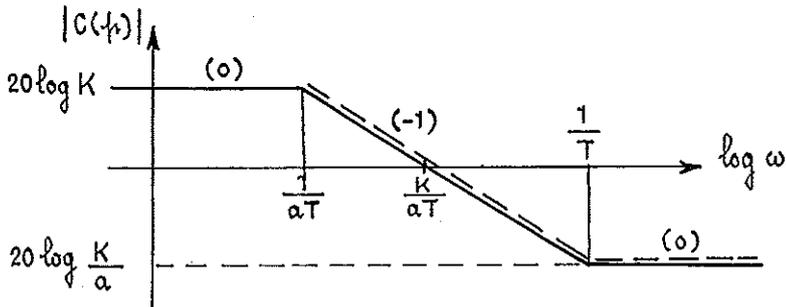
$$C(p) = K \frac{1 + T_i p}{1 + \alpha T_i p} \quad \text{avec } \alpha > 1$$

Cette correction peut être réalisée par le circuit suivant :



avec
$$\begin{cases} T = R_2 C \\ \alpha = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \end{cases}$$
 et $K = 1$

Plan de Bode : Correcteur à retard de phase

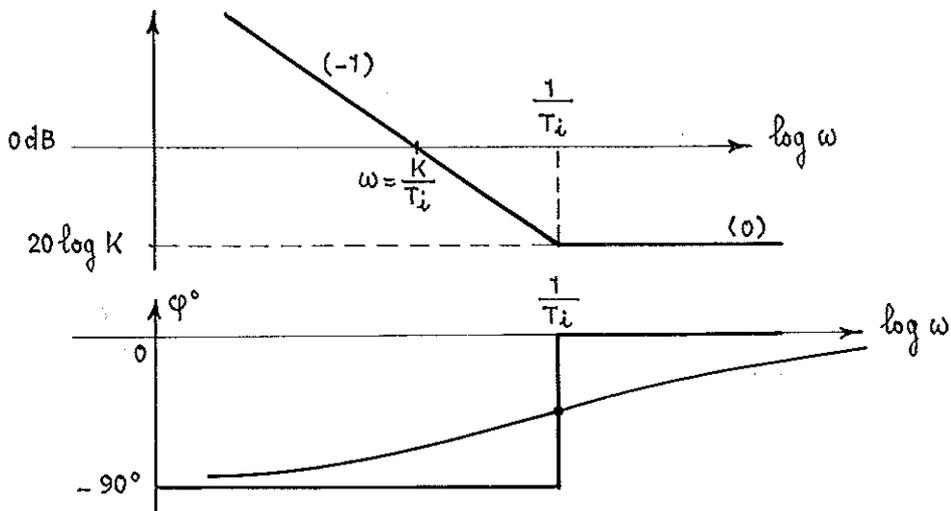


$$\sin \varphi_m = \frac{1-a}{1+a} \quad \alpha > 1$$

$$\Rightarrow \varphi_m < 0$$

$1/a$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{12}$
φ_m	-37°	-45°	-51°	-55°	-58°

Correcteur P.I.



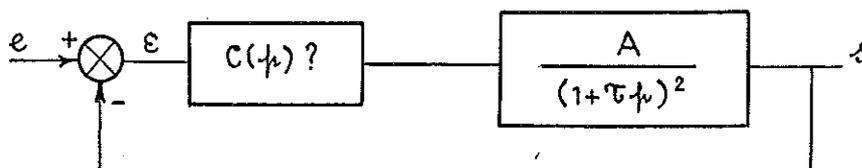
(b) Principe d'action de ces correcteurs -

Ces corrections ont pour effet d'augmenter le gain aux faibles pulsations et d'ainsi améliorer la précision statique sans modifier pour autant le comportement aux pulsations élevées.

De plus, le correcteur à retard de phase permet de faire chuter le gain aux pulsations élevées lorsqu'il n'est pas modifié aux faibles pulsations.

Voyons, à l'aide de deux exemples, l'effet de ces deux correcteurs.

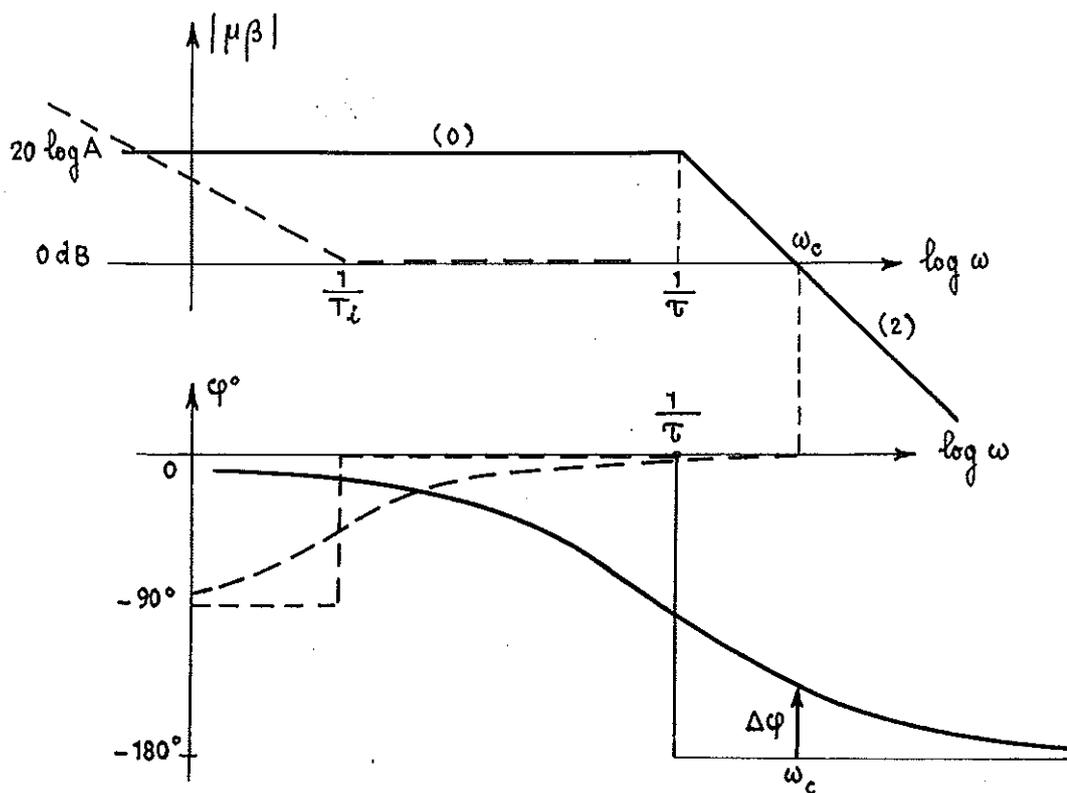
(α) Système sans intégration



Performances désirées :

- erreur statique nulle
- bande passante imposée : $\{0, \omega_c\}$
- degré de stabilité $\Delta\varphi$ de 45° à 50°

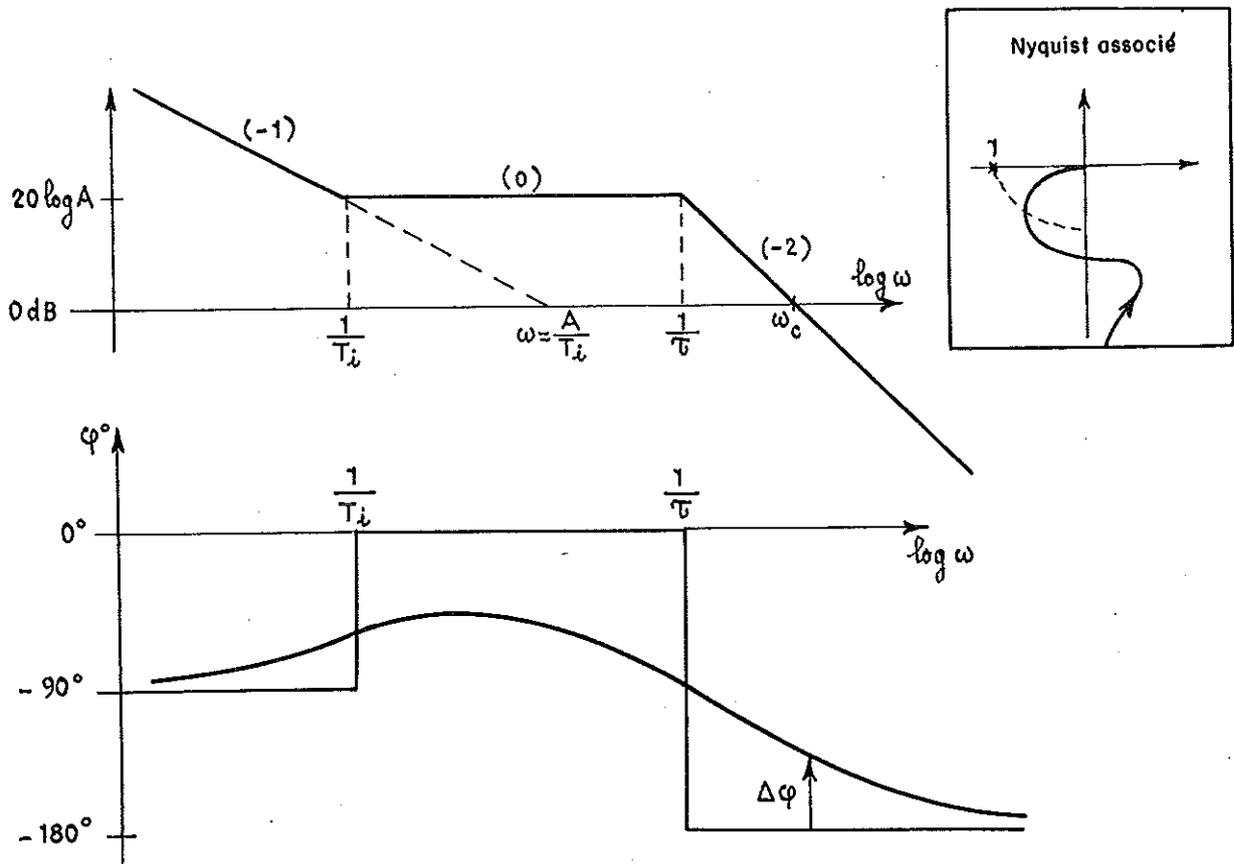
B.O. sans correction :



Une action intégrale est nécessaire pour annuler l'erreur statique. Elle ne peut pas toutefois être seule car alors le système ne serait plus stable.

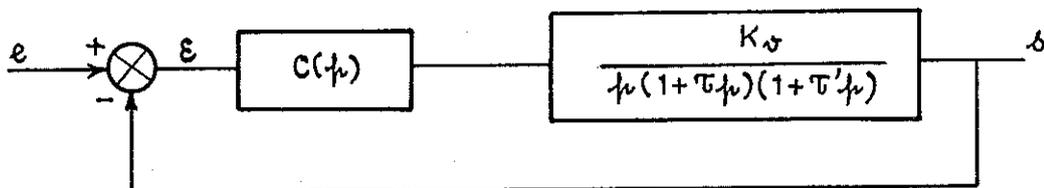
Introduisons un correcteur PI (représenté en trait pointillé sur la figure ci-dessus) tel que $\frac{1}{T_i}$ soit voisin de $\frac{\omega_c}{10}$ de manière à ne pas modifier sensiblement $\Delta\varphi$. La transmittance est dans ce cas $1 + \frac{1}{T_i p}$.

La courbe corrigée en boucle ouverte a pour allure :



Ce correcteur confère à la boucle fermée les performances désirées.

ⓑ Systeme intégrateur



Performances désirées

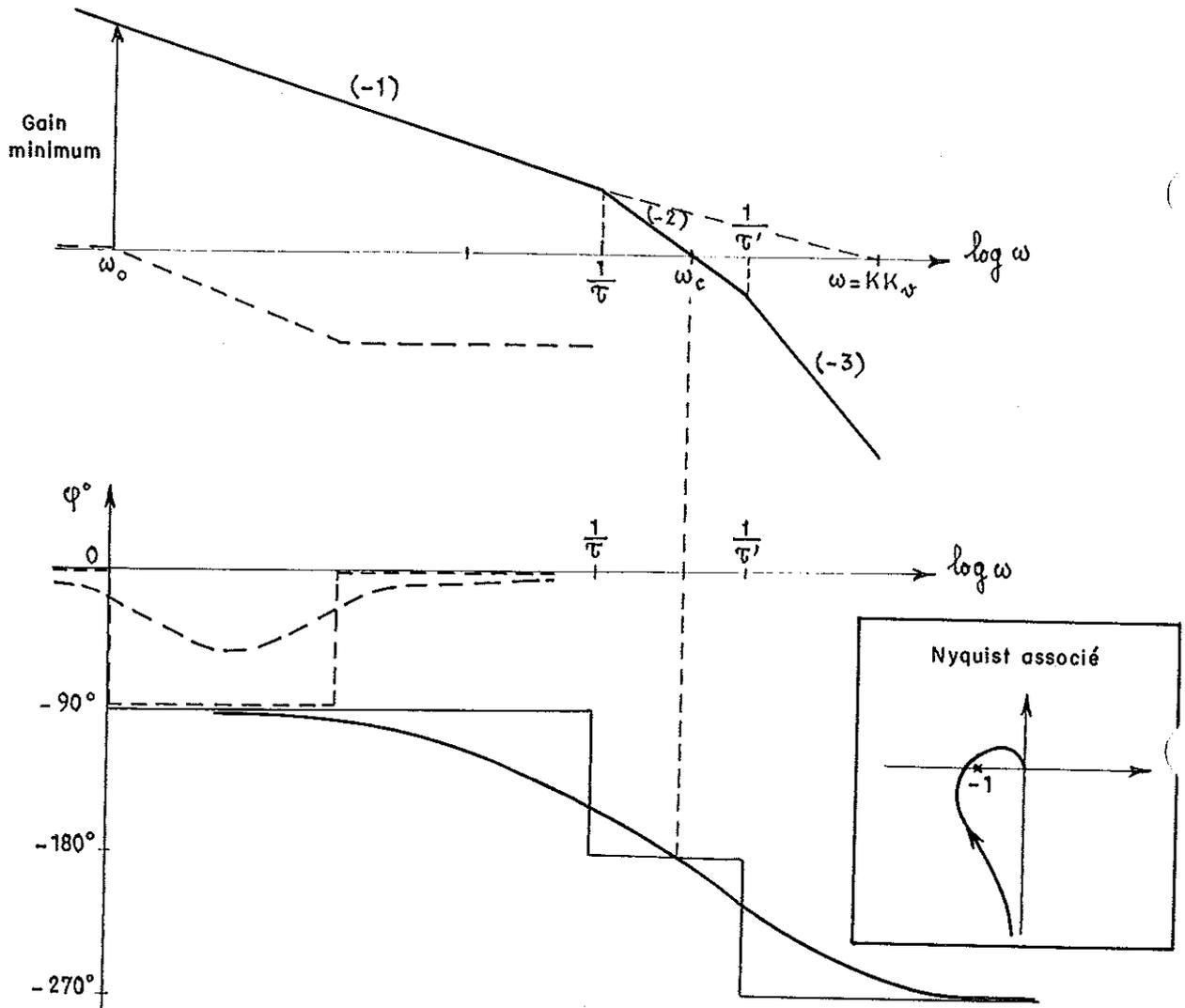
- erreur statique nulle

- précision dynamique imposée à $\omega_0 \ll \frac{1}{T}$
(d'où un gain minimum à ω_0)

- degré de stabilité: $\Delta\varphi$ de 45° à 50°

L'erreur statique vis-à-vis de l'entrée est nulle (présence d'une intégration dans la chaîne), en l'absence de perturbations.

On trouvera ci dessous le tracé de la B.O., permettant de définir l'action proportionnelle K minimale, assurant la précision désirée.



Pour corriger un tel système, une correction par avance de phase est impossible car la phase de la B.O. décroît trop rapidement au voisinage de ω_c . Comme, d'autre part, l'action intégrale est inutile, essayons un correcteur à retard de phase.

Ce correcteur ne doit pas affaiblir le gain en deçà de ω_0 , d'où $\frac{1}{\alpha T} \simeq \omega_0$. La correction sera d'autant plus efficace que la courbe de gain coupera l'axe 0 dB avec un segment de pente (-1) le plus large possible et au voisinage de son milieu.

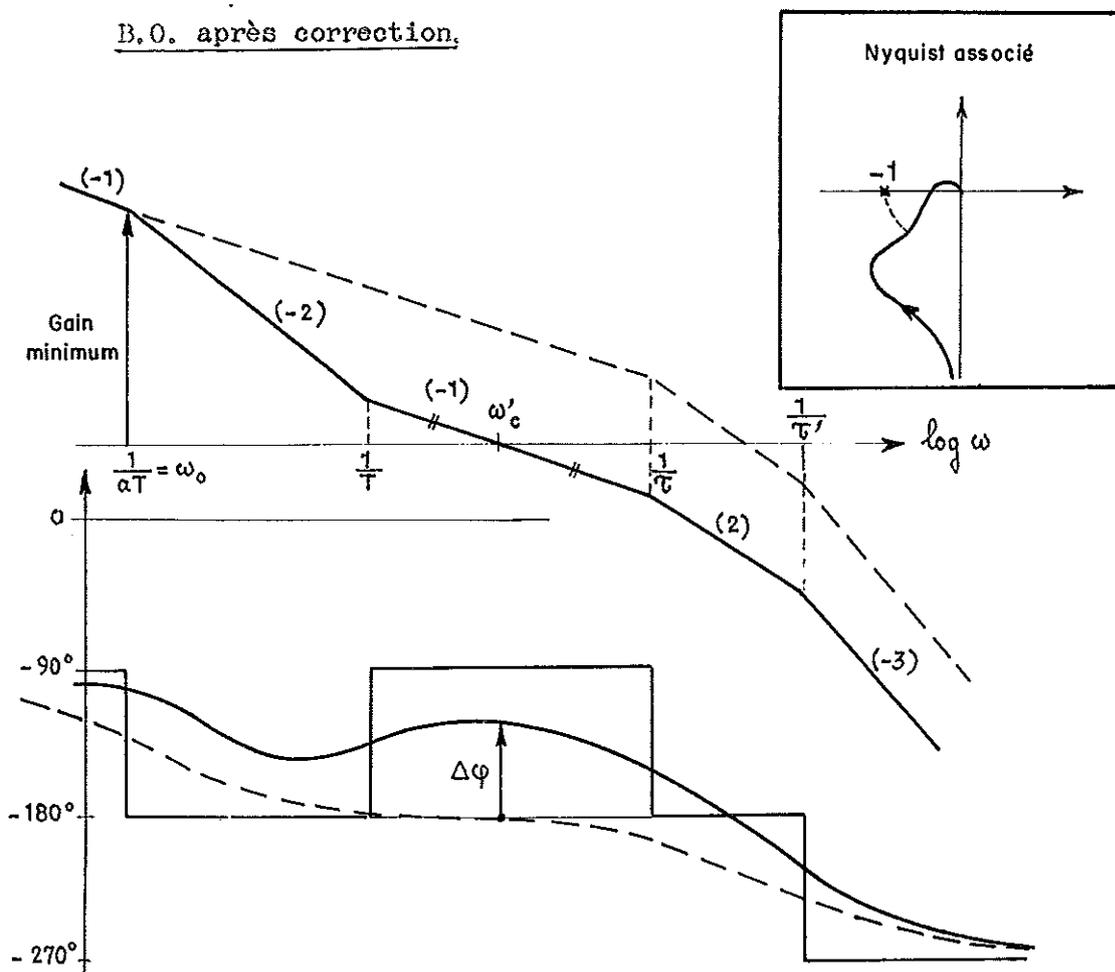
Compte tenu de ces considérations, on adopte pour correcteur

$$C(p) = K \frac{1 + T_1 p}{1 + \alpha T_1 p}$$

avec K défini plus haut (action proportionnelle) et $\frac{1}{\alpha T}$ voisin de ω_0 . Le paramètre α (ou $\frac{1}{T}$) se déterminera par essais successifs. La marge de phase après correction peut être appréciée de la façon suivante :

- calculer le rapport $\frac{T}{T'}$ caractérisant la "longueur" du segment de pente (-1) défini plus haut.
- si la nouvelle pulsation de coupure ω'_c , choisie voisine du milieu géométrique de $(\frac{1}{T}, \frac{1}{T'})$, est très supérieure à ω_0 ($\omega_c \geq 10 \omega_0$) et très inférieure à $\frac{1}{T'}$ ($\omega_c \leq \frac{1}{10 T'}$) alors, une approximation de la marge de phase est donnée en reportant le rapport $\frac{T}{T'}$ dans le tableau cité pour le correcteur à avance de phase.

B.O. après correction.



Sur le tracé de phase, figurent en pointillé les courbes relatives aux cassures (- 1) à (- 2) en ω_0 et (- 2) à (- 3) en $\frac{1}{T}$.

On remarque qu'au voisinage de ω'_c la contribution de ces deux cassures est négligeable.

Tout se passe comme si, seules les pentes (- 2), (- 1) puis (- 2) subsistaient vis-à-vis de la phase.

Ce tracé est celui d'un double intégrateur en série avec un correcteur à avance de phase.

Notons que la correction par retard de phase a abouti dans cet exemple précis parce que le rapport entre $\frac{1}{T}$ et ω_0 était élevé. Ce n'est pas, en général, le cas (voir correction à actions combinées).

③ Conclusions

Le correcteur à retard de phase :

- diminue la bande passante ($\omega'_c < \omega_c$).
- diminue l'erreur statique (retard de phase pour les systèmes non intégrateurs) ou l'annule (P.I. pour les systèmes non intégrateurs ou intégrateurs avec perturbations).

Là encore, une fois la correction figée, il est nécessaire de construire avec précision la B.O. totale pour en déduire les performances en B.F. Notons que ce type de correction peut conduire à des systèmes conditionnellement stables.

V.2.3. - Correction par actions combinées - Correction proportionnelle intégrale dérivée (P.I.D) -

① Fonction de transfert -

Un correcteur P.I.D. idéal a pour fonction de transfert

$$C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right) = K \left(\frac{1 + T_i p + T_i T_d p^2}{T_i p} \right)$$

Ce correcteur admet une représentation approchée dès que l'intégration et la dérivation ne sont pas pures :

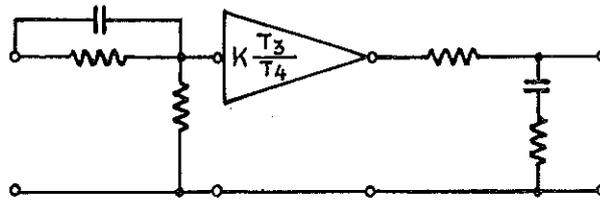
$$C'(p) = k \left(1 + \frac{1}{T_i p + \frac{1}{a}} + \frac{T_d p}{1 + \tau p} \right) \quad \begin{array}{l} \tau \ll T_d \\ \frac{1}{a} \ll 1 \end{array}$$

$$C'(p) \simeq k a \frac{1 + T_i p + T_i T_d p^2}{(1 + a T_i p)(1 + \tau p)}$$

D'une manière générale, on appelle correcteur à actions combinées avance-retard un correcteur de transmittance

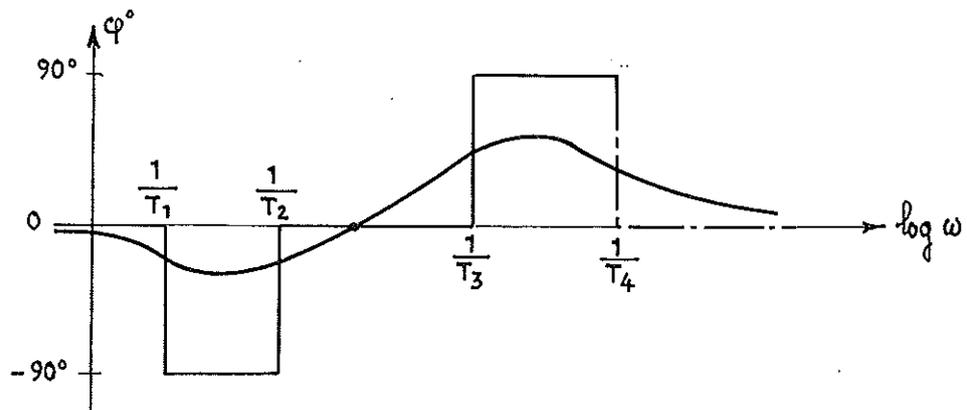
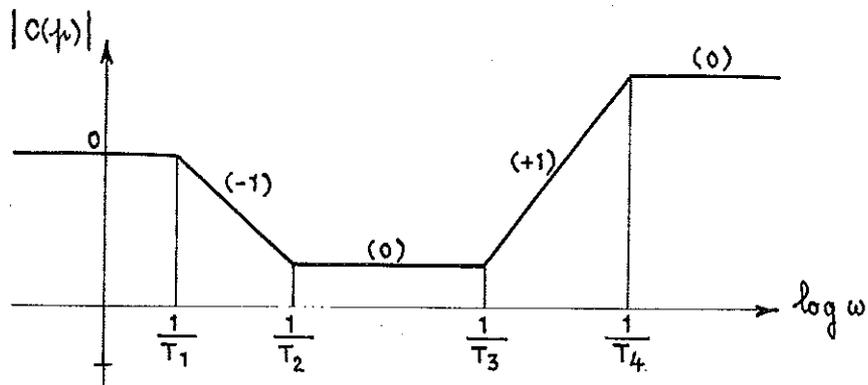
$$C(p) = K \frac{(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)}{(1 + T_1 p)(1 + T_4 p)} \quad \text{avec } T_1 > T_2 > T_3 > T_4$$

Ce correcteur est obtenu en mettant en série un correcteur à retard de phase $K_1 \frac{(1 + T_2 p)}{(1 + T_1 p)}$ et un correcteur à avance de phase $K_2 \left(\frac{1 + T_3 p}{1 + T_4 p} \right)$ avec $K_1 K_2 = K$

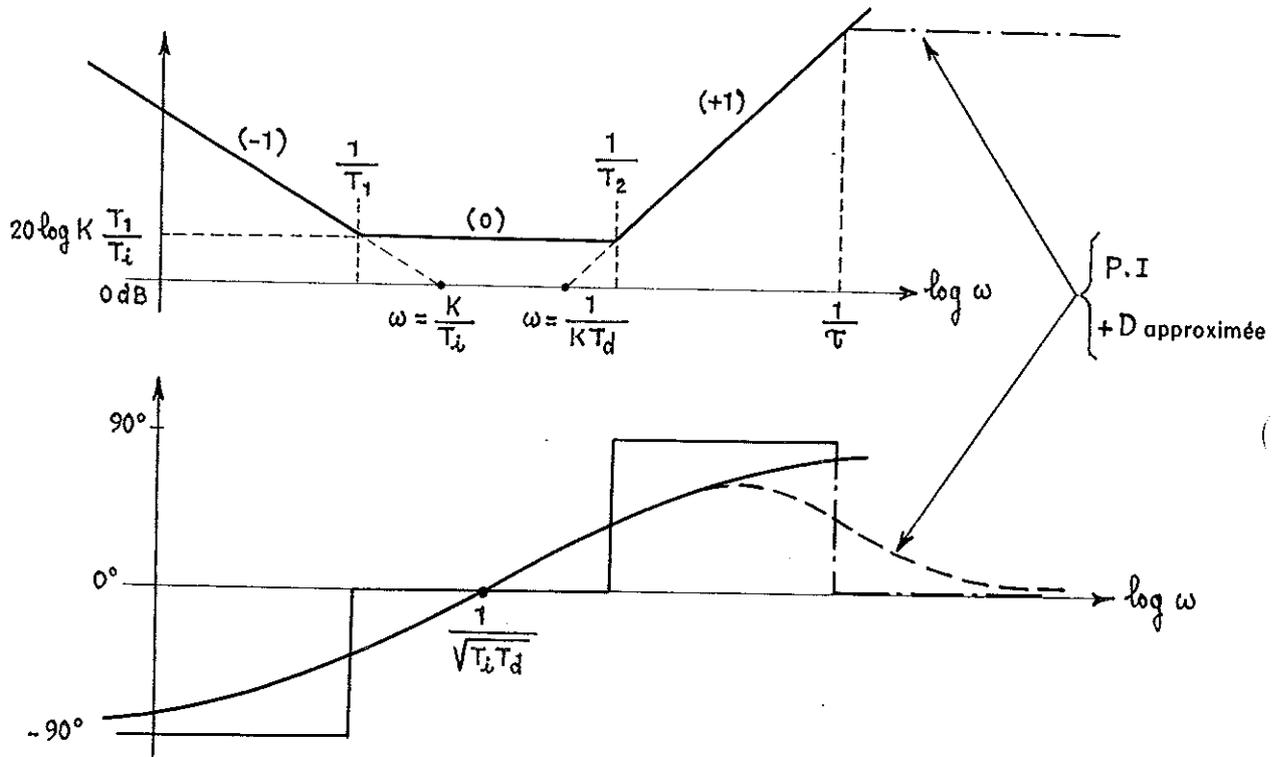


Plan de Bode -

Correcteur à actions combinées



Correcteur P.I.D. (idéal) dans le cas où $T_i \geq 4T_d$ (zéros réels en $\frac{1}{T_1}$ et $\frac{1}{T_2}$ avec $T_1 = \frac{T_i}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4T_d}{T_i}} \right)$
 $T_2 = \frac{T_i}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4T_d}{T_i}} \right)$

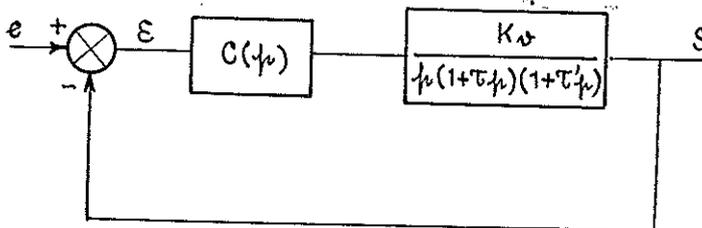


En pratique l'action dérivée sera toujours approximée par $\frac{T_d p}{1 + T_d p}$ (voir figure).

(b) Principe d'action de ces correcteurs.

Ces correcteurs combinent les actions précédemment étudiées. Ils sont utilisés lorsque les correcteurs à simple action ne permettent pas d'obtenir les performances désirées.

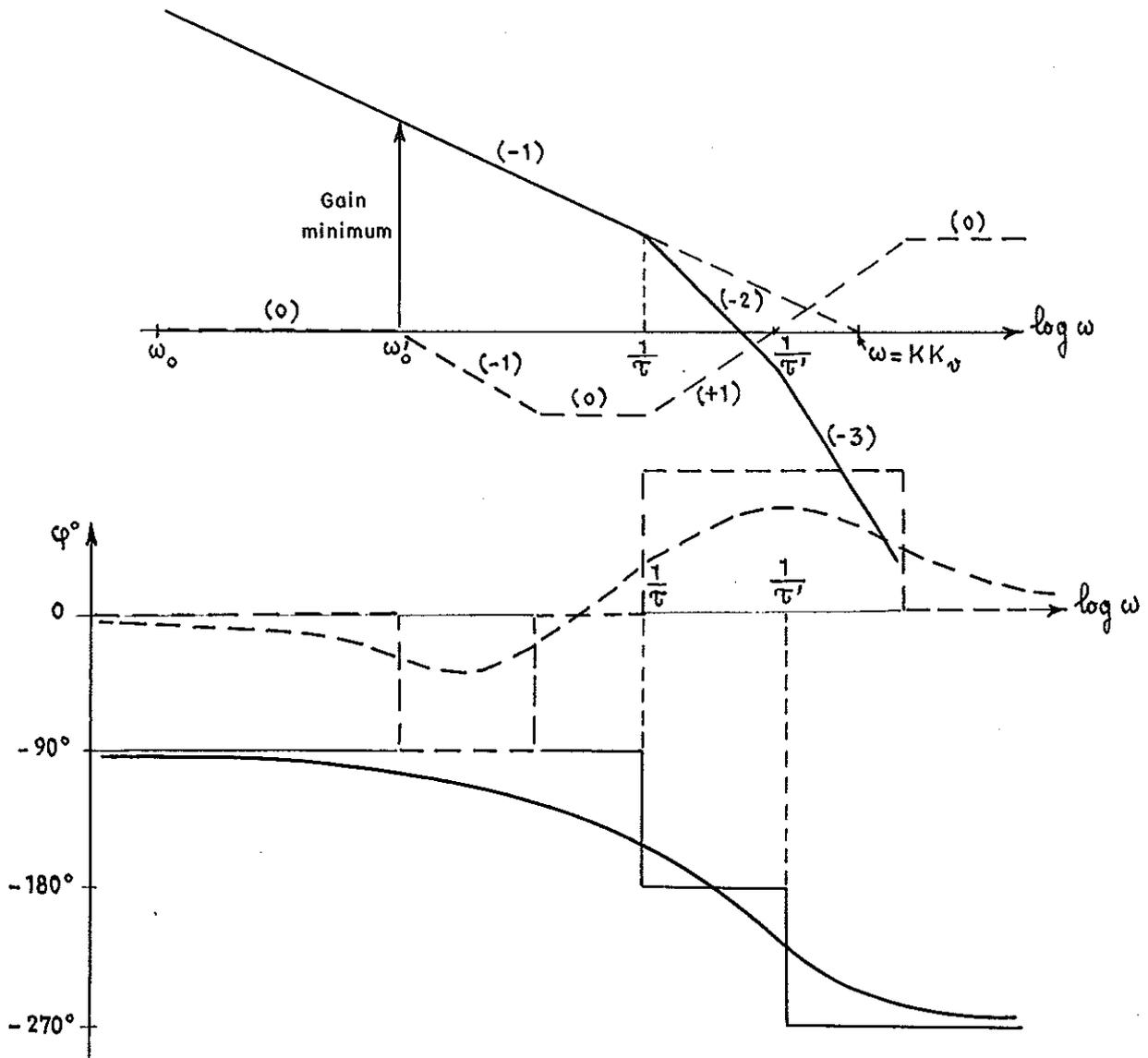
(a) 1^{er} exemple



Performances désirées :

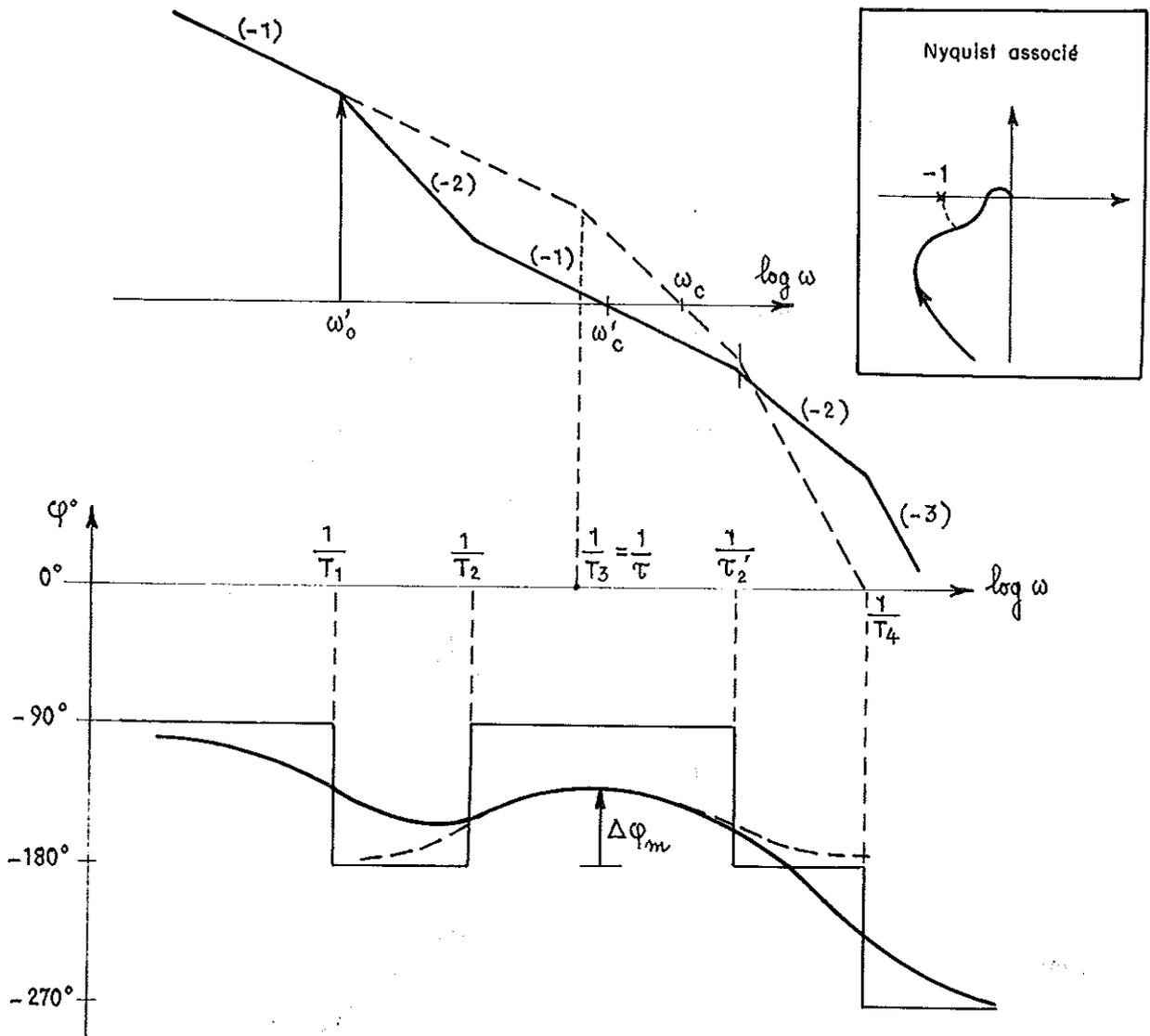
- erreur statique nulle
- précision dynamique imposée à ω'_0 (proche de $\frac{1}{T}$)
- $\Delta\varphi \sim 45^\circ$ à 50°

Exemple déjà cité au paragraphe V.2.2.b.



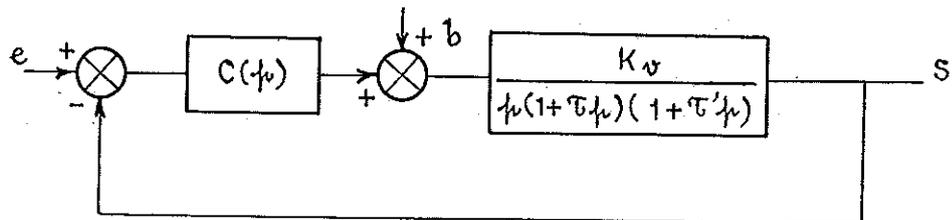
La correction par retard de phase est ici inefficace (proximité des pulsations ω_0' et $\frac{1}{\tau}$).

Le correcteur ayant l'allure représentée en pointillé sur la figure précédente, la B.O. corrigée se présente sous la forme suivante :



On peut estimer la marge de phase du système corrigé, si ω'_c est voisin du milieu du segment de pente (-1), en se reportant au tableau du circuit à avance de phase. Ceci est d'autant plus justifié, dans le cas présent, que $\omega'_c > 10\omega_0$ et $\omega'_c < \frac{1}{10T_4}$.

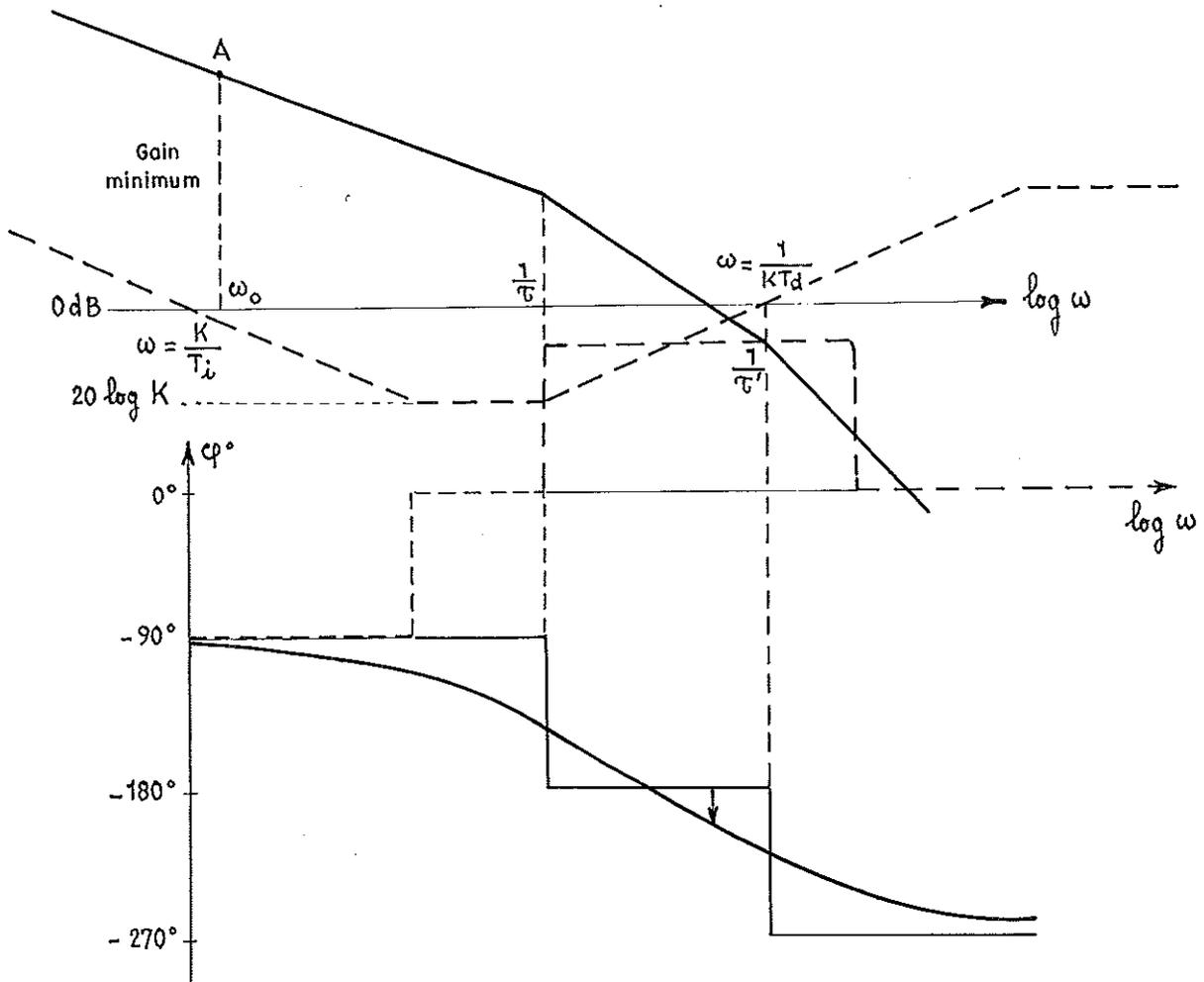
ⓑ Système intégrateur perturbé (ex : régulation de niveau avec perturbation de débit)



Performances désirées :

- erreur statique nulle vis-à-vis de la consigne et de la perturbation .
- marge de phase $\Delta\varphi \simeq 45^\circ$ à 50°
- précision dynamique imposée à ω_0 .

B.O. sans correction.



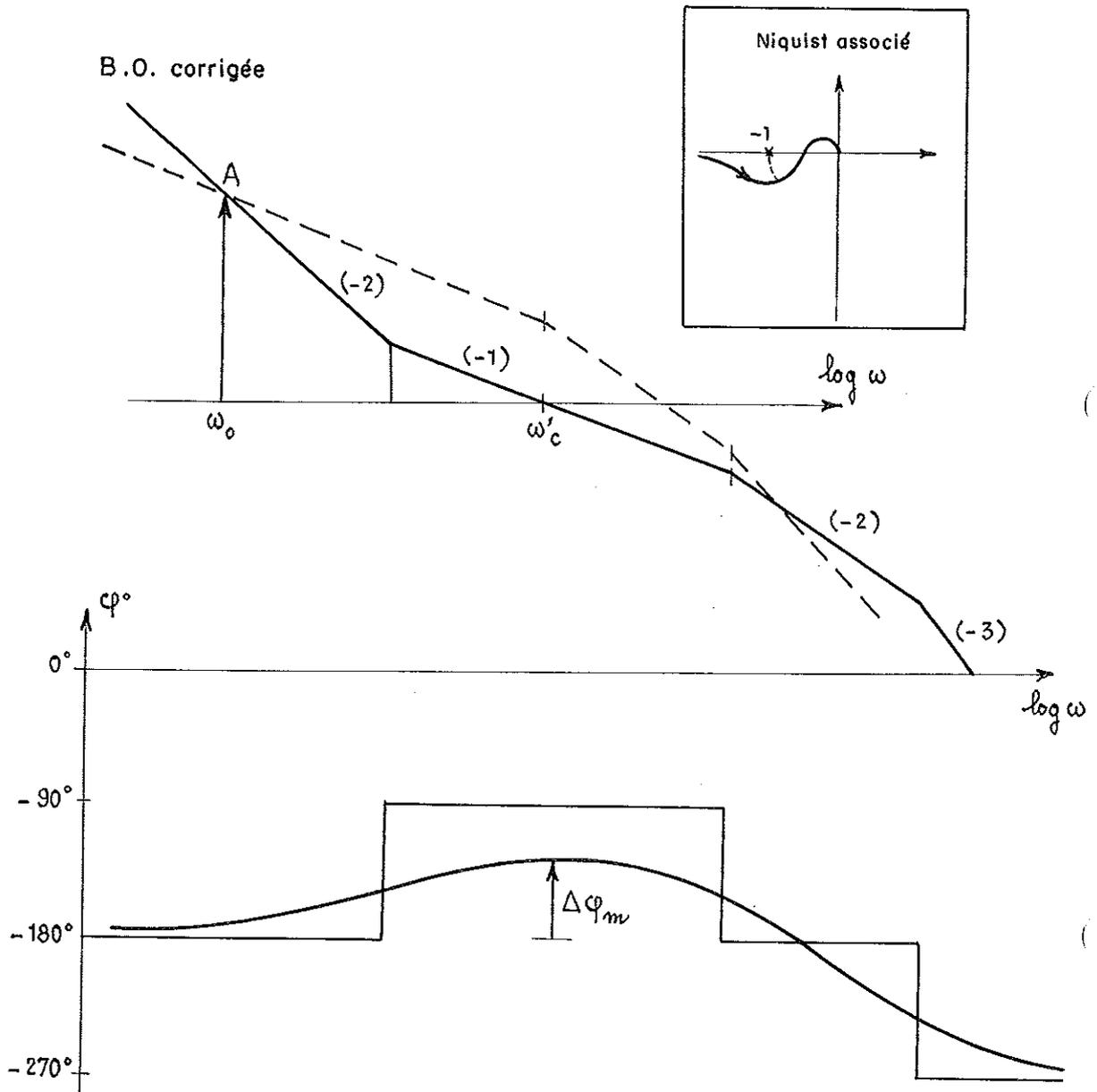
Afin d'annuler l'erreur statique vis-à-vis de la perturbation, nous devons introduire une action intégrale dans le correcteur $C(\frac{1}{p})$.

La proximité des pulsations $\omega_0, \frac{1}{\tau}, \frac{1}{\tau'}$ nous interdit l'utilisation d'un correcteur P.I.

Essayons un correcteur P.I.D.

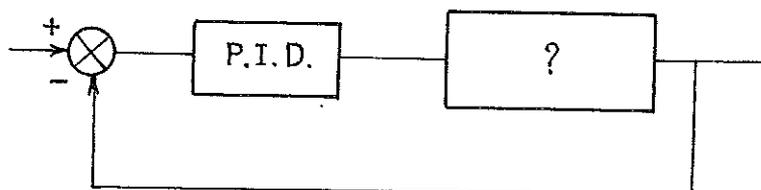
La double intégration conduit à un tracé de pente -2 aux faibles pulsations devant passer par le point A (gain minimum à ω_0).

D'autre part, la marge de phase impose de couper l'axe 0 dB avec un segment de pente (-1) sur une largeur convenable et poursuivre par une pente (-2) d'où le correcteur choisi (en pointillé sur la figure précédente).



Mêmes remarques que précédemment sur l'estimation de la marge de phase.

⊗ Système dont la transmittance est inconnue.



Dans certains cas, la transmittance d'un système étant inconnue, le réglage d'un correcteur P.I.D. ne peut pas faire appel aux méthodes énoncées précédemment. Il existe alors des méthodes expérimentales de réglage. Retenons la méthode de Ziegler-Nichols.

Marche à suivre :

- annuler les actions intégrales ($T_i = \infty$) et dérivée ($T_d = 0$) du correcteur placé dans la boucle fermée.
- augmenter le gain K de l'action proportionnelle jusqu'à l'apparition d'oscillations.
- relever la période T_o exprimée en secondes des oscillations et le gain limite K_M .
- régler le correcteur avec

$$K = 0,6 K_M \quad T_i = \frac{T_o}{2} \quad T_d = \frac{T_o}{8}$$

On notera qu'ici $T_i = 4 T_d$ c'est-à-dire

$$K \left(1 + \frac{1}{T_i \tau} + T_d \tau \right) = K \frac{(1 + 2 T_d \tau)^2}{T_i \tau} \quad (\text{zéro double}).$$

V.2.4. - Remarques sur la correction cascade -

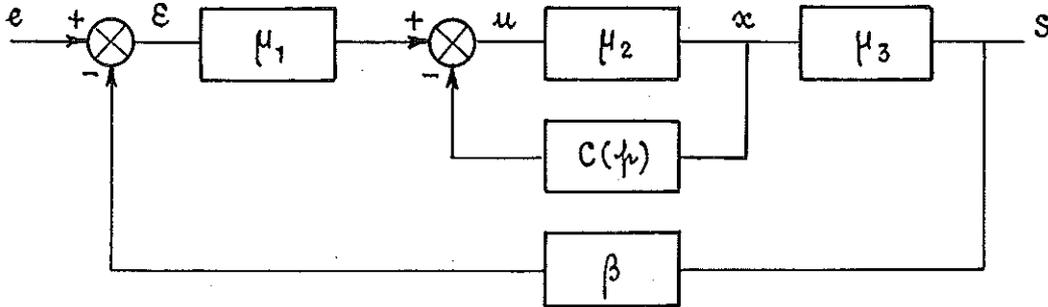
- Les méthodes décrites précédemment ont pour but de décider rapidement de l'adéquation d'une correction donnée. Il est d'autre part évident qu'il n'existe pas qu'un correcteur répondant au problème. C'est, après avoir essayé plusieurs correcteurs, et compte tenu de critères tels que : coût, simplicité technologique, robustesse, que le choix sera fait.
- Notons également que la correction ne permet pas d'augmenter à l'infini la précision et la rapidité (augmentation obtenue en général par accroissement du gain entraînant de forts risques de saturation). En effet, lorsque le système sature, les performances, définies en linéaire, ne sont pas atteintes (temps de réponse accru, et précision limitée). D'autre part, indépendamment de la linéarité du système, il n'est pas toujours intéressant d'avoir une bande passante trop étendue, du fait de l'amplification des bruits (50 Hz par exemple).
- Un système physique présente toujours une erreur statique due à la technologie. Il peut être intéressant dans certains cas de limiter l'erreur due au système asservi (indépendamment de toute réalisation) à une valeur proche de l'erreur technologique par simple augmentation du gain de la B.O.

Il faut noter que cette solution n'est pas toujours applicable car elle entraîne l'instabilité. Le recours au correcteur P.I.D. est alors nécessaire (voir exemple § V.2.2.b).

V.3. - CORRECTION PARALLELE -

V.3.1. - Principe général -

Ce type de correction est représenté sur le schéma suivant :



$C(\nu)$ doit être calculé de manière à obtenir les performances exigées. On sait traduire ces performances (précision stabilité) en caractéristiques sur le tracé de la B.O. dans le plan de Bode. Le problème est alors de déterminer $C(\nu)$ pour obtenir une boucle ouverte corrigée d'allure convenable.

La boucle ouverte corrigée a pour transmittance

$$\mu_1 \frac{\mu_2}{1 + \mu_2 C} \mu_3 \beta$$

Considérons alors les deux cas suivants :

$$|\mu_2 C(\nu)| \gg 1 \quad \text{et} \quad |\mu_2 C(\nu)| \ll 1$$

- Cas ①

$$|\mu_2 C(\nu)| \gg 1 \implies \left| \frac{\mu_2}{1 + \mu_2 C(\nu)} \right| \sim \frac{1}{|C(\nu)|}$$

la boucle ouverte corrigée a pour transmittance approximative

$$\boxed{\frac{\mu_1(\nu) \mu_3(\nu) \beta(\nu)}{C(\nu)}}$$

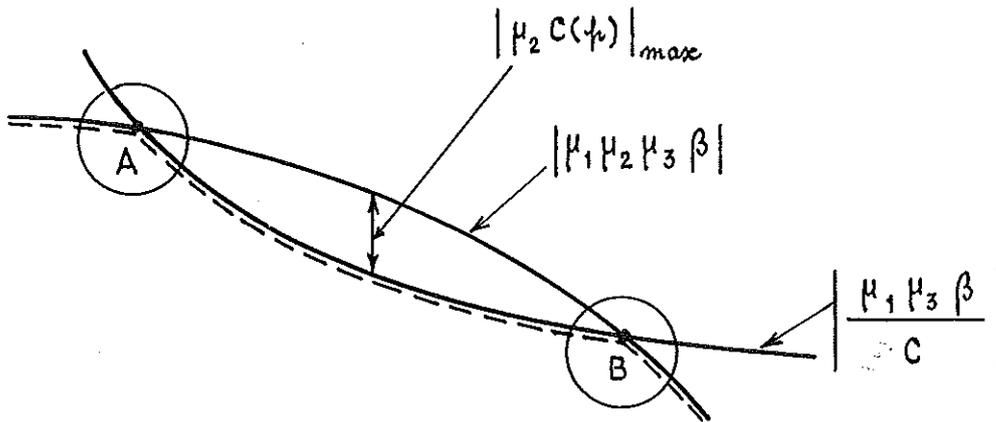
- Cas ②

$$|\mu_2 C(\nu)| \ll 1 \implies \left| \frac{\mu_2}{1 + \mu_2 C(\nu)} \right| \sim |\mu_2|$$

la transmittance approchée de la boucle ouverte corrigée est alors approximativement :

$$\boxed{\mu_1(\nu) \mu_2(\nu) \mu_3(\nu) \beta(\nu)}$$

Tracons les variations de ces deux transmittances dans le plan de Bode :



Ces courbes se coupent aux points A et B (l'un de ces points peut être rejeté à l'infini).

En ces points nous avons $|\mu_1 \mu_2 \mu_3 \beta| = \left| \frac{\mu_1 \mu_2 \beta}{C} \right|$
 c'est-à-dire $|\mu_2| = \frac{1}{|C|}$ ou encore $|\mu_2 C| = 1$.

Les points A et B sont donc les séparations des cas ① et ②

Entre A et B $|\mu_1 \mu_2 \mu_3 \beta| > \left| \frac{\mu_1 \mu_2 \beta}{C} \right|$
 c'est-à-dire $|\mu_2 C| > 1$ (1er cas)

et à l'extérieur de A et B

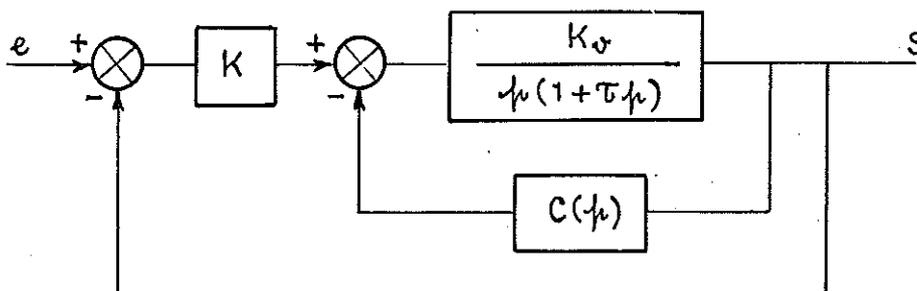
$$|\mu_1 \mu_2 \mu_3 \beta| < \left| \frac{\mu_1 \mu_2 \beta}{C} \right|$$

c'est-à-dire $|\mu_2 C| < 1$ (2ème cas).

Une approximation de la B.O. corrigée est représentée en pointillé sur la figure précédente. Cette approximation peut être mauvaise au voisinage des points A et B, et ce, d'autant plus que $|\mu_2 C(\mu)|_{max}$ est faible.

V.3.2. - Correction tachymétrique simple ($C(\mu) = \lambda\mu$)

Nous allons voir sur un exemple comment s'introduit naturellement ce type de correction.



en identifiant

$$C(p) = \frac{K\tau}{8} p$$

On voit donc que $C(p)$ dérive la sortie de l'asservissement. On dit avoir affaire à une correction tachymétrique simple ($C(p) = \lambda p$).

Dans ce cas précis, un calcul direct par réduction de la boucle secondaire est préférable.

Choisissons $C(p) = \lambda p$

La B.O. corrigée a pour transmittance

$$K \times \frac{\frac{K_v}{p(1+\tau p)}}{1 + \frac{K_v \lambda p}{p(1+\tau p)}} = K \frac{\frac{K_v}{1+\lambda K_v}}{p \left(1 + \frac{\tau}{1+\lambda K_v}\right) p} = \frac{K \cdot K_v}{p(1+\tau p)}$$

Pour avoir le même tracé de la nouvelle B.O. que précédemment, il faut choisir les paramètres K et λ pour avoir 45° de $\Delta\varphi$ au point où la courbe de gain coupe l'axe 0 dB :

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_c = \frac{1}{\tau} = \frac{8}{\tau} \\ \left| \frac{K K'_v}{p(1+\tau p)} \right|_{p=j\omega_c} = 1 \Rightarrow \frac{K K'_v}{\frac{8}{\tau} \cdot \sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \end{array} \right.$$

$$K K'_v = \frac{8\sqrt{2}}{\tau} \quad 1 + \lambda K_v = 8 \quad \lambda K_v = 7$$

$$K = \frac{64\sqrt{2}}{\tau K_v}$$

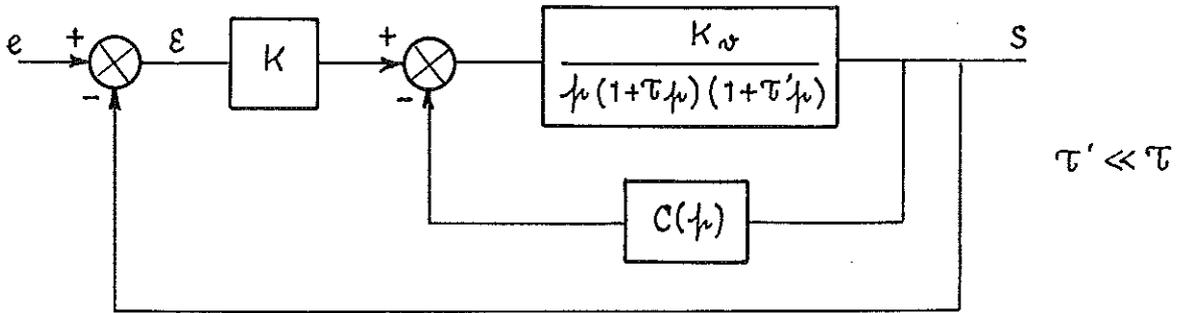
$$\lambda = \frac{7}{K_v}$$

soit $C(p) = \frac{7}{K_v} p = \frac{7K\tau}{64\sqrt{2}} p \simeq \frac{K\tau}{13} p$

on trouvait $C(p) = \frac{K\tau}{8} p$ dans la construction graphique précédente.

V.3.3. - Correction tachymétrique filtrée ($C(p) = \frac{\lambda \tau p^2}{1 + \tau p}$)

Voyons, là encore, sur un exemple comment s'introduit ce type de correction.



Performances désirées :

- erreur statique théorique nulle
- gain minimum G_0 à $\omega_0 \simeq \frac{1}{8\tau}$
- marge de phase 45° à 50°

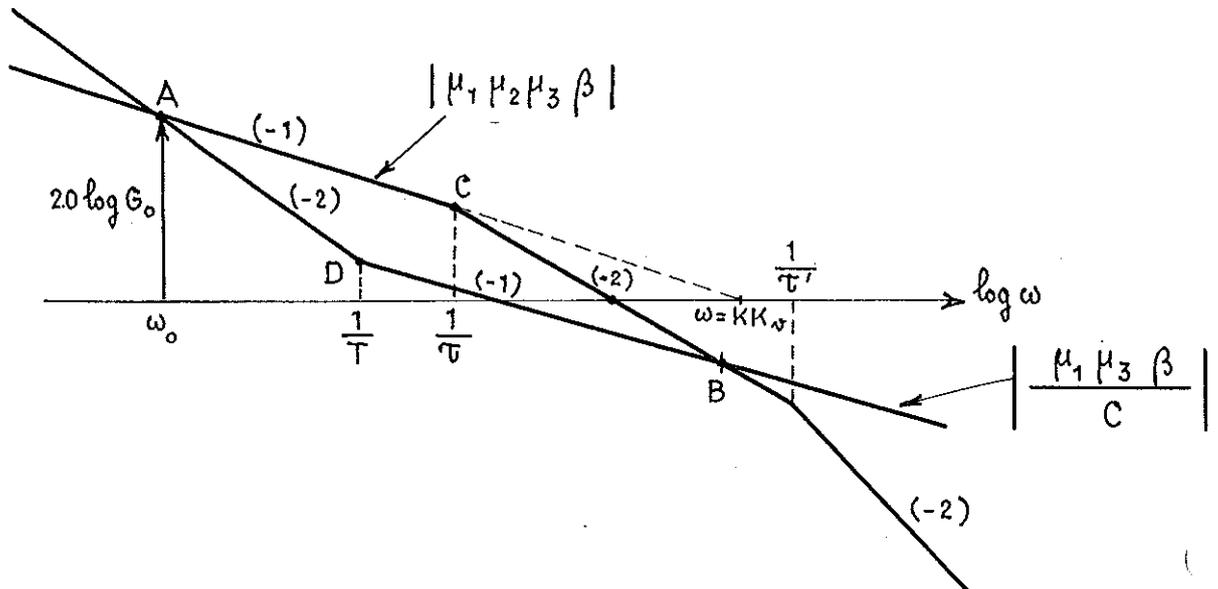
Sans correction, pour avoir le gain désiré à ω_0 , on devra choisir K tel que

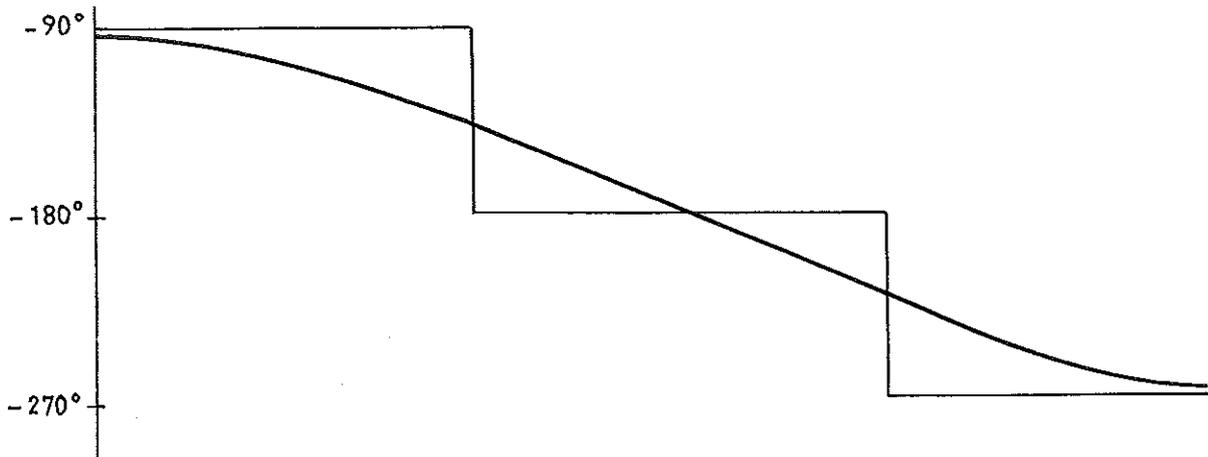
$$\left| \frac{K K_v}{\mu(1+\tau\mu)(1+\tau'\mu)} \right|_{\mu=j\omega_0} \geq G_0$$

or $\omega_0 \ll \frac{1}{\tau} \ll \frac{1}{\tau'}$. Il suffit alors d'avoir

$$\frac{K K_v}{\omega_0} \geq G_0$$

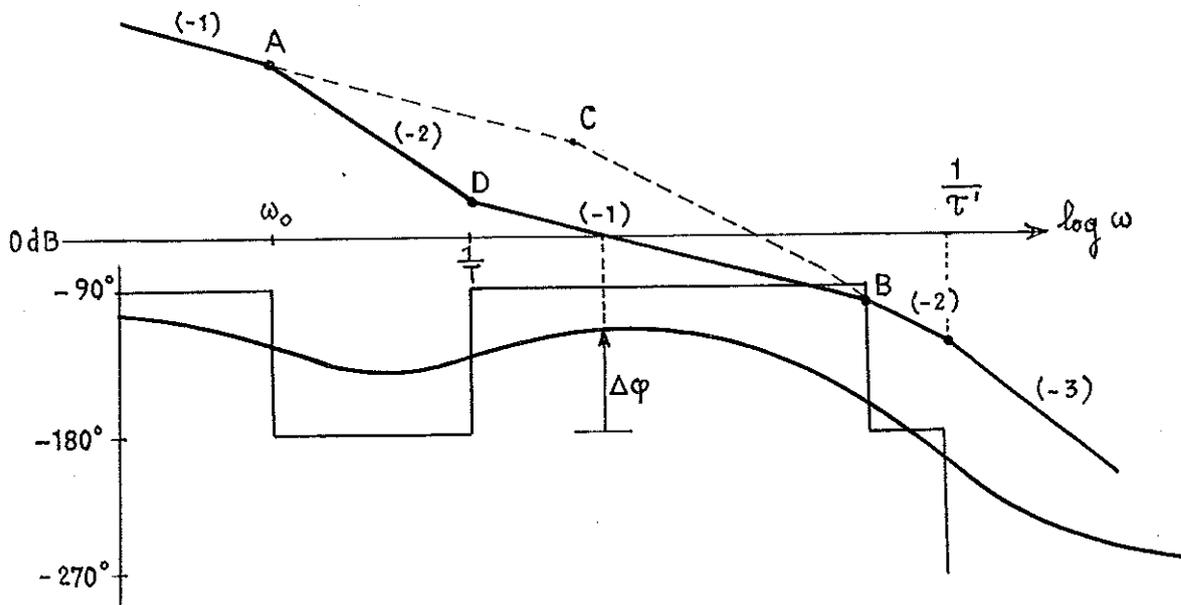
Le tracé de la B.O. obtenue pour cette valeur de K est représenté ci-après.





Choisissons $C(p)$ pour que $|\mu_1 \mu_3 \beta / C|$ ait l'allure représentée ci-dessus. Cette allure a été choisie de façon à déformer la B.O. conformément à l'exemple α du paragraphe V.2.3.b. (correction par actions combinées).

La B.O. corrigée a l'allure suivante (on notera que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme)



Dans notre exemple :

$$\mu_1 = K \qquad \mu_2 = \frac{K_v}{p(1+\tau p)(1+\tau' p)} \qquad \mu_3 = 1 = \beta$$

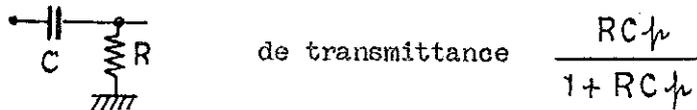
$$\left| \frac{\mu_1 \mu_3 \beta}{C} \right| = \left| \frac{K}{C} \right| = \left| \frac{K(1+T\mu)}{\lambda T \mu^2} \right|$$

en identifiant le tracé graphique idéal en (-2) , (-1) .

d'où

$$C(\mu) = \frac{\lambda T \mu^2}{1+T\mu} = \lambda \mu \times \frac{T\mu}{1+T\mu}$$

c'est-à-dire réinjection d'une vitesse au travers d'un filtre passe haut réalisé par le circuit suivant :



Une correction de ce type est dite correction tachymétrique filtrée.

T s'obtient par lecture directe sur le diagramme. λ se détermine (par exemple en écrivant que $|\mu_1 \mu_3 \beta / C|$ a un gain de G_0 en $\omega = \omega_0$ (point A))

$$\left| \frac{K(1+T\mu)}{\lambda T \mu^2} \right|_{\mu = j\omega_0} \simeq G_0$$

en général $\omega_0 \ll \frac{1}{T} \implies \frac{K}{\lambda T \omega_0^2} \simeq G_0$

d'où

$$\lambda \simeq \frac{K}{G_0 T \omega_0^2}$$

Retenons que cette correction a abouti car l'écart entre les points $A(\omega_0)$ et $C(\frac{1}{T})$ était suffisant (3 octaves).

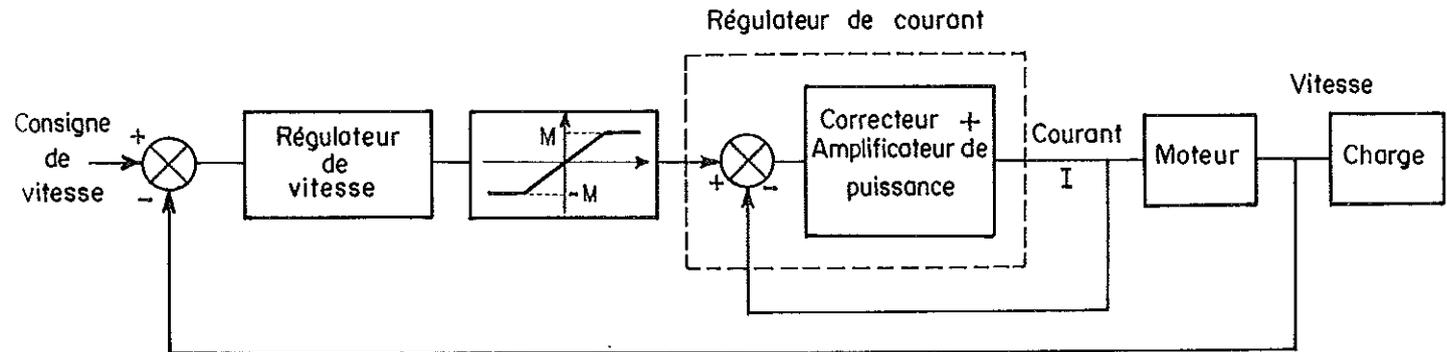
Dans le cas où les points A et C (donc B et D) sont trop proches (2 octaves ou moins) une telle correction ne peut apporter la marge de phase (suffisante).

V.3.4. - Conclusion sur la correction parallèle -

Il n'existe pas, là encore, de critères généraux orientant le choix du correcteur. Les corrections parallèles s'avèrent particulièrement pratiques dès que la mesure des variables de réinjection est disponible (vitesse - accélération, etc...).

Notons que dans certains systèmes complexes, il existe des boucles secondaires imbriquées dont le but n'est pas uniquement d'assurer une stabilité globale mais, souvent, des régulations partielles.

Ex : régulation de vitesse avec saturation de courant



La boucle de courant améliore la stabilité du système global, mais son but essentiel est de réaliser, dès que se produit la saturation de l'écrêteur (par exemple en régime transitoire), une régulation du courant absorbé par le moteur autour d'une valeur de consigne imposée par l'écrêteur.

On réalise ainsi des régulations de vitesse dont les montées en régime transitoire s'effectuent à courant constant, c'est-à-dire à couple constant.

L'intérêt d'une telle régulation est évident dans le cas d'enroulements de papier ou de fils dans lesquels un couple trop important peut entraîner la rupture.

Ce principe de régulation est appelé "régulation cascade" car la sortie du premier régulateur impose sa consigne à la boucle secondaire (le plus souvent, un autre régulateur).

Le problème de la correction parallèle n'a été abordé ici que du point de vue de la stabilité de la boucle totale. Il est nécessaire de contrôler la stabilité des boucles secondaires lorsque celles-ci peuvent être partiellement isolées (régulation cascade, ouverture de la boucle principale).

Rappelons, enfin, que les tracés asymptotiques sont approximatifs, et qu'il est bon de vérifier les diagrammes en utilisant l'abaque de Back-Nichols, par exemple.

ANNEXE I

TRANSFORMATION DE LAPLACE

Soit $f(t)$ une fonction nulle pour $t < 0$. On appelle transformée de Laplace de $f(t)$ (si elle existe), la fonction de la variable complexe p définie par :

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad p = \sigma + j\omega$$

On note

$$\begin{array}{ccc} f(t) & \rightleftharpoons & F(p) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{original} & & \text{image} \end{array}$$

1.- Condition suffisante d'existence -

F existe en $p = \sigma + j\omega$ si $\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt$ existe d'où :

si $f(t)$ est bornée dans tout intervalle fini et si pour $t \geq t_0 > 0$ on a

$$|f(t)| \leq A e^{-kt} \quad A > 0, \quad k \text{ réel}$$

alors $F(p)$ existe pour $\sigma = \text{Re}(p) > k$.

On démontre qu'il existe un nombre σ_0 tel que l'intégrale soit absolument convergente pour $\sigma > \sigma_0$ et ne le soit pas pour $\sigma < \sigma_0$.

Ce nombre σ_0 s'appelle l'abscisse de convergence absolue ou abscisse de sommabilité.

Ex :

$$- \quad f(t) = \gamma(t) \text{ échelon unité de Heaviside} \quad \begin{cases} = 0 & t < 0 \\ = 1 & t > 0 \end{cases}$$

$$\gamma(t) \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \left[\frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{p} \quad \text{pour } \text{Re}(p) > 0$$

$$- \quad f(t) = \gamma(t) \sin \omega_0 t$$

$$\gamma(t) \sin \omega_0 t \Rightarrow \int_0^{\infty} \sin \omega_0 t e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{+(j\omega_0 - p)t} - e^{-(j\omega_0 + p)t}}{2j} dt$$

$$= \frac{1}{2j} \left[\frac{e^{(j\omega_0 - \mu)t}}{j\omega_0 - \mu} + \frac{e^{-(j\omega_0 + \mu)t}}{j\omega_0 + \mu} \right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{2j} \left[-\frac{1}{j\omega_0 - \mu} - \frac{1}{j\omega_0 + \mu} \right] \quad \text{si } \operatorname{Re}(\mu) > 0$$

$$Y(t) \sin \omega_0 t = \frac{\omega_0}{\mu^2 + \omega_0^2} \quad \text{pour } \operatorname{Re}(\mu) > 0$$

2 - Propriétés de la transformée de Laplace

- linéarité

$$\begin{aligned} f(t) &\Rightarrow F(\mu) \\ g(t) &\Rightarrow G(\mu) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \lambda f(t) + \mu g(t) \Rightarrow \lambda F(\mu) + \mu G(\mu)$$

- dérivation temporelle

$$f(t) \Rightarrow F(\mu) \quad \Rightarrow \quad f'(t) \Rightarrow \mu F(\mu) - f(0)$$

plus généralement

$$f^{(n)}(t) \Rightarrow \mu^n F(\mu) - \mu^{n-1} f(0) - \mu^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

- Intégration par rapport au temps

$$f(t) \Rightarrow F(\mu) \quad \Rightarrow \quad \int_0^t f(\theta) d\theta \Rightarrow \frac{F(\mu)}{\mu}$$

- Théorèmes de la valeur finale et de la valeur initiale :

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \mu F(\mu) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$$

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \mu F(\mu) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$$

- translation $a > 0$

$$f(t) \Rightarrow F(\mu) \quad \Rightarrow \quad e^{-at} f(t) \Rightarrow F(\mu + a) \quad \operatorname{Re}(\mu + a) > \sigma_0$$

pour $\operatorname{Re}(\mu) > \sigma_0$

$$\text{et } f(t-a) \Rightarrow e^{-a\mu} F(\mu) \quad \operatorname{Re}(\mu) > \sigma_0$$

- changement d'échelle des temps

$$f(t) \equiv F(p) \quad \text{Re}(p) > \sigma_0 \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{t}{a}\right) \equiv a F(ap) \quad \text{Re}(ap) > \sigma_0$$

- Dérivation par rapport à p

$$f(t) \equiv F(p) \quad \Rightarrow \quad -t f(t) \equiv \frac{dF}{dp}(p)$$

et plus généralement

$$(-t)^n f(t) \equiv \frac{d^n F(p)}{dp^n}$$

- intégration par rapport à p

$$f(t) \equiv F(p) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(t)}{t} \equiv \int_p^{+\infty} F(p) dp$$

- transformée de Laplace d'un produit de convolution

$$\begin{aligned} f(t) &\equiv F(p) & \text{Re}(p) &> \sigma_0 \\ g(t) &\equiv G(p) & \text{Re}(p) &> \sigma'_0 \end{aligned}$$

alors $f(t) * g(t) \equiv F(p) \cdot G(p) \quad \text{Re}(p) > \sup(\sigma_0, \sigma'_0)$

- Transformée inverse.

Pour retrouver l'original d'une fonction $F(p)$ donnée, on décomposera cette fonction (en général, une fraction rationnelle en p) en éléments simples dont on prendra l'original dans le dictionnaire d'image donné ci-après. Les fonctions $f(t)$ données sont toutes supposées nulles pour des temps t négatifs.

3 - Dictionnaire d'images -

$f(t)$	$F(p)$	Conditions sur p
$\delta(t)$	1	$\forall p$
$\delta^{(n)}(t)$	p^n	$\forall p$
$\gamma(t)$	$\frac{1}{p}$	$\text{Re}(p) > 0$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\text{Re}(p) > 0$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	$\text{Re}(p+a) > 0$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$	$\text{Re}(p+a) > 0$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\text{Re}(p) > 0$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\text{Re}(p) > 0$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$\text{Re}(p+a) > 0$
$e^{-bt} \cos \omega t$	$\frac{p+b}{(p+b)^2 + \omega^2}$	$\text{Re}(p+b) > 0$

ANNEXE II

TRACE DES COURBES DE GAIN ET DE PHASE D'UNE TRANSMITTANCE DU SECOND ORDRE DANS LE PLAN DE BODE

$$H(p) = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$$

avec

$$|H(p)|_{p=j\omega} = A(\omega)$$

et

$$(\arg H(p))_{p=j\omega} = \Phi(\omega)$$

Figure 1

