Comète de Halley et calculatrice

par Roger MARICAL,
Collège de Fleury-sur-Andelle, 27.

En 1704, Edmund HALLEY relie deux observations de passage de Comètes ; celles de 1607 et 1682... Pour lui il s'agit d'un seul et même objet ! Il en prédit le retour pour fin 1758 - début 1759. Le passage au périhélie eut lieu le 13 mars 1759. C'est un succès pour la jeune mécanique céleste de NEWTON. Le *nom de Halley* est désormais associé à cette Comète, qui revient tous les 76 ans...

L'an passé, la « Comète de l'Histoire » a été l'objet d'observations multiples.

Aussi pour mieux situer ce rendez-vous, voici réunis quelques éléments permettant de suivre la progression de notre « visiteuse ».

Cet article peut être aussi l'occasion de redécouvrir et mettre en pratique les formules relatives au mouvement elliptique. Une *calculatrice programmable* permettra de conduire tous les calculs nécessaires.

I. PARAMETRES ORBITAUX (1986).

1) Les 6 éléments.

TABLEAU 1

a	demi grand axe de l'ellipse	$= 17{,}936$ U.A $=$ OA
e	excentricité	$= 0{,}967267 = \dfrac{c}{a}$
i	inclinaison	$= 162°{,}24$ (1+)
ω	argument au périhélie	$= 111{,}8°$
Ω	longitude au nœud ascendant	$= 58°$ (2+)
$\mathcal{T}$	date de passage au périhélie	= 9 févr. 1986 à 10 h 54 TU

(1+) par rapport au plan de l'écliptique (mouvement rétrograde),
(2+) sens direct par rapport au point vernal.

2) **Données complémentaires.** Voir courbe I.

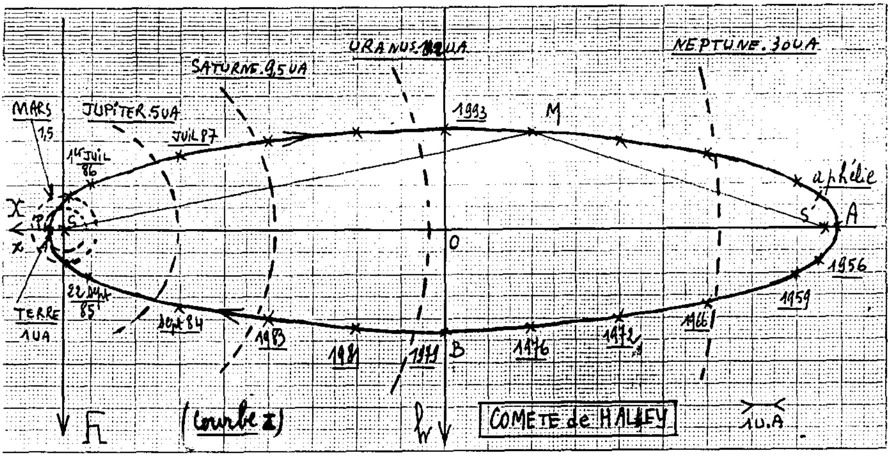
Distance focale : $c = a \times e = 17{,}349$ U.A. = OS = OS'.

Distance au périhélie : $a - c = 0{,}587$ U.A. = SP.

Distance à l'aphélie : $a + c = 35{,}285$ U.A = SA.

1 U.A = une unité astronomique = $1{,}496 \times 10^{11}$ m.

Trajectoire complète (mouvement rétrograde).



II. ELLIPSE ET COORDONNEES CARTESIENNES (construction facile).

1) **Equation.**

Dans le repère Ox, Oy, on a : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

$\underline{b = \mathrm{OB}.}$

2) **Demi petit axe : b.**

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = 4{,}55 \text{ U.A.}$$

III. LOIS DE KEPLER ET COORDONNEES POLAIRES.

1) **Trajectoire.**

Le soleil occupe S l'un des foyers de l'*ellipse* définie comme le lieu géométrique des points M dont la somme des distances à 2 points fixes est constante.

$$\underline{SM + S'M = 2\,a.}$$

Le soleil est en S, auquel on associe les axes SX et SY.

$\vartheta = (\overrightarrow{SX}, \overrightarrow{SM})$ angle polaire sens direct.
$r = SM =$ (rayon vecteur).

Le rayon vecteur est lié à ϑ par la relation :

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\vartheta}{p}.} \tag{1}$$

$p =$ paramètre de l'ellipse.

$p = r$ quand $\vartheta = \pm\dfrac{\pi}{2}$.

$$\boxed{p = a(1 - e^2).}$$

2) Loi des aires.

Pendant des durées égales, les aires balayées par le rayon vecteur sont égales ; cela signifie que la vitesse angulaire est inversement proportionnelle au carré du rayon vecteur.

Ainsi :

$$\boxed{\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{C_*}{r^2};} \tag{2}$$

$C_* =$ constante.

$$\boxed{C_*^2 = p \times k \times M_\odot.}$$

p, paramètre lié à a et e.

$k =$ constante d'attraction universelle $= 6{,}67 \times 10^{-11}$ unités S.I.

$M_\odot =$ masse du soleil $= 1{,}98 \times 10^{30}$ kg.

3) Durée de révolution (T).

a) Durée du déplacement entre 2 points.

A partir de (2) et (1), on peut écrire :

$$C_* = r^2 \times \frac{d\vartheta}{dt}$$

$$dt = \frac{r^2}{C_*} \times d\vartheta = \frac{p^2}{C_*} \times \frac{1}{(1 + e\cos\vartheta)^2} \times d\vartheta$$

$$\Delta T = \int dt = \frac{p^2}{C_*} \times \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} (1 + e \cos \vartheta)^{-2} \times d\vartheta \ (\vartheta \text{ en rad.}).$$

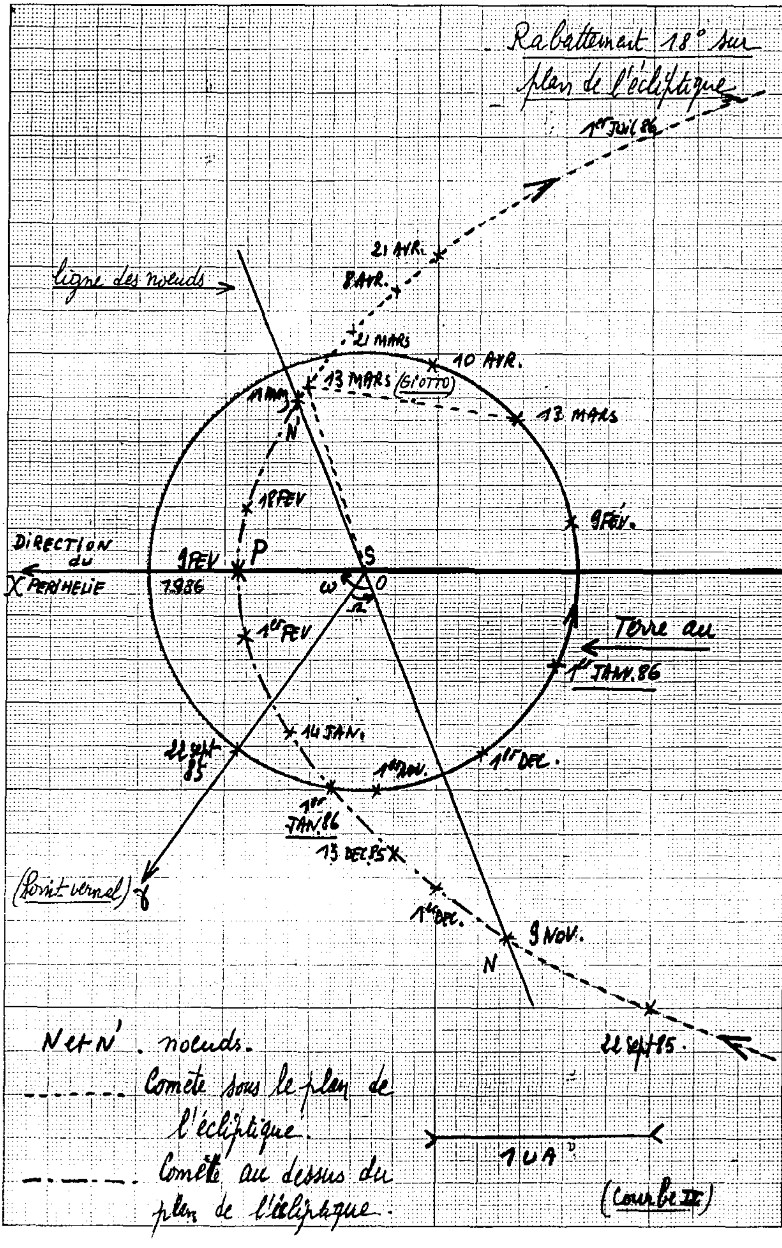
L'angle polaire de chaque point de l'ellipse étant connu, la calculatrice (ex. : TI 55 II) effectue, *en mode radian, l'***intégration directe** selon la méthode de SIMPSON.

TABLEAU 2

Quelques valeurs numériques.

x U.A.	— 17,94	— 17	— 16	— 12	— 8	— 4	0	4
X U.A.	*— 35,29*	— 34,35	— 33,35	— 29,35	— 25,35	— 21,35	— 17,35	— 13,35
$\pm y$ et Y U.A.	0	1,45	2,06	3,38	4,07	4,44	4,55	4,44
ϑ radian	π	3,1	3,08	3,03	2,98	2,94	2,88	2,82
r U.A.	*35,29*	34,4	33,4	29,5	25,7	21,8	17,9	14,1
ΔT (s) par rapport au périhélie	$1{,}1985 \times 10^9$	$9{,}5 \times 10^8$	$8{,}43 \times 10^8$	$6{,}12 \times 10^8$	$4{,}35 \times 10^8$	$3{,}31 \times 10^8$	$2{,}22 \times 10^8$	$1{,}54 \times 10^8$
Dates av. passage au périhélie	1948	1956	1959	1966	avr. 1972	août 1976	févr. 1979	mars 1981
Dates apr. passage au périhélie	2024	2016	2013	2005	2000	août 1996	févr. 1993	déc. 1990

x U.A.	8	12	16	17,0	17,35	17,5	17,9	17,94
X U.A.	— 9,35	— 5,35	— 1,35	— 0,35	*0*	0,15	0,55	*0,59*
$\pm y$ et Y U.A.	4,07	3,38	2,06	1,45	*1,15*	1	0,29	0
ϑ radian	2,73	2,58	2,15	1,8	$\pi/2$	1,42	0,48	0
r U.A.	10,2	6,38	2,46	1,49	*1,15*	1	0,62	*0,59*
ΔT (s) par rapport au périhélie	$9{,}23 \times 10^7$	$4{,}53 \times 10^7$	$1{,}21 \times 10^7$	$6{,}13 \times 10^6$	$4{,}24 \times 10^6$	$3{,}4 \times 10^6$	8×10^5	0
Dates av. passage au périhélie	mars 1983	sept. 1984	22 sept. 1985	1er déc. 1985	22 déc. 1985	1er janv. 1986	1er févr. 86	9 févr. 86
Dates apr. passage au périhélie	janv. 1989	juill. 1987	1er juill. 1986	21 avril 1986	30 mars 1986	19 mars 1986	18 févr. 86	9 févr. 86


Rabattement 18° sur plan de l'écliptique
1er JUIL 86
21 AVR.
8 AVR.
21 MARS
10 AVR.
13 MARS (GIOTTO)
13 MARS
ligne des noeuds
N
18 FEV
9 FEV.
DIRECTION du PERIHELIE
9 FEV 1986
P
S
O
ω
1er FEV
Terre au 1er JAN. 86
14 JAN.
22 sept 85
1er NOV.
1er DEC.
1er JAN. 86
13 DEC. 85
(Point vernal) γ
1er DEC.
9 NOV.
N
22 sept 85
N et N' . noeuds.
Comète sous le plan de l'écliptique.
Comète au dessus du plan de l'écliptique.
1 UA
(Courbe II)

b) Relations.

Le calcul intégral avec intégration entre 0 et 2π conduit à :

$$\boxed{T = 2\pi \times \frac{a^2}{C_*} \times \sqrt{1 - e^2}.} \qquad (3)$$

avec les expressions :

$p = a(1 - e^2)$ et

$C_*^2 = p \times k \times M_\odot$, la relation (3) devient alors :

$$\boxed{\frac{a^3}{T^2} = \frac{k \times M_\odot}{4\pi^2}} \qquad (4)$$

formulation bien connue de la 3e loi de KÉPLER.

IV. TRAJECTOIRE ET POSITIONS.

1) Méthode.

Dans le repère (Ox, Oy), on calcule et construit l'elllipse en coordonnées cartésiennes. O étant centre de symétrie évite la répétition des calculs (voir lignes 1 et 3 du tableau n° 2.)

On exprime les coordonnées des points obtenus dans le repère SX, SY :

$$X = x - 17{,}35 \quad \text{(U.A.)}$$

$$\pm Y = \pm y \quad \text{(U.A.).}$$

— On opère alors le passage en *coordonnées polaires* pour une demi-ellipse (ordonnées positives) (directement à l'aide de la calculatrice qui effectue ce passage sans difficulté).

On dispose maintenant de l'angle polaire de chaque point, ce qui permet le calcul direct de l'intégrale ; les durées ΔT obtenues par rapport au passage au périhélie sont alors traduites en dates (voir courbes I et II).

2) Valeurs numériques.

$p = 1{,}155$ U.A. $= 1{,}73 \times 10^{11}$ m.

$C_* = \sqrt{p \times k \times M_\odot} = 4{,}79 \times 10^{15}$ unités S.I.

$\dfrac{p^2}{C_*} = 6{,}235 \times 10^6$ unités S.I.

$$\boxed{T = 2{,}397 \times 10^9 \text{ secondes} = 75{,}96 \text{ ans} \simeq 76 \text{ ans.}}$$

Remarque.

Les relations (3) ou (4), ainsi que l'intégration directe sur l'intervalle 0 à 2π découpé en 60 parties, selon la méthode de SIMPSON, conduisent au même résultat final $T = 2{,}397 \times 10^9$ s - sur TI 55 II.

3) Principaux résultats.

a) Passages.

Nœud ascendant : 9 novembre 1985 ; Comète à 2,1 U.A. du soleil.

Nœud descendant : 11 mars 1986 ; Comète à 0,86 U.A. du soleil.

b) Mission Européenne (E.S.A.).

La sonde « GIOTTO » qui a été lancée en juillet 1985 par la fusée Ariane a rencontré la Comète le *13 mars 1986*. La Comète était alors à 0,89 U.A. du soleil et 0,98 U.A. de la terre et légèrement sous le plan de l'écliptique : vitesse de la Comète : 44 km/s et vitesse relative Comète - sonde : 70 km/s.

c) Période d'observation.

Pour notre hémisphère, la période *favorable* a été l'automne 1985 et jusqu'au passage au périhélie.

d) La Comète dans le système solaire.

La vitesse de la Comète varie très largement... ; au périhélie, elle atteint 54,5 km/s alors qu'à l'aphélie, elle n'est que de 0,9 km/s.

Norme du vecteur vitesse :

$$\boxed{V = \sqrt{k \times M_{\odot} \times \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}\,.}$$

r, a en m et $k \times M_{\odot} = 1{,}32 \times 10^{20}$ unités S.I. donnent V en $m.s^{-1}$.

e) Conclusion.

Cette étude peut se faire par étapes selon le niveau des élèves intéressés par le retour de cette Comète célèbre.

L'ellipse est une jolie courbe. Sa construction permet de situer l'orbite de la Comète dans le système solaire.

En poussant un peu les calculs, on suit la progression de notre objet et les plus enthousiastes pourront construire tableau, maquette...

BIBLIOGRAPHIE.

— *Astronomie populaire :* Camille Flammarion.

— *Ephémérides : Bureau des Longitudes,* B.U.P. n° 640, janvier 1982, page 421.

— *Revue : Ciel et Espace,* novembre - décembre 1983.

ANNEXE.

L'intégrale peut se calculer en 2 à 3 minutes sur TI 55 II, TI 57 (aux limites) et calculatrices semblables.

Le micro-ordinateur tel le Commodore 64, peut être programmé selon la méthode des trapèzes. La durée du calcul est de quelques secondes et dépend du nombre de subdivisions qui découpent l'intervalle d'intégration choisi.

Annales des Baccalauréats, BT et BTS 1987

Afin de pouvoir réaliser, comme les années précédentes, les numéros spéciaux du B.U.P., nous demandons aux collègues enseignant dans les classes concernées, de vouloir bien envoyer au correspondant technique de leur académie (voir liste dans les pages couleur) les sujets de physique et de chimie de ces différents examens (si possible, originaux ou bonnes photocopies).

Le correspondant technique voudra bien les grouper puis les transmettre à :

M. C. VIEL,
12, rue du Général-de-Gaulle, Chessy,
77144 Montévrain.