Origine des forces d'inertie, rotations absolues et principe de Mach*

Les forces d'inertie s'introduisent, en mécanique classique, lorsque l'on étudie un problème à partir d'un référentiel non galiléen.

Ces forces apparaissent comme le résultat d'une transformation cinématique et sont, de ce fait, parfois qualifiées de fictives ; cependant, le simple exemple des centrifugeuses montre que ces forces peuvent produire des effets très « réels ».

Les questions qui se posent sont les suivantes : peut-on englober les champs de force physique et les transformations des coordonnées dans un même formalisme ? Quelle est la raison des propriétés si particulières des référentiels galiléens ?

La relativité générale permet de répondre à la première question de façon assez satisfaisante ; le principe de MACH offre une amorce de réponse à la seconde. La comptabilité de ces réponses et leur degré de « corrélation » débouche sur des questions toujours ouvertes.

1. LES REFERENTIELS GALILEENS OU REFERENTIELS D'INERTIE.

Pour bien comprendre comment se posent les questions à résoudre, il nous faut rappeler succinctement la façon dont s'introduisent les référentiels galiléens et le principe d'inertie en mécanique newtonienne.

1.1. Systèmes en interaction, système isolé.

Deux systèmes (S_1) et (S_2) sont dits en interaction si l'on peut trouver dans l'un une modification qui entraîne des modifications dans l'autre (exemple : un aimant et une boussole). Toutes les interactions rencontrées dans la nature ont la propriété de décroître pour tendre vers zéro lorsque la distance séparant (S_1) et (S_2) tend vers l'infini. Ce résultat expérimental important permet de concevoir, à la limite, la notion de système isolé.

(*) Cet article reproduit le texte d'une conférence prononcée le 19 décembre 1979 à la section académique de Lyon. L'auteur remercie M. G. GUINIER qui a bien voulu relire le manuscrit et en améliorer la rédaction par de nombreuses remarques.

1.2. Principe d'inertie.

Ce principe peut s'énoncer de la façon suivante : *il existe des référentiels privilégiés dans lesquels le mouvement d'un point isolé est rectiligne uniforme ; on les appelle référentiels galiléens ou référentiels d'inertie.*

Cet énoncé postule l'existence de référentiels galiléens et indique (au moins théoriquement) une façon de les reconnaître.

Insistons un peu ; observons *un* point matériel isolé ; il est quasiment évident que l'on peut trouver (d'une infinité de manières) un référentiel galiléen ($\mathcal{R}_0$) dans lequel ce point est animé d'un mouvement rectiligne uniforme. Ce que le principe d'inertie postule, c'est que si l'on se place dans un de ces référentiels ($\mathcal{R}_0$), *tout* point matériel isolé aura un mouvement rectiligne uniforme.

Le principe d'inertie postule donc bien l'existence *non-triviale* de référentiels galiléens, et ne se réduit pas à une simple définition.

1.3. Les référentiels galiléens ou référentiels d'inertie, référentiel de Copernic.

Le principe d'inertie définit donc les référentiels galiléens et en postule l'existence. Il est évident que si l'on découvre un référentiel correspondant à cette définition, il en existe une infinité d'autres se déduisant de celui que l'on a découvert par mouvement de translation rectiligne uniforme.

Les référentiels galiléens jouent un rôle privilégié dans l'énoncé du principe fondamental de la dynamique du point ($\vec{f} = d\vec{p}/dt$) et c'est ce rôle qui permet, en fait, de les découvrir expérimentalement en opérant par approximations successives. On arrive ainsi à la définition pratique suivante, qui repose sur une série de constatations expérimentales : les référentiels galiléens (ou référentiels d'inertie) sont les référentiels animés d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel de COPERNIC. Le référentiel de COPERNIC a son origine au barycentre du système solaire et ses axes sont dirigés vers des étoiles très éloignées (étoiles « fixes »). Rappelons que, dans la pratique, un référentiel terrestre peut être considéré — au moins en première approximation — comme galiléen. Il s'agit d'une approximation courante que nous aurons l'occasion d'utiliser par la suite.

1.4. Remarques.

1) La définition du référentiel de COPERNIC ne correspond sans doute qu'à une approximation. En fait, un calcul simple

montre que si l'on choisissait l'origine de ce référentiel au barycentre de la galaxie, cette modification n'entraînerait que des corrections imperceptibles.

2) Les directions définies par les étoiles « fixes » reçoivent souvent le nom de directions fixes. L'existence de ces directions fixes est une réalité expérimentale (cf. infra, §§ 2.2 et 3.1). Ces directions fixes permettent de définir des rotations absolues dont le rôle théorique est considérable lorsque l'on cherche à comprendre l'origine des propriétés particulières des référentiels galiléens.

3) La façon dont nous venons d'introduire les référentiels d'inertie est très traditionnelle. Soulignons cependant son caractère empirique : la définition du référentiel de COPERNIC est le fruit d'une longue suite d'expériences dont la plus célèbre est celle du pendule de FOUCAULT. On doit remarquer que cette démarche ignore totalement la raison qui privilégie une certaine classe de référentiels par rapport aux autres.

2. LES FORCES D'INERTIE EN MECANIQUE CLASSIQUE.

2.1. Les forces d'inertie.

Dans un référentiel galiléen ($\mathcal{R}_0$), le principe fondamental de la dynamique s'écrit, pour un point de masse m invariable :

$$\vec{f} = m\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_0). \qquad (1)$$

Si nous considérons maintenant un référentiel ($\mathcal{R}$) animé d'un mouvement quelconque par rapport à ($\mathcal{R}_0$) [($\mathcal{R}$) n'est pas galiléen dans le cas général], la loi de composition des accélérations s'écrit :

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c \qquad \text{avec} \qquad \vec{\gamma}_c = 2\vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_r \qquad (2)$$

soit, de façon plus explicite, en respectant le même ordre des termes :

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) + \vec{\gamma}(M, \mathcal{R}/\mathcal{R}_0) + 2\vec{\omega}_e(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R})$$

ce qui permet d'écrire le principe fondamental sous la forme :

$$\vec{f} - \underbrace{m\vec{\gamma}_e}_{\substack{\text{force d'inertie}\\ \text{d'entrainement}}} - \underbrace{m\vec{\gamma}_c}_{\substack{\text{force d'inertie}\\ \text{de Coriolis}}} = m\vec{\gamma}_r \qquad (3)$$

Ainsi écrite, la relation fondamentale a la même forme dans ($\mathcal{R}$) que dans un référentiel galiléen ($\mathcal{R}_0$), à condition d'ajouter à la force $\vec{f}$ évaluée à partir d'un référentiel galiléen des forces dites forces d'inertie.

Un exemple très classique va nous permettre de poser de façon nette le problème de la nature et de l'origine des forces d'inertie.

2.2. **Exemple.**

Dans un plan horizontal, un repère (Ox_0, Oy_0) est lié à un référentiel galiléen ($\mathfrak{R}_0$). Une tige Ox tourne dans ce plan avec la vitesse angulaire $\dot{\vartheta} = d\vartheta/dt$, $\vartheta(t)$ désignant l'angle (Ox_0, Ox), qui est une fonction connue du temps.

Un anneau M de masse m, assimilable à un point matériel, glisse sans frottement le long de la tige et est repéré par $OM = x$. Ecrire l'équation du mouvement. Dans le cas particulier où $\omega = \dot{\vartheta}$ est une constante, déterminer x en fonction du temps, sachant que pour $t = 0$: $x = x_0 \neq 0$ et $\dot{x} = 0$.

Plaçons-nous dans le référentiel non galiléen ($\mathfrak{R}$) lié à la tige ; soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire porté par Ox, $\vec{u}'$ le vecteur unitaire du plan horizontal directement perpendiculaire à $\vec{u}$ et $\vec{k} = \vec{u} \wedge \vec{u}'$.

Il est facile de voir que $\vec{f}$ correspond ici à la somme du poids $-mg\vec{k}$ et de la réaction $\vec{R}$ de la tige sur l'anneau ; par ailleurs :

$$\vec{\gamma}_e = x\ddot{\vartheta}\,\vec{u}' - x\dot{\vartheta}^2\,\vec{u} \quad \text{et} \quad \vec{\gamma}_c = 2\,\vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_r = 2\,\dot{\vartheta}\vec{k} \wedge \dot{x}\vec{u} = 2\,\dot{\vartheta}\dot{x}\,\vec{u}'$$

de sorte que l'équation du mouvement s'écrit dans ($\mathfrak{R}$) :

$$-mg\,\vec{k} + \vec{R} - m\,[x\ddot{\vartheta}\,\vec{u}' - x\dot{\vartheta}^2\,\vec{u}] - 2\,m\,\dot{\vartheta}\dot{x}\,\vec{u}' = m\ddot{x}\,\vec{u}.$$

Si nous écrivons cette équation sous la forme :

$$-mg\,\vec{k} + \vec{R} = m\,\{(\ddot{x} - x\dot{\vartheta}^2)\,\vec{u} + (2\,\dot{x}\dot{\vartheta} + x\ddot{\vartheta})\,\vec{u}'\}$$

nous remarquons que cette équation n'est autre que l'équation du mouvement de M écrite dans ($\mathfrak{R}_0$) en utilisant les coordonnées polaires !

Ainsi, cet exemple met bien en évidence le résultat de la théorie générale : le passage d'un référentiel galiléen à un référentiel non galiléen apparaît bien comme une simple transformation cinématique (1).

Il est cependant utile de poursuivre le calcul dans le cas où $\omega = \dot{\vartheta} = \text{Cte}$.

L'équation du mouvement, multipliée scalairement par $\vec{u}$, s'écrit :

(1) Le calcul que nous venons d'effectuer correspond à « l'interprétation cinématique des coordonnées polaires ».

$$\vec{R} \cdot \vec{u} = m(\ddot{x} - \omega^2 x)$$

la réaction étant supposée sans frottement, $\vec{R} \cdot \vec{u} = 0$ et :

$$\ddot{x} = \omega^2 x$$

qui s'intègre immédiatement, compte tenu des conditions initiales en :

$$x = x_0 \, ch \, \omega t.$$

Le long de la tige, l'anneau a donc un mouvement accéléré. L'analyse du phénomène dans le référentiel ($\mathcal{R}$) permet d'attribuer ce mouvement à la force centrifuge $m \omega^2 x \vec{u}$; comme on le voit, cette force « fictive » a un effet bien « réel ». Si ω était nulle, *i. e.* si ($\mathcal{R}$) était galiléen, l'anneau resterait immobile.

Si la tige était fixe dans un référentiel galiléen ($\mathcal{R}_0$) et si un observateur tournait à la vitesse $-\omega$ par rapport à ($\mathcal{R}_0$), il verrait la tige tourner à la vitesse ω ; or, il est bien évident que, dans ce cas, l'anneau resterait immobile sur la tige. Ce n'est donc pas la rotation relative de la tige par rapport à l'observateur qui est responsable du mouvement de l'anneau sur la tige, mais la rotation de la tige par rapport à un référentiel galiléen : *une telle rotation a un caractère absolu.*

2.3. Le problème de l'origine et de la nature des forces d'inertie.

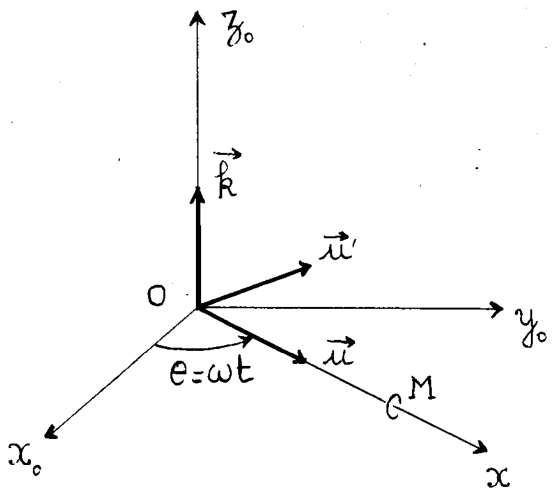

Fig. 1

L'introduction des forces d'inertie vient manifestement du désir d'écrire une relation du type « $f = m\vec{\gamma}$ » dans tout référentiel ($\mathcal{R}$) ; c'est un « désir de relativité générale » avant la lettre.

Pour conserver au membre de droite $m\vec{\gamma}$ la même forme dans tous les référentiels, on fait passer les termes supplémentaires $m\vec{\gamma}_e$ et $m\vec{\gamma}_c$ dans le membre contenant $\vec{f}$.

On peut dire, d'une certaine façon, que :

$$\vec{f'} = \vec{f} - m\vec{\gamma}_e - m\vec{\gamma}_c$$

représente la formule de transformation de la force $\vec{f}$.

Mais, comment une transformation cinématique peut-elle engendrer des forces ? Quelles sont les sources de ces forces ? Quelle peut être en particulier la « source » de la force centrifuge dont l'effet augmente au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'axe de rotation ? Telles sont quelques difficultés soulevées par l'introduction des forces d'inertie.

En fait, ces questions peuvent se ramener à deux questions fondamentales :

1° Les forces d'inertie apparaissent dans des référentiels accélérés par rapport aux référentiels galiléens ; quelle est la cause qui privilégiée ces référentiels galiléens ?

2° Peut-on englober dans un même formalisme les champs de force physiques et les changements de référentiels, c'est-à-dire les changements de coordonnées ?

La première question est celle de l'origine des forces d'inertie, la seconde celle de leur nature.

3. LE SEAU TOURNANT DE NEWTON ET LES MASSES LIQUIDES DE BERKELEY.

Dans les « Principia », NEWTON décrit assez longuement une expérience connue sous le nom d'expérience du seau tournant, et qui lui permet de préciser ses conceptions sur l'espace absolu. Plus tard, G. BERKELEY a repris la discussion de cette expérience et en a imaginé une autre faisant intervenir deux masses liquides, expérience qui a toutes les caractéristiques d'une « thought experiment », et qui permet une discussion (théorique) des référentiels d'inertie.

Nous allons décrire ces expériences, ce qui nous permettra d'introduire de façon très naturelle le Principe de MACH.

3.1. L'expérience du seau tournant.

Cette expérience est la suivante : un seau rempli d'eau est suspendu à une corde à laquelle on peut donner une torsion. La corde étant torse, on abandonne le seau ; le phénomène observé peut être décomposé en deux phases :

— dans une première phase, le seau tourne par rapport au sol sans que l'eau soit encore entraînée, de sorte que la surface libre du liquide est plane ;

— dans une seconde phase, l'eau est entraînée avec le seau dans le mouvement de rotation par rapport au sol, de sorte que sa surface libre est incurvée.

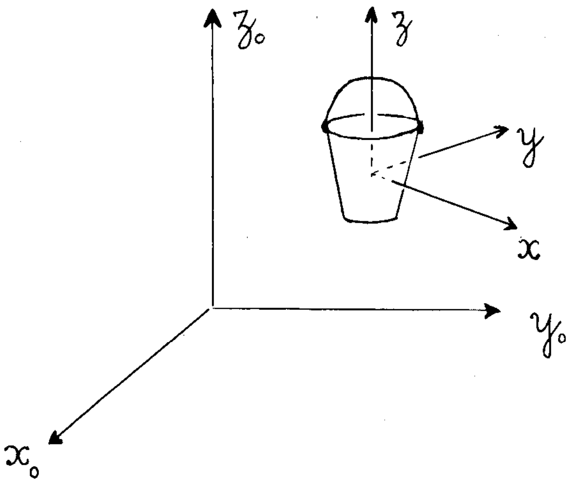

Fig. 2

Analysons cette expérience en langage moderne.

Soit (R_0) un référentiel lié au sol (et supposé galiléen), et $(\mathcal{R})$ un référentiel lié au seau, tournant par conséquent à la vitesse $\omega = \omega(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0)$ par rapport à $(\mathcal{R}_0)$. Décrivons les deux phases du phénomène dans chaque référentiel.

1re phase :

— Dans $(\mathcal{R}_0)$, l'eau est immobile et sa surface est plane.

— Dans $(\mathcal{R})$, l'eau tourne à la vitesse ω (2) et sa surface est plane.

---

(2) En fait $-\omega$ mais le signe ne fait rien à l'affaire.

2me phase :

— Dans $(\mathcal{R}_0)$, l'eau tourne à la vitesse ω et sa surface est incurvée.

— Dans $(\mathcal{R})$, l'eau est immobile et sa surface est incurvée.

On constate donc que les deux référentiels $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{R}_0)$ jouent des rôles fondamentalement différents : il n'est, pour s'en convaincre, que de comparer les cas où l'eau est immobile dans l'un ou l'autre de ces référentiels.

S'il y a relativité cinématique entre $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{R}_0)$, ce qui se traduit par $\omega(\mathcal{R}_0/\mathcal{R}) = -\omega(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0)$, cette relativité cinématique ne doit pas cacher une profonde dissymétrie entre les deux référentiels. La rotation de l'eau par rapport à un référentiel galiléen se manifeste par une courbure de sa surface et possède donc un caractère absolu (3).

Insistons à ce stade sur le point suivant : du point de vue cinématique, on peut dire indifféremment que $(\mathcal{R})$ tourne par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ ou que $(\mathcal{R}_0)$ tourne par rapport à $(\mathcal{R})$; cependant, le phénomène physique est décrit de façon très différente suivant que l'on se place dans $(\mathcal{R})$ ou dans $(\mathcal{R}_0)$. Si l'on veut traduire la situation par une formule lapidaire, on peut dire qu'on ne doit pas confondre relativité cinématique et relativité physique.

Du seul point de vue cinématique, c'est une absurdité que de parler de rotation absolue ; cependant, dès que l'on envisage des phénomènes physiques (4), cette expression peut recouvrir une réalité expérimentale.

3.2. Interprétations de l'expérience du seau tournant.

Comment interpréter les rôles différents joués par $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{R}_0)$ dans la description des phénomènes physiques ?

Pour NEWTON, cette expérience met en évidence la notion d'espace absolu : $(\mathcal{R}_0)$ est fixe par rapport à l'espace absolu, alors que $(\mathcal{R})$ est en rotation par rapport à lui ; c'est ce qui, pour NEWTON, explique leurs rôles différents. Cependant, comme on ne peut pas mettre en évidence de translation par rapport à cet

(3) Cette courbure est en ω^2 ; il est facile de voir que cet effet n'est pas assez important pour mettre en évidence la rotation de la Terre autour de son axe : pour un seau posé à la surface du sol, la différence de niveau entre le centre et la périphérie serait inférieure aux dimensions atomiques.

(4) Ces phénomènes peuvent être mécaniques, électriques, optiques (cf. appendice).

hypothétique espace absolu ((5), cette interprétation n'est pas entièrement satisfaisante.

En 1721, une trentaine d'années après la publication des « Principia », BERKELEY a fourni une autre interprétation de cette expérience. BERKELEY commence par remarquer que l'eau s'incurve lorsqu'elle tourne par rapport à $(\mathcal{R}_0)$, c'est-à-dire par rapport aux directions définies par les étoiles lointaines, alors qu'elle ne s'incurve pas lorsque, fixe dans $(\mathcal{R}_0)$, elle tourne par rapport aux parois du seau.

Pour BERKELEY, la différence entre les rôles de $(\mathcal{R}_0)$ et $(\mathcal{R})$ vient de la différence entre le seau et les étoiles lointaines ! Si l'on augmentait la taille et la masse des parois du seau jusqu'à se rapprocher de l'ordre de grandeur des tailles et masses mises en jeu par la distribution des étoiles lointaines, la dissymétrie entre les rôles de $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{R}_0)$ serait-elle aussi flagrante ? Telle est la question que pose BERKELEY, et pour bien montrer qu'il ne s'agit pas d'une question oiseuse, BERKELEY a imaginé une expérience idéale que nous allons maintenant décrire.

3.3. Les deux masses liquides de Berkeley.

BERKELEY imagine que l'Univers se réduit à deux masses liquides (A) et (B) identiques, assez éloignées l'une de l'autre, et en rotation relative à la vitesse $\omega(A/B)$ autour de la direction qui joint leurs barycentres.

En langage moderne, la discussion de BERKELEY revient à se poser la question suivante : Comment définir un référentiel d'inertie dans l'Univers imaginé par BERKELEY ? Peut-on, en particulier, supposer que (B) soit fixe dans un référentiel d'inertie ? Dans ce cas, (B) serait sphérique (la distance séparant (A) et (B) est supposée assez grande pour que l'attraction entre les deux masses n'ait qu'une faible influence) ; par contre, (A) tournant à la vitesse ω par rapport à un référentiel galiléen aurait une forme aplatie. On arriverait ainsi, partant d'un problème symétrique, à une situation très dissymétrique (6).

Or, il est facile d'imaginer une solution qui respecte la symétrie des données : c'est celle représentée sur la fig. 3 *b* : les deux masses (A) et (B) tournent aux vitesses $\omega/2$ et $-\omega/2$ par rapport à un référentiel galiléen $(\mathcal{R}_0)$, de sorte qu'elles présentent le même aplatissement.

---

(5) Ce sont toutes les expériences du type Michelson et Morley (qui sont à la base de la relativité restreinte) qui le montrent.

(6) Même à l'heure actuelle, il ne semble pas raisonnable d'accepter de gaieté de cœur cette situation en faisant appel à la notion de « symétrie brisée » ; la seconde solution semble beaucoup plus conforme à la démarche naturelle du physicien.

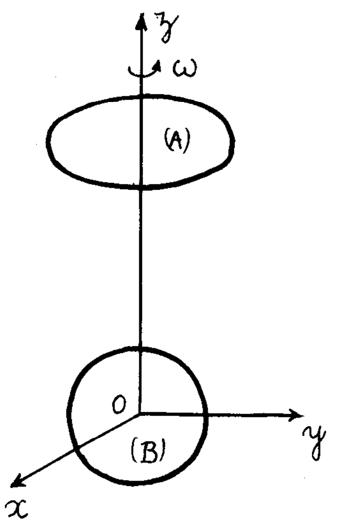

Fig. 3 *a*

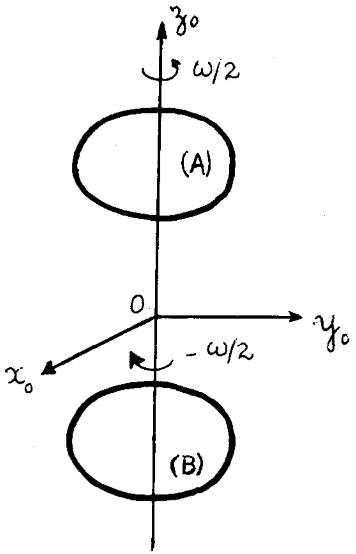

Fig. 3 *b*

Cette solution, très satisfaisante du point de vue de la symétrie, introduit cependant une idée absolument inconnue dans les exposés traditionnels de la mécanique : le référentiel galiléen ($\mathcal{R}_0$) représenté sur la fig. 3 *b* par les axes $Ox_0y_0z_0$ est déterminé par l'état des masses liquides (A) et (B). Autrement dit, dans ce problème, la définition de ($\mathcal{R}_0$) s'obtient à partir de la répartition de matière dans l'Univers. Nous allons voir que c'est en cela que réside l'idée essentielle du Principe de MACH.

4. LE PRINCIPE DE MACH.

4.1. Introduction.

L'idée fondamentale apparue dans la discussion de l'expérience des deux masses liquides est la suivante : peut-on relier la définition pratique des référentiels galiléens à la répartition de matière dans l'Univers, et si oui, par quel « canal » ce lien s'effectue-t-il ?

Pour faire ce lien, MACH écrit tout d'abord l'équation fondamentale de la dynamique dans un référentiel galiléen sous la forme :

$$\vec{f} - m\vec{\gamma} = \vec{0}$$

et remarque que si $\vec{f}$ représente l'action des différentes sources de champ (force électrique, magnétique, etc.), $m\vec{\gamma}$ qui caractérise l'inertie du point, c'est-à-dire sa « répugnance » plus ou moins forte à voir son mouvement se modifier sous l'action de $\vec{f}$, doit traduire l'action des autres corps dans l'Univers. En effet, l'accélération ne peut être définie que par rapport à d'autres corps, et si l'espace ne contenait qu'un point, l'accélération de ce point dans un espace vide serait une notion absurde. On voit ici réapparaître l'idée d'un lien souhaitable entre la définition des référentiels galiléens et la répartition de matière.

A un stade ultérieur, écrivons l'équation du mouvement d'un point dans un champ de gravitation $\vec{a}$, équation écrite dans un référentiel quelconque, en tenant compte par conséquent des forces d'inertie. Cette équation s'écrit, en distinguant la masse inerte m_i et la masse gravitationnelle m_g :

$$m_i\, d^2\vec{r}/dt^2 = m_g\vec{a} - m_i\vec{\gamma}_e - 2\, m_i\vec{\omega}_e \wedge (d\vec{r}/dt). \quad (4)$$

Or, l'expérience montre avec une excellente précision que le rapport :

$$\alpha = m_g/m_i$$

est indépendant de la nature du corps. Avec un choix approprié des unités, on peut prendre $\alpha = 1$. Cette identité masse gravitationnelle - masse inerte est seulement une constatation expérimentale de la mécanique newtonienne. Elle constitue l'un des fondements de la relativité générale (principe d'équivalence) (7).

Nous écrirons ainsi :

$$d^2\vec{r}/dt^2 = \vec{a} - \vec{\gamma}_e - 2\,\vec{\omega}_e \wedge (d\vec{r}/dt). \quad (5)$$

Sur cette relation, nous voyons apparaître deux idées importantes :

— d'une part, il n'y a plus de différence essentielle entre le champ de gravitation $\vec{a}$ et les « champs d'accélération » $d^2\vec{r}/dt^2$, $\vec{\gamma}_e$ et $\vec{\gamma}_c = 2\,\vec{\omega}_e \wedge (d\vec{r}/dt)$ qui traduisent l'inertie ;

— par ailleurs, les caractéristiques du point en mouvement ont disparu de cette équation, ce qui montre que celle-ci traduit en fait une propriété de l'espace.

---

(7) Cf. article suivant, § 2 (à paraître en mai 1981).

Cette analyse met en évidence la parenté étroite qui existe entre les forces d'inertie et les forces de gravitation (parenté dont nous donnerons l'expression mathématique au § 5.3). Elle suggère aussi d'interpréter l'équation du mouvement d'un point dans un champ de gravitation en termes « géométriques » en faisant intervenir les propriétés locales de l'espace. Ce dernier point est une des idées fondamentales de la relativité générale.

4.2. Le Principe de Mach.

L'étude précédente conduit à se demander si la définition (théorique) des référentiels galiléens ou référentiels d'inertie ne devrait pas reposer sur la répartition générale de matière dans l'Univers dans le cadre d'une théorie de la gravitation qui englobe le problème de l'espace. En d'autres termes, il serait souhaitable de ne pas dissocier le problème de l'espace (physique) de celui de la matière qui le remplit.

C'est en cela que réside l'idée essentielle du Principe de MACH (8).

Il est assez remarquable que, même sous cette forme très vague, le Principe de MACH parvienne à donner une idée assez intuitive du référentiel de COPERNIC : avec son origine au barycentre du système solaire et ses axes dirigés vers des étoiles lointaines, le référentiel de COPERNIC est celui dans lequel la matière est « globalement » au repos. On obtient ainsi une interprétation de l'expérience du seau tournant conforme aux idées de BERKELEY.

MACH n'a pas donné de formulation nette (*i. e.* quantitative) à son idée. Cependant, ses critiques de la notion newtonienne d'espace absolu ont été assez fortes pour provoquer une intéressante tentative de vérification expérimentale qui sera décrite dans le § 4.3. Par ailleurs, les conceptions de MACH ont énormément influencé EINSTEIN : juxtaposer les problèmes de la gravitation et des changements de coordonnées, de l'espace et de la matière, c'est rassembler les « principaux ingrédients » de la Relativité générale ».

4.3. L'expérience de B. et T. Friedlander (1896).

En 1896, les frères FRIEDLANDER ont essayé de vérifier l'interprétation de MACH et BERKELEY de l'expérience du seau tournant.

---

(8) D'après les idées de Mach, les rotations absolues (*i. e.* rotations par rapport aux directions fixes des référentiels galiléens) deviennent des rotations par rapport à la répartition globale de matière.

Ils ont effectué des expériences à l'intérieur d'un lourd volant de rayon R et de masse M animé d'un mouvement de rotation de vitesse ω autour de son axe dans le référentiel du laboratoire considéré comme galiléen.

Ce volant joue le même rôle que les parois du seau, et si les idées de BERKELEY et MACH sont correctes, la rotation du volant doit « induire » un champ de forces d'inertie à l'intérieur de celui-ci. C'est ce champ de forces que les frères FRIEDLANDER ont essayé de détecter mais le résultat de leur investigation a été négatif.

Il est facile de montrer, cependant, que ce résultat nul ne porte pas un coup fatal aux idées de MACH. En 1896, on ne disposait pas de théorie « gravitodynamique » permettant de prévoir l'ordre de grandeur de l'effet cherché (il ne faut pas oublier que la théorie newtonienne de la gravitation est essentiellement statique). Au début du 20me siècle, la Relativité générale a permis de donner une solution (approchée) de ce problème ; le résultat est le suivant : à l'intérieur du volant, tout se passe comme si l'on avait affaire à un référentiel tournant à la vitesse :

$$\Omega \sim -\omega \, GM/Rc^2 \qquad (6)$$

par rapport à un référentiel galiléen ($G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ SI est la constante de gravitation, $c = 3 \cdot 10^8$ m. s^{-1} la vitesse de la lumière).

Si l'on prend les ordres de grandeur suivants : $R = 1$ m, $M = 20$ tonnes $= 2 \cdot 10^4$ kg, $\omega = 3\,000$ tours/mn $= 100\,\pi$ rd. s^{-1}, on obtient :

$$\Omega \sim 4{,}7 \cdot 10^{-21} \text{ rd. s}^{-1}.$$

Pour montrer combien ce terme est insignifiant, formons la période correspondante :

$$T = 2\pi/\Omega \sim 1{,}3 \cdot 10^{21} \text{ s} = 4{,}3 \cdot 10^{13} \text{ ans}$$

soit plus de 1 000 fois l'âge de l'Univers ($T_0 \sim 5 \cdot 10^{17}$ s).

Il est intéressant, par contre, de noter que si l'on remplace M et R par des grandeurs « cosmologiques », on obtient un résultat en accord avec les idées de MACH. Ainsi, dans le « modèle statique d'EINSTEIN » (9), la masse M de l'Univers et son rayon R sont liés par :

$$GM/Rc^2 = \pi/2, \text{ de l'ordre de l'unité,}$$

on obtient alors, après substitution dans (6) :

$$\Omega \sim -\omega \qquad (7)$$

ce qui est tout à fait satisfaisant.

---

(9) Cf. article suivant, § 7.2.

5. FORCES D'INERTIE, GRAVITATION ET RELATIVITE GENERALE.

Pour un référentiel d'inertie sans champ de gravitation, comme ceux considérés en relativité restreinte, la structure de l'espace-temps est caractérisée par la forme quadratique invariante — dite ds^2 de MINKOWSKY :

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad (8)$$

ou, en coordonnées sphériques :

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dr^2 - r^2\,d\vartheta^2 - r^2\sin^2\vartheta\,d\varphi^2. \qquad (9)$$

En relativité générale (10), il convient de prendre un ds^2 beaucoup moins restrictif, et l'on pose :

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}\,dx^i\,dx^j \qquad (10)$$

où les g_{ij} sont des fonctions des coordonnées, quelconques « *a priori* » ; on les appelle composantes du champ métrique.

Ainsi, pour une masse sphérique M placée en O, l'espace est caractérisé par le ds^2 de SCHWAZCHILD en coordonnées de SCHWAZCHILD :

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{2\,GM}{rc^2}\right)dt^2 \ldots$$

$$\ldots - \frac{dr^2}{1 - \dfrac{2\,GM}{rc^2}} - r^2\,d\vartheta^2 - r^2\sin^2\vartheta\,d\varphi^2 \qquad (11)$$

Pour M = 0, on retrouve bien le ds^2 de MINKOWSKY en coordonnées sphériques.

D'autre part, dans le ds^2 de MINKOWSKY (9), effectuons la transformation $\varphi \to \varphi + \Omega t$, Ω étant une constante ; cette transformation correspond à une rotation uniforme autour de Oz, comme celle rencontrée dans le problème du seau tournant. On trouve ainsi :

$$ds^2 = (c^2 - \Omega^2 r^2 \sin^2\vartheta)\,dt^2 \ldots$$

$$\ldots - dr^2 - r^2\,d\vartheta^2 - r^2\sin^2\vartheta\,d\varphi^2 - 2\,\Omega\,r^2\sin^2\vartheta\,d\varphi\,dt \qquad (12)$$

La comparaison des différentes expressions de ds^2 qui viennent d'être données montre que les g_{ij} sont affectés d'une part par la répartition des masses, d'autre part par les changements de coordonnées.

---

(10) Ces brèves considérations seront développées dans l'article suivant.

Par ailleurs, on démontre que le mouvement est déterminé par les g_{ij}, les composantes du champ métrique jouant le rôle de potentiels.

Autrement dit, un même formalisme explique :

— les forces de gravitation puisque les g_{ij} dépendent de la répartition des masses,

— les forces d'inertie puisqu'ils sont affectés par un changement de référentiel.

En relativité générale, les forces de gravitation et les forces d'inertie sont de même nature : ce sont des manifestations du champ métrique g_{ij}.

Remarque.

Cette identité de nature est, comme nous l'indiquerons dans l'article suivant, à la base même de la relativité générale : c'est le principe d'équivalence. Toutefois, cette équivalence n'a qu'un caractère local : à grande échelle, on ne peut pas systématiquement assimiler un champ de gravitation et un champ d'inertie. Ainsi, il n'est pas possible d'engendrer par changements de coordonnées (donc changement de référentiel) un champ d'inertie ayant la symétrie sphérique du champ de gravitation d'un astre (11).

La non validité du principe d'équivalence pour un volume fini peut s'illustrer sur un exemple simple : dans un référentiel ($\mathfrak{R}$) animé d'un mouvement rectiligne d'accélération constante $-\vec{g}$ par rapport à un référentiel galiléen, règne un champ de force d'inertie très analogue au champ de pesanteur terrestre ; cependant, si l'on abandonne deux points matériels sans vitesse initiale dans ($\mathfrak{R}$), ces points tombent en suivant des trajectoires rigoureusement parallèles ; dans le champ de pesanteur terrestre, on noterait un rapprochement des deux trajectoires, dû au caractère radial du champ de gravitation. Cet exemple montre bien que l'équivalence entre un champ d'inertie et un champ de gravitation a un caractère local et ne peut pas être étendue à un volume fini.

6. RELATIVITE GENERALE ET PRINCIPE DE MACH.

6.1. Aspect local du Principe de Mach.

Comme nous l'avons signalé dans la relation de l'expérience de FRIEDLANDER (§ 4.3), à l'intérieur d'un volant en rotation, l'es-

(11) Nous reprendrons cette discussion dans les mêmes termes dans l'article suivant où nous donnerons l'expression mathématique de cette restriction.

pace est, en quelque sorte, « entraîné » à la vitesse de rotation Ω, cette vitesse de rotation étant cependant trop faible pour être mise en évidence par l'expérience. Cette tendance locale, prévue par la Relativité Générale est, comme nous l'avons souligné, conforme aux idées de MACH.

En suivant les idées de MACH, on doit s'attendre à un effet un peu analogue à l'extérieur d'un astre en rotation par rapport à un référentiel galiléen. A partir des équations de la Relativité Générale, LENSE et THIRRING ont obtenu, en 1918, la solution approchée suivante relative à un astre sphérique de masse M et de moment cinétique $\vec{\sigma}$ porté par Oz :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\,GM}{rc^2}\right) c^2\, dt^2 - \left(1 + \frac{2\,GM}{rc^2}\right)(dr^2 + r^2\, d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) \ldots$$

$$\ldots + \frac{4\,G\sigma}{r^3\, c^2}\, r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi\, dt \qquad (13)$$

La comparaison avec la relation (12) du § 5.2 montre que le dernier terme a la même forme que celui traduisant une rotation à la vitesse :

$$\Omega = \frac{-2\,G\sigma}{r^3\, c^2} \qquad (14)$$

par rapport à un référentiel galiléen. En d'autres termes, localement les axes d'inertie « tournent » à la vitesse $-\Omega$ par rapport aux directions définies par les étoiles lointaines (lorsque dans la solution de LENSE et THIRRING on fait tendre r vers l'infini, on retrouve de façon asymptotique le ds^2 de MINKOWSKY). Cette manifestation locale est conforme au principe de MACH.

En particulier, si l'on plaçait un gyroscope au voisinage de cet astre en rotation, ce gyroscope devrait garder une direction fixe par rapport aux axes locaux d'inertie, donc tourner à la vitesse $-\Omega$ par rapport aux directions définies par les étoiles lointaines (12).

On peut essayer de chiffrer l'ordre de grandeur de Ω pour un gyroscope embarqué dans un satellite tournant à basse altitude autour de la Terre ($r \simeq R = 6{,}37 \cdot 10^6$ m), en prenant $\sigma \approx (2/5)\, MR^2\, \omega$ avec :

$$M = 6 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \quad \text{et} \quad \omega = 2\pi/(86\,164) = 7{,}292 \cdot 10^{-5}\ \text{rd.}\,\text{s}^{-1} ;$$

(12) Le problème est, en fait, plus compliqué ; les calculs sont abordés en particulier dans [4], chap. 9, § 5 (p. 133) et [6], § 106, problème 4 (p. 440).

on obtient ainsi :

$$\Omega \approx 4 \cdot 10^{-14} \text{ rd/s}$$

soit, en un an (= $3{,}16 \cdot 10^7$ s), un changement de direction de :

$$\delta\varphi = 0{,}26 \text{ seconde d'arc.}$$

L'expérience a été tentée dans des conditions où l'on s'attendait à un effet de 0,05 "/an, mais l'effet a été noyé sous une multitude de corrections et aucun résultat probant n'a émergé.

6.2. Relativité générale et rotations absolues.

Par la façon même dont on aborde le calcul, la solution de LENSE-THIRRING correspond à un astre seul dans l'espace, en rotation autour de Oz ; mais on peut légitimement se demander par rapport à quoi tourne cet astre.

Mathématiquement, la réponse est : par rapport à un système de coordonnées qui, loin de l'astre, tend vers l'expression de MINKOWSKY.

C'est cette condition qui, pour les équations du champ, joue le rôle de condition aux limites. A l'infini, ces coordonnées correspondent manifestement à un référentiel d'inertie et les directions correspondantes jouent le rôle de directions fixes.

Il faut bien voir, cependant, que cette réponse ne répond pas parfaitement à la question posée car en fait, si l'astre est vraiment seul dans l'espace, parler de sa rotation n'a aucun sens. Il est significatif à cet égard que la solution de LENSE-THIRRING ne s'obtient pas à partir de la solution de SCHWARZCHILD (11) par une transformation du type $\varphi \rightarrow \varphi + \omega t$.

En conclusion, le problème de LENSE-THIRRING correspond à une rotation par rapport à un référentiel galiléen, que la théorie ne permet pas de définir à partir des données du problème ; on a, en quelque sorte, une rotation absolue. La Relativité Générale n'élimine donc pas, ici, le rôle particulier joué par les référentiels galiléens et laisse ce problème dans un état aussi peu satisfaisant que la théorie newtonienne.

6.3. Aspect global du Principe de Mach et Relativité générale.

La véritable dimension du principe de MACH est, comme le montre la dernière application numérique du § 4.3, cosmologique. Autrement dit, on doit envisager le problème des référentiels dans l'Univers considéré comme un tout et représenté par un modèle plausible.

Dans une théorie complètement « machienne », le champ métrique g_{ij} devrait être déterminé de façon unique à partir du tenseur impulsion-énergie T_{ij} ; par ailleurs, afin d'éviter la difficulté liée à des rotations « absolues » dans un espace vide — comme celle qui apparaît dans la solution de LENSE-THIRRING —, il serait souhaitable que l'on ne puisse pas trouver de solution des équations du champ exemptes de singularités (13) dans un espace vide ($P = 0$, $\rho = 0$). Ce point est discuté de façon particulièrement claire dans [2] § 6.2 et note 17 ; il s'agit de l'expression précise du principe de MACH « au sens fort ».

Le tableau ci-après montre que la Relativité Générale orthodoxe — c'est-àdire fondée sur les équations du § 5.1 — ne satisfait pas à ces exigences (14).

<table>
<tr><th></th><th>Théorie sans constante cosmologique : $\Lambda = 0$</th><th>Théorie avec constante Λ non nulle</th></tr>
<tr><td>Solution pour $\rho = 0$</td><td>Oui : le ds^2 de MINKOWSKY ; c'est la seule solution statique, sans singularité, tendant vers $\pm\,\delta_{ij}$ à l'infini (cf. [5] § 8.6).</td><td>Sans doute pas de solution connue exempte de singularité.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Solution pour $\rho \neq 0$</td><td colspan="2">Dans les deux cas, si l'on impose une condition d'isotropie à la métrique, la forme du ds^2 est unique (ds^2 de ROBERTSON). Le lien entre la condition d'isotropie et le Principe de MACH est examiné dans [5] §§ 12.3 et 12.4.</td></tr>
<tr><td></td><td>Pour $\Lambda \neq 0$, si l'on abandonne la condition d'isotropie, on obtient une autre solution (solution de GÖDEL (cf. [5] § 13.4).</td></tr>
</table>

Par conséquent si, localement, la Relativité Générale dénote des tendances à la relativité de l'inertie conformes au principe de MACH, elle ne contient pas le principe de MACH au sens fort. Celui-ci n'est pas incorporé à la théorie, mais joue par rapport à celle-ci un rôle analogue aux conditions aux limites, en particulier lorsque l'on exploite les conditions d'homogénéité et d'isotropie (voir référence dans le tableau précédent).

(13) Les singularités peuvent correspondre à une répartition ponctuelle de matière.

(14) Les équations du champ et la signification de la constante cosmologique Λ sont données dans l'article suivant, §§ 4 et 7.

7. QUELQUES ASPECTS ACTUELS DU PROBLEME.

Dans le cadre de la Relativité Générale, les tendances locales machiennes signalées au § 6.1 n'ont pas encore été décelées.

Le Principe de MACH, réunissant les notions de gravitation, d'inertie et de coordonnées a joué un grand rôle dans l'élaboration de la Relativité Générale et reste encore une source d'inspiration pour les théoriciens.

En effet, d'autres théories de la gravitation ont été proposées, qui tentent d'englober dès le départ, le Principe de MACH. Citons ici la théorie de BRANS-DICKE (cf. [5] § 11.5, [4] § 16.3) et la théorie de HOYLE-NARLIKAR (cf. [4] § 16.4).

A l'approximation post-newtonienne, on peut donner un développement commun à toutes ces théories en fonction de neuf paramètres, ces paramètres prenant dans chaque théorie un jeu de valeurs caractéristiques. C'est le formalisme PPN (parametrized post-Newtonian formalism). Des expériences judicieusement choisies devraient permettre de déterminer expérimentalement le « bon » jeu de paramètres (cf. [4] § 17.1).

8. UNE CONCLUSION.

En mécanique classique, les forces d'inertie se distinguent des champs de force habituels par le problème des sources ; issues de transformations cinématiques, elles ont un aspect « artificiel » qui les fait parfois qualifier de « fictives ». La Relativité Générale englobe ces forces dans le même formalisme que les forces de gravitation. Cependant, dans un cas comme dans l'autre, le rôle particulier des référentiels galiléens reste inexplicable dans le cadre strict de la théorie.

Dans le domaine des concepts, le Principe de MACH donne un début de réponse à cette question ; cependant, sa portée dépend des théories utilisées ; à l'heure actuelle, l'expérience ne permet pas encore de trancher.

Jacques RENAULT,
(Lycée du Parc à Lyon).

BIBLIOGRAPHIE

[1] D.-W. SCIAMA. — *Les bases physiques de la relativité générale* (Dunod). Il s'agit, contrairement aux autres ouvrages, d'un exposé élémentaire. La relativité générale est présentée systématiquement d'un point de vue « machien ».

[2] W. PAULI. — *Theory of Relativity* (1967). Pergamon Press.

[3] C. MOLLER. — *The Theory of Relativity* (2de édition, 1972), Oxford University Press. Le § 11-3 examine certains aspects locaux du Principe de Mach.

[4] J.-V. NARLIKAR. — *General Relativity and Cosmology,* Mac Millan (1979). Le chapitre 16 est entièrement consacré au Principe de Mach.

[5] R.-J. ADLER, M.-J. BAZIN, M. SCHIFFER. — *Introduction to General Relativity* (2de édition, 1975), Mc Graw Hill.

[6] L. LANDAU, E. LIFCHITZ. — *Théorie des champs* (3me édition, 1970), Moscou.

APPENDICE

NOTE SUR LES ROTATIONS ABSOLUES.

— En mécanique, l'expérience la plus célèbre est celle du pendule de FOUCAULT ; elle est cependant très délicate à interpréter : si l'on ne prend pas de très grandes précautions, ce n'est pas la rotation de la Terre que l'on met en évidence, mais la précession du pendule sphérique (cf. M. JOYAL et P. PROVOST, *Mécanique,* Masson éditeur, §§ 24.4 à 24.6).

— En électricité, la rotation de charges dans un référentiel galiléen engendre un champ magnétique ; une discussion claire se trouve dans PANOFSKY et PHILLIPS, *Classical Electricity and Magnetism,* Addison-Wesley, § 18.6.

— En optique, l'expérience de SAGNAC permet de détecter une rotation par rapport à un référentiel galiléen par déplacement d'un système de franges. Cette expérience qui a intrigué les premiers « relativistes » et est parfois qualifiée de « pendant optique de l'expérience de FOUCAULT » est bien décrite dans A. SOMMERFELD, *Optics,* Academic Press, § 15.