

CHOIX DU REPERE EN MECANIQUE CLASSIQUE
Jean SIVARDIERE

 CEA / Département de Recherche Fondamentale
 sur la matière condensée / MRS
 38054 Grenoble Cedex 9

Lorsqu'un problème de mécanique classique exprimé dans un certain repère galiléen est compliqué, il est parfois possible de le simplifier en se plaçant dans un autre repère, galiléen ou non, judicieusement choisi. La méthode consiste à compenser des forces galiléennes, qui décrivent des interactions physiques, par des quantités introduites par le changement de repère, en particulier des forces d'inertie : nous en donnons des exemples variés, dont certains sont classiques (1).

1. Oscillateur harmonique déplacé

Soit une particule de masse m liée à un centre attractif O par une force harmonique isotrope $-k \vec{r}$: elle oscille sur une ellipse de centre O . Supposons qu'elle soit soumise également à une force uniforme \vec{F} . C'est par exemple le cas, dans le modèle de Thomson, de l'électron de l'atome d'hydrogène placé dans un champ électrique uniforme (effet Stark). Dans un repère galiléen, l'équation du mouvement s'écrit :

$$m \vec{a} = -k \vec{r} + \vec{F} \quad (1)$$

Introduisons une nouvelle origine O' telle que $\vec{OO}' = \vec{r}_0$: la position de m est alors donnée par $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$. On peut éliminer l'influence de la force constante \vec{F} en choisissant $\vec{r}_0 = \frac{1}{k} \vec{F}$, c'est-à-dire en plaçant O' au point d'équilibre de m , et on voit immédiatement que l'oscillation de m se fait sur une ellipse de centre O' .

Si la force attractive n'est pas harmonique, le mouvement perturbé par la force uniforme \vec{F} ne se déduit pas du mouvement non perturbé en effectuant une simple translation de l'origine au point d'équilibre de m ou en tout autre point. Par exemple si la force attractive est képlérienne (effet Stark sur l'atome de Rutherford), le mouvement perturbé est très complexe : l'orbite est une ellipse d'excentricité variable qui précesse autour de la direction de \vec{F} (2).

Dans la suite de cet article, nous envisageons des changements de repère correspondant non plus à un simple changement d'origine mais à un changement du solide de référence.

2. Mouvement cyclotron dans un champ électrique

Une particule de masse m , de charge q (supposée positive pour simplifier) et de vitesse initiale \vec{v}_0 horizontale est soumise à un champ magnétique uniforme \vec{B} dirigé suivant la verticale z : on sait que son mouvement est circulaire et uniforme dans un plan horizontal, la vitesse angulaire autour de z est $\omega_c = -\frac{qB}{m}$ et le rayon de l'orbite est $R = \frac{m v_0}{qB}$. Si on applique un champ électrique uniforme \vec{E} suivant la direction horizontale y , l'équation du mouvement s'écrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \wedge \vec{B} + q \vec{E} \quad (2)$$

Introduisons alors un repère galiléen se déplaçant à la vitesse constante \vec{V} par rapport au repère galiléen initial. Dans ce deuxième repère, où la charge se déplace à la vitesse \vec{v}' telle que $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'$, on peut éliminer l'influence du champ électrique. En effet l'équation du mouvement se réduit à :

$$m \frac{d\vec{v}'}{dt} = q \vec{v}' \wedge \vec{B}$$

si on choisit :

$$\vec{V} \wedge \vec{B} + \vec{E} = 0$$

soit, en multipliant vectoriellement par \vec{B} et en utilisant la formule de Gibbs donnant le double produit vectoriel :

$$\vec{V} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2}$$

Dans le deuxième repère, lui aussi galiléen, le mouvement est un mouvement cyclotron de même vitesse angulaire $\omega_c = -\frac{qB}{m}$, le rayon de

l'orbite est $R' = \frac{m v'_0}{q B}$. Revenons au repère initial : nous voyons que le mouvement, composition d'un mouvement circulaire uniforme autour de z et d'un mouvement d'entraînement de translation uniforme suivant x , est trochoïdal. La nature de la trajectoire dépend des conditions initiales. Si $\vec{v}_0 = \vec{V}$, $R' = 0$ et la trajectoire est une droite parallèle à x . Si $\vec{v}_0 = 0$, $v'_0 = V = E/B$ et le rayon du cercle générateur de la trochoïde est $R' = \frac{V}{|\omega|}$, la trajectoire est donc une cycloïde. Dans le cas général (3), la trajectoire est une trochoïde allongée ou raccourcie dont la base est parallèle à x .

Signalons que les résultats précédents sont considérablement modifiés en mécanique relativiste (4). Les formules ci-dessous montrent comment les champs électrique E (suivant y) et magnétique B (suivant z) se transforment quand on passe du repère galiléen initial au repère se déplaçant à la vitesse constante \vec{V} par rapport à lui :

$$\begin{aligned} E' &= \gamma(E - V B) \\ B' &= \gamma\left(B - \frac{V}{c^2} E\right) \end{aligned}$$

E' est suivant y , B' suivant z , et :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Si $E/B < c$, il existe un repère tel que $V = E/B$ dans lequel le champ est purement magnétique ; si $E/B > c$, il existe un repère tel que $V = c^2 B/E$ dans lequel le champ est purement électrique : seul le premier repère est mis en évidence par le calcul classique.

3. Transformation de Larmor

Considérons une particule de masse m et de charge q soumise à une force quelconque \vec{F} . Si on lui applique un champ magnétique \vec{B} , son mouvement est perturbé par la force de Lorentz. Exploitant l'analogie formelle entre les forces de Lorentz et de Coriolis, Larmor a étudié le problème en se plaçant dans un repère tournant autour de l'origine à une certaine vitesse angulaire constante ω par rapport au repère initial galiléen. En introduisant les forces d'inertie centrifuge et de Coriolis, l'équation du mouvement s'écrit dans ce repère tournant :

$$m \vec{a} = \vec{F} + q \left[\vec{v} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \right] \wedge \vec{B} - m \vec{\omega} \wedge \left[\vec{\omega} \wedge \vec{r} \right] + 2m \vec{v} \wedge \vec{\omega} \quad (3)$$

Si on choisit $2m \vec{\omega} = -q \vec{B}$, soit $\omega = \omega_L = -\frac{qB}{2m}$, l'équation devient, en utilisant la formule de Gibbs donnant le double produit vectoriel :

$$m \vec{a} = \vec{F} - \frac{q^2}{4m} (\vec{B} \wedge \vec{r}) \wedge \vec{B} \quad (4)$$

Nous considérons dans la suite le cas particulier où le mouvement non perturbé est plan et où le champ magnétique est appliqué perpendiculairement au plan de ce mouvement. L'équation (4) devient :

$$m \vec{a} = \vec{F} - \frac{q^2 B^2}{4m} \vec{r} \quad (4')$$

On voit que, dans le passage au repère de Larmor, la force de Lorentz a été remplacée par une force harmonique attractive.

Dans le cas du mouvement cyclotron ($\vec{F} = 0$), la simplification apportée par la transformation de Larmor n'est pas évidente : le mouvement est elliptique dans le repère de Larmor alors qu'il est circulaire dans le repère initial. Dans le cas du mouvement cyclotron sous champ électrique uniforme, le problème est nettement plus compliqué dans le repère de Larmor (avec une origine quelconque), où le champ électrique est tournant, que dans le repère fixe. Cependant, comme nous allons le voir, le passage au repère de Larmor peut se révéler utile dans d'autres situations où la force \vec{F} est centrale.

4. Précession de Larmor

Reprenons le problème de la section 3 dans le cas où la force \vec{F} est centrale et attractive : en l'absence de champ magnétique, la masse m gravite dans un plan autour de l'origine O . Si le champ magnétique est faible, et plus précisément si la vitesse angulaire de Larmor ω_L est très inférieure à la vitesse angulaire moyenne ω_0 du mouvement non perturbé, on peut négliger le deuxième terme, appelé terme diamagnétique, dans le deuxième membre de l'équation (4) ci-dessus.

On voit alors que le mouvement est, approximativement, le même dans le repère tournant qu'en champ nul dans le repère fixe : l'application d'un champ faible provoque donc une précession lente de l'orbite non

perturbée autour de la direction du champ (fig.1), à la vitesse angulaire de Larmor $\omega_L \ll \omega_0$.

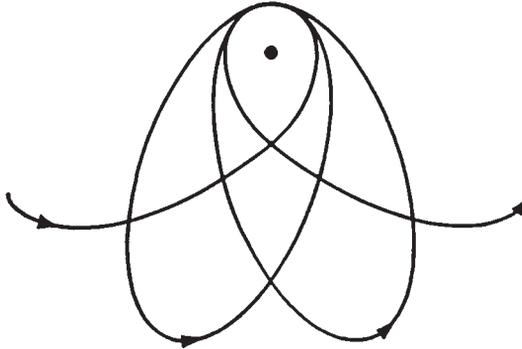


Fig.1 - Précession de Larmor dans le cas où l'orbite non perturbée est dans un plan perpendiculaire au champ (dans le cas général, le plan de l'orbite précesse autour du champ).

5. Effet Zeeman sur l'oscillateur harmonique chargé

Reprenons le problème de la section 3 dans le cas particulier où la force est centrale et harmonique : $\vec{F} = -m\omega_0^2 \vec{r}$. C'est le problème de l'effet Zeeman sur l'électron de l'atome de Thomson. Dans un repère tournant à la vitesse angulaire constante $\vec{\omega}$ par rapport au repère initial galiléen, l'équation du mouvement (3) s'écrit :

$$m \vec{a} = \left(m \omega^2 + q B \omega - m \omega_0^2 \right) \vec{r} + \vec{v} \wedge \left(q \vec{B} + 2 m \vec{\omega} \right) \quad (5)$$

Si on utilise la méthode de Larmor, on obtient :

$$m \vec{a} = - \left(m \omega_0^2 + \frac{q^2 B^2}{4 m} \right) \vec{r} \quad (6)$$

Quelle que soit la valeur du champ B, le mouvement dans le repère de Larmor est elliptique harmonique et sa pulsation est égale à $\sqrt{\omega_0^2 + \omega_L^2}$ (peu différente de ω_0 si B est faible) : le mouvement dans le repère galiléen s'en déduit par une précession à la vitesse angulaire ω_L .

Une autre description de ce mouvement, équivalente à la précédente mais plus explicite, est possible. On peut en effet choisir pour ω une racine de l'équation :

$$m\omega^2 + qB\omega - m\omega_0^2 = 0$$

ou :

$$\omega^2 - 2\omega_L\omega - \omega_0^2 = 0$$

soit $\omega = \omega_{\pm}$ avec :

$$\omega_{\pm} = \omega_L \pm \sqrt{\omega_L^2 + \omega_0^2}$$

Dans le repère tournant à la vitesse angulaire $\omega = \omega_{\pm}$, c'est la force harmonique (et non plus la force de Lorentz) qui a disparu. Le mouvement est un mouvement cyclotron dans le champ $\vec{B}' = \vec{B} + \frac{2m}{q}\omega_{\pm}$ de pulsation $\mp 2\sqrt{\omega_L^2 + \omega_0^2}$ dans le repère tournant et ω_{\mp} dans le repère galiléen : le mouvement dans le repère galiléen, composition de deux mouvements circulaires uniformes, est donc épicyclique (5). Une démonstration algébrique de ce résultat est donnée en appendice.

Remarque - Considérons le cas d'une force harmonique répulsive $\vec{F} = +m\omega_0^2 \vec{r}$. En champ magnétique nul, le mouvement se fait sur une branche d'hyperbole de centre O. Appliquons un champ. Dans le repère de Larmor, la force résultante sur m est nulle d'après (4') si on choisit $\omega_L = \omega_0$ et le mouvement est rectiligne et uniforme. Revenant au repère fixe, on trouve immédiatement l'équation de la trajectoire qui, pour certaines conditions initiales, est une développante de cercle.

6. Oscillateur harmonique

Considérons un oscillateur harmonique de masse m soumis à la force de rappel $\vec{F} = -m\omega_0^2 \vec{r}$. Étudions son mouvement dans un repère tournant à la vitesse angulaire ω autour de l'origine. Si on choisit $\omega = \omega_0$, la force centrifuge compense la force harmonique, seule agit la force de Coriolis $\vec{F} = 2m\vec{v} \wedge \vec{\omega}$. Dans le repère tournant, le mouvement est donc celui qu'aurait la masse m si elle portait la charge q et était placée dans un champ magnétique tel que $q\vec{B} = 2m\omega_0$, c'est-à-dire un mouvement

circulaire uniforme de centre C, de rayon $R = v_0/2\omega_0$ et de vitesse angulaire $-qB/m = -2\omega_0$ (l'orbite est appelée cercle d'inertie). En composant ce mouvement avec le mouvement d'entraînement de rotation à la vitesse angulaire ω_0 , on peut vérifier que l'orbite dans le repère fixe est une ellipse de demi-axes $a = OC + R$ et $b = OC - R$. Le changement de repère a compliqué le problème, il va cependant être utile dans l'exemple suivant.

7. Pendule de Foucault

Étudions le mouvement d'un pendule de Foucault au pôle nord. Dans un repère géocentrique d'axes fixes par rapport aux étoiles, le pendule de masse m subit la force de rappel $\vec{F} = -m\omega_0^2\vec{r}$. Dans le repère terrestre tournant à la vitesse angulaire constante $\vec{\Omega}$ par rapport au précédent, l'équation du mouvement s'écrit :

$$m\vec{a} = -m\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)\vec{r} + \vec{v} \wedge 2m\vec{\Omega} \quad (7)$$

Introduisons un troisième repère tournant à la vitesse angulaire constante $\vec{\omega}$ par rapport au repère terrestre. Dans ce repère, l'équation du mouvement s'écrit :

$$m\vec{a} = -m\left(\omega_0^2 - (\Omega + \omega)^2\right)\vec{r} + \vec{v} \wedge 2m(\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \quad (8)$$

Choisissons, suivant la méthode de la section 6 : $\omega = \omega_0 - \Omega$ afin d'éliminer les forces harmoniques. On a alors :

$$\vec{a} = \vec{v} \wedge 2\vec{\omega}_0$$

Cette équation décrit un mouvement circulaire uniforme de rayon $R = v_0/2\omega_0$ et de vitesse angulaire $-2\omega_0$. Revenant au repère terrestre, on voit que le mouvement, composition d'un mouvement circulaire de vitesse angulaire $-2\omega_0$ et d'un mouvement d'entraînement de vitesse angulaire $\omega = \omega_0 - \Omega$, est épicyclique. La trajectoire du pendule présentant des points de rebroussement successifs qui sont des points d'élongation maximale, il s'agit nécessairement d'une hypocycloïde. Ce résultat est classique, il est ici démontré géométriquement.

8. Mouvement central perturbé par un potentiel en $1/r^2$

Supposons connu le mouvement d'une masse m sous l'effet d'un potentiel central $U(r)$, dont dérive la force centrale $F(r)$, et étudions le mouvement perturbé par le potentiel $U = -\frac{m\beta}{r^2}$. Dans un repère galiléen,

l'équation du mouvement est :

$$m \vec{a} = F(r) \vec{u} - 2m\beta \frac{\vec{u}}{r^3} \quad (9)$$

($\vec{u} = \vec{r}/r$). La loi des aires est satisfaite et s'écrit :

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C \quad (10)$$

Plaçons-nous maintenant dans un repère tournant à la vitesse angulaire variable $\omega(t)$. Les coordonnées polaires de m dans les deux repères sont liées par $r = r'$ et :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta'}{dt} + \omega \quad (11)$$

Dans le repère tournant, trois forces d'inertie se manifestent : la force centrifuge $m\omega^2 \vec{r}$, la force de Coriolis $2m\vec{v} \wedge \vec{\omega}$ et la force d'Euler $m\vec{r} \wedge \frac{d\omega}{dt}$. Par suite, les composantes radiale et tangentielle de la force résultante sont respectivement :

$$F_r = F(r) - \frac{2m\beta}{r^3} + m\omega^2 r + 2m\omega r \frac{d\theta'}{dt}$$

$$F_t = -2m\omega \frac{dr}{dt} - mr \frac{d\omega}{dt}$$

Choisissons $\omega(t)$ de telle sorte que la composante tangentielle soit nulle. Nous obtenons, K étant une constante arbitraire :

$$r^2 \omega(t) = K \quad (12)$$

La force dans le repère tournant étant alors radiale dans le repère tournant, la loi des aires est satisfaite :

$$r^2 \frac{d\theta'}{dt} = C' \quad (13)$$

De (10), (11), (12) et (13), on déduit : $C = C' + K$. La composante radiale de la force résultante est alors :

$$F_r = F(r) + \frac{m}{r^3} (K^2 + 2C'K - 2\beta)$$

Si on choisit la constante arbitraire K égale à une racine de l'équation :

$$K^2 + 2C'K - 2\beta = 0 \quad (14)$$

on élimine la force perturbatrice. On voit que l'équation du mouvement perturbé dans le repère tournant à la vitesse angulaire variable $\omega(t)$ est identique à celle du mouvement non perturbé dans le repère fixe. On peut choisir par exemple pour K la racine de plus petit module, peu différente de β/C . De (14) on déduit :

$$C'^2 = C^2 - 2\beta$$

Si le potentiel non perturbé est képlérien ($U = -km/r$), l'orbite non perturbée est une ellipse de Kepler de demi-axes a et b (et de paramètre $p = b^2/a$) parcourue à la vitesse angulaire moyenne ω_0 telle que $C = \omega_0 ab$. Les résultats précédents montrent que l'orbite perturbée est une ellipse qui précesse à vitesse angulaire variable. Si l'orbite est peu excentrique, (12) montre que $\omega(t)$ varie peu et s'écarte donc peu de sa valeur moyenne $\langle \omega \rangle$. Puisque, d'après (10), la valeur moyenne de $1/r^2$ est égale à $1/ab$ dans le mouvement non perturbé, la vitesse angulaire moyenne de précession $\langle \omega \rangle$ est peu différente de K/ab , d'où :

$$\frac{\langle \omega \rangle}{\omega_0} = \frac{\beta}{C^2} \quad (15)$$

En utilisant la troisième loi de Kepler $\omega_0^2 a^3 = k$, on retrouve le résultat classique (6) :

$$\frac{\langle \omega \rangle}{\omega_0} = \frac{\beta}{kp}$$

La relation $C = \omega_0 ab$ étant valable aussi pour le mouvement elliptique harmonique, il en est de même du résultat (15) ci-dessus.

9. Déviation vers l'est de la chute des corps

Dans les exemples précédents, nous avons considéré un problème dans un repère galiléen et montré qu'il peut se simplifier si on se place dans un nouveau repère, généralement non galiléen. Dans l'exemple qui suit, la simplification apparaît quand on passe d'un repère non galiléen à un repère galiléen.

Considérons la chute verticale d'un corps. Dans un repère lié à la Terre, le mouvement est compliqué : à la force de pesanteur s'ajoute en effet la force de Coriolis. Seule une résolution approchée de l'équation du mouvement est possible, elle met en évidence une déviation vers l'est de la chute par rapport à la verticale. Ce phénomène apparait comme la conséquence d'un calcul : pour en comprendre l'origine physique ⁽⁷⁾, il est nécessaire de se placer dans un repère galiléen, fixe par rapport aux étoiles (fig.2). Le corps étant lâché sans vitesse initiale par rapport à la Terre, il possède une vitesse angulaire initiale vers l'est dans le repère galiléen, égale à la vitesse angulaire de rotation de la Terre. Au cours de sa chute suivant une ellipse de Kepler, son moment cinétique se conserve (loi des aires) et par suite sa vitesse angulaire augmente : il atterrit donc à l'est de la verticale de son point de départ.

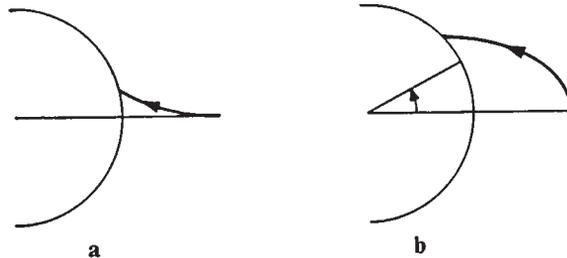


Fig.2 - Chute verticale d'un corps :

(a) vue dans un repère terrestre ; (b) vue d'un repère galiléen.

Appendice : utilisation des nombres complexes

L'introduction des nombres complexes permet de traiter simplement l'oscillateur harmonique chargé placé dans un champ magnétique. Le vecteur position \vec{r} est représenté par la variable complexe z , le vecteur qui s'en déduit par une rotation de $+90^\circ$ dans le plan du mouvement est représenté par iz . L'équation du mouvement s'écrit donc :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2i\omega \frac{dz}{dt} + (\omega_0^2 - \omega^2)z = 0$$

L'équation caractéristique de cette équation linéaire est :

$$\omega^2 - 2i\omega_L\omega - \omega_0^2 = 0$$

Ses racines sont $\omega = \omega_{\pm}$ d'où :

$$z = A e^{i\omega_+ t} + B e^{i\omega_- t}$$

Le mouvement est donc épicyclique : les modules des complexes A et B sont les rayons des cercles générateurs de l'orbite. Par exemple la masse se déplace sur un cercle de rayon A à la vitesse angulaire ω_+ et le centre de ce cercle se déplace sur un cercle de centre O et de rayon B à la vitesse angulaire ω_- . z s'écrit aussi :

$$z = e^{i\omega_L t} \left[A e^{i\sqrt{\omega_0^2 + \omega_L^2} t} + B e^{-i\sqrt{\omega_0^2 + \omega_L^2} t} \right]$$

On voit que le mouvement dans le repère de Larmor est elliptique harmonique et que sa pulsation est égale à $\sqrt{\omega_0^2 + \omega_L^2}$: le mouvement dans le repère galiléen s'en déduit par une précession à la vitesse angulaire ω_L .

La représentation complexe est classiquement utilisée pour étudier le mouvement du pendule de Foucault (8), et montre que ce mouvement est épicyclique, un résultat dont nous avons donné l'interprétation géométrique dans la section 7.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) Un résumé de ce travail a été présenté au congrès de la Société Française de Physique, papier DA4, Caen (septembre 1991).
- (2) J. C. SOLEM, "The strange polarization of the classical atom", Am. J. Phys. **55**, 906-909 (1987) ; A. A. STAHLHOFEN, "The perturbed Kepler problem", Am. J. Phys. **62**, 1145-1147 (1994).
- (3) B. G. LEVICH, Theoretical physics, volume 1, North-Holland, Amsterdam (1970).
- (4) L. LANDAU et E. LIFCHITZ, *Théorie du champ*, éditions Mir, Moscou (1966).
- (5) E. R. HARRISON, "Epicyclic orbits of charged particles", Am. J. Phys. **27**, 314-317 (1959) ; J. SIVARDIERE, "On the motion of a charge in a magnetic field", Eur. J. Phys. **9**, 61-63 (1988).
- (6) H. GOLDSTEIN, *Classical mechanics*, Addison-Wesley, Reading (1955) ; W. H. HEINTZ, "Runge-Lenz vector for nonrelativistic Kepler motion modified by an inverse cube force", Am. J. Phys. **44**, 687-694 (1976) ; J. SIVARDIERE, "Precession of elliptic orbits", Am. J. Phys. **52**, 909-912 (1984) et "Perturbed elliptic motion", Eur. J. Phys. **7**, 283-286 (1986).
- (7) Pour un calcul précis de la déviation vers l'est, voir : E. BELORIZKY et J. SIVARDIERE, "Comments on the horizontal deflection of a falling object", Am. J. Phys. **55**, 1103-1104 (1987).
- (8) A. SOMMERFELD, *Mechanics*, Academic press, New-York (1942) et L. LANDAU et E. LIFCHITZ, *Mécanique*, éditions Mir, Moscou (1960).