

# Frottement solide

par Olivier FIAT  
Lycée Gay-Lussac - 87000 Limoges

## RÉSUMÉ

*Cet article propose une démonstration synthétique des relations classiquement utilisées en mécanique pour la modélisation mathématique des forces de frottement solide. Il propose deux problèmes spécifiques associés.*

## 1. LOI DE LA FORCE DE FROTTEMENT SOLIDE

### 1.1. Énoncé et hypothèses

Léonard de Vinci, le premier, a observé expérimentalement une proportionnalité entre la force de frottement solide  $F$  et la charge  $P$  que l'objet exerce sur le support perpendiculairement à celui-ci :

$$F = \mu P$$

où  $\mu$  est une constante liée à la nature et à l'état de surface des matériaux en contact. Nous appellerons cette relation la loi de Vinci. Souvent, on pose :

$$\mu = \tan \theta$$

avec l'interprétation géométrique évidente :

La démonstration de la loi est due à Hertz (1880). Les hypothèses sont décrites dans les paragraphes suivants.

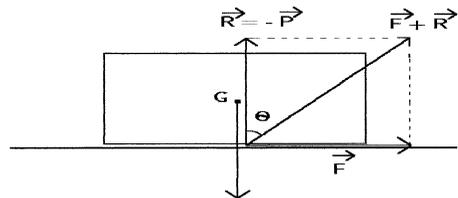


Figure 1

### 1.1.1. Description physique du contact

Le solide est assimilé à un matériau subissant une déformation élastique posé sur la surface plane d'un support indéformable. On notera  $E$  le module d'Young du

matériau. Ce module est très classiquement défini en mécanique des milieux continus. Il a la dimension d'une pression. Une éprouvette cylindrique étant d'autant plus raide qu'elle est courte, et d'autant plus raide qu'elle est large, la raideur est proportionnelle à la section et inversement proportionnelle à la longueur. Le facteur de proportionnalité est le module d'Young, ou module d'élasticité. Il vient donc :

$$k = \mathbf{E} \cdot s \cdot \frac{1}{\ell}$$

Par suite, la force de rappel exercée par une éprouvette allongée de  $\Delta\ell$  a pour norme :

$$F = k\Delta\ell = \mathbf{E} \cdot s \cdot \frac{\Delta\ell}{\ell}$$

où  $\frac{\Delta\ell}{\ell}$  est l'allongement relatif de l'éprouvette.

### 1.1.2. Description géométrique du contact

On note :

- $\delta$  : enfoncement ;
- $R$  : rayon de courbure du matériau dans la zone de contact ;
- $2u$  : diamètre du disque de contact.

On suppose de plus que la zone contrainte est hémisphéroïdale, et a donc une extension verticale de  $u$  :

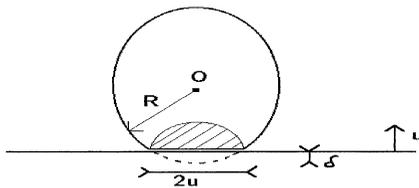


Figure 2

## 1.2. Relations de base

### 1.2.1. Propriétés géométriques

Le disque de contact est vu depuis le centre de courbure  $O$  sous un angle  $\theta$  :

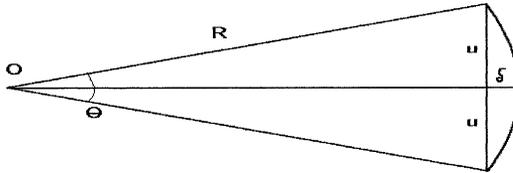


Figure 3

On peut écrire  $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{u}{R}$ . Si on suppose  $\delta$ , donc  $u$ , petit devant  $R$ ,  $\sin \frac{\theta}{2} \approx \frac{\theta}{2}$ , d'où :

$$2u = R\theta$$

D'autre part :

$$\delta = R \left( 1 - \cos \frac{\theta}{2} \right) \approx R \frac{\theta^2}{8} = \frac{R}{2} \cdot \left( \frac{u}{R} \right)^2$$

d'où :

$$u^2 = 2R\delta$$

L'aire de la surface en contact est donc  $\pi u^2 = 2\pi R\delta$ .

### 1.2.2. Expression de l'énergie

A la pose de l'objet, entre l'établissement d'un contact ponctuel et l'équilibre avec disque de contact, le système perd de l'énergie potentielle de pesanteur et gagne de l'énergie potentielle élastique. L'énergie potentielle totale emmagasinée est donc :

$$\hat{F} = E_{p_p} + E_{p_l} = -P\delta + E_{p_l}$$

L'énergie élastique est celle du «ressort» équivalent à la zone contrainte, de section de l'ordre de  $\pi u^2$  et de longueur de l'ordre de  $u$ . En utilisant la définition du module d'Young, on peut écrire :

$$k = \mathbf{E} \cdot \frac{\pi \cdot u^2}{u} = \mathbf{E} \cdot \pi \cdot u$$

La relation classique  $E_{p_l} = \frac{1}{2} k \cdot x^2$  nous donne donc :

$$E_{p_l} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \pi \cdot u \cdot \delta^2 \approx \mathbf{E}\delta^2 u$$

En somme :

$$\hat{F} = -P\delta + \mathbf{E}\delta^2 u$$

### 1.2.3. Loi du contact simple

A l'équilibre, l'objet reposant sur le seul contact considéré, on peut écrire l'égalité fondamentale :

$$\frac{\hat{\partial F}}{\partial \delta} = 0$$

d'où  $-P + 2E\delta u = 0$  soit enfin :  $\mathbf{P} = 2\mathbf{E}\delta\mathbf{u}$

La relation géométrique  $u^2 = 2R\delta$  nous permet d'exprimer  $P$  en fonction des variables  $u$  de largeur de contact ou  $\delta$  de hauteur d'écrasement et d'interpréter le résultat. Tout d'abord, en fonction de  $u$  :

$$P = \frac{\mathbf{E}u^3}{\mathbf{R}}$$

d'où la contrainte normale de déformation :

$$\frac{P}{\pi u^2} = \frac{\mathbf{E} \cdot 2u}{2\pi\mathbf{R}}$$

De l'expression fonction de  $\delta$ , on déduit la formule de Hertz :

$$P = 2\mathbf{E}\delta \sqrt{2\mathbf{R}\delta} = 2\mathbf{E}(2\mathbf{R})^{\frac{1}{2}} \delta^{\frac{3}{2}}$$

d'où l'expression adimensionnée :

$$\frac{\delta}{\mathbf{R}} = \left( \frac{P}{2\sqrt{2}\mathbf{E}\mathbf{R}^2} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Cette dernière permet de réinterpréter la condition portant sur la déformation  $\delta \ll R$  en une condition portant sur la charge :

$$P \ll \mathbf{E}\mathbf{R}^2$$

### 1.2.4. Articulation du raisonnement

Ces expressions valides dans le cas d'un contact unique étant établies, la démonstration de la loi de Vinci s'appuie sur l'hypothèse suivante : *la force de frottement, à nature et état de surface des matériaux donnés, est proportionnelle à l'aire de la surface réellement en contact.*

Cette hypothèse se justifie si l'on considère l'interprétation fine du contact solide/solide à l'échelle atomique.

La proportionnalité de la force de frottement à la charge se ramène donc à celle de la surface de contact à la charge. Cette loi est vérifiée pour le contact unique comme le prouve la relation établie plus haut :  $\frac{P}{\pi u^2} = \frac{E \cdot 2u}{2\pi R}$ .

### 1.2.5. Démonstration de la loi dans le cas général : contacts aléatoires en régime élastique

#### 1.2.5.1. Modèle du contact : description statistique de Greenwood

Pour le confort du calcul, nous renversons la situation précédente du contact : nous considérons la pose d'un solide dur et plan sur un solide bosselé déformable élastiquement. Toute la difficulté du problème est le calcul de l'aire de la surface *réellement en contact*, sachant que chaque bosse ou aspérité (éventuellement microscopique sur une surface polie) a une hauteur et une forme propre et qu'elles ne seront donc pas toutes écrasées et déformées de la même manière.

On numérote, l'un après l'autre, les sommets maxima locaux de la surface du solide inférieur, et on définit la fonction de la variable altitude  $z$ ,  $\Phi$ , densité de probabilité de la fonction de répartition des altitudes des sommets. En d'autres termes,  $\Phi(z)$  est la fraction du nombre de sommets d'altitude supérieure à  $z$  rapporté au nombre total de sommets et  $\varphi(z) = \frac{d\Phi}{dz}(z)$ .

#### 1.2.5.2. Exemple

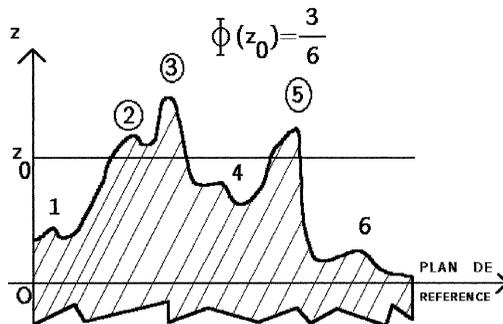


Figure 4

### 1.2.5.3. Relations conséquentes

Il découle des définitions les relations suivantes :

– normalisation :

$$\int_0^{\infty} \varphi(z) dz = 1$$

– si  $N$  désigne le nombre total d'aspérités, le nombre d'aspérités écrasées par un plan à la côte  $d$  est :

$$n(d) = N \int_d^{\infty} \varphi(z) dz$$

– on suppose enfin que le rayon de courbure des aspérités est uniforme (ce qui est admissible pour un matériau à «grain» donné comme un papier de verre assimilé à une feuille recouverte de billes de rayon donné et irrégulièrement enfoncées). Le nombre d'aspérités dont la hauteur du sommet est comprise entre  $z$  et  $z + dz$  est  $N\varphi(z)dz$ , et chacune est écrasée de  $\delta = z - d$  ; d'après la loi géométrique  $\pi u^2 = 2\pi R\delta$ , l'aire de la surface de contact de chacune de ces aspérités est  $2\pi R \cdot (z - d)$ . On en déduit l'aire totale de la surface de contact :

$$A = \int_d^{\infty} N\varphi(z) dz 2\pi R \cdot (z - d)$$

– L'utilisation de la formule de Hertz nous donne l'expression de la charge en fonction de  $d$  :

$$P = \int_d^{\infty} N\varphi(z) dz 2E(2R)^{\frac{1}{2}} (z - d)^{\frac{3}{2}}$$

### 1.2.5.4. Généralisation

Il s'agit donc de démontrer la proportionnalité de  $P$  et  $A$ . Ces deux grandeurs étant définies par des intégrales, nous allons faire une dernière hypothèse de travail, réaliste et qui va nous permettre de les calculer explicitement. Nous choisissons la fonction densité (fonction de l'altitude des aspérités) normée suivante :

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{z}{\sigma}\right)$$

Il vient :

$$A = \int_d^{\infty} \frac{N}{\sigma} \exp\left(-\frac{z}{\sigma}\right) 2\pi R \cdot (z-d) dz$$

soit, après intégration par parties :

$$A = 2\pi N R \sigma \exp\left(-\frac{d}{\sigma}\right)$$

D'autre part :

$$P = \int_d^{\infty} \frac{2NE}{\sigma} \exp\left(-\frac{z}{\sigma}\right) (2R)^{\frac{1}{2}} (z-d)^{\frac{3}{2}} dz$$

$$P = \frac{2NE\sqrt{2R}}{\sigma} \int_d^{\infty} (z-d)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{z}{\sigma}\right) dz$$

soit, en effectuant le changement de variable  $z-d = \zeta\sigma$ ,  $z = \zeta\sigma + d$  et :

$$\begin{aligned} \int_d^{\infty} \dots &= \int_0^{\infty} \sigma \zeta^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\zeta - \frac{d}{\sigma}\right) \sigma d\zeta \\ &= \sigma^{\frac{5}{2}} \exp\left(-\frac{d}{\sigma}\right) \int_0^{\infty} \zeta^{\frac{3}{2}} \exp(-\zeta) d\zeta = \sigma^{\frac{5}{2}} \exp\left(-\frac{d}{\sigma}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

Par suite :

$$P = 2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) NE\sqrt{2R} \sigma^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{d}{\sigma}\right)$$

et enfin :

$$\frac{P}{A} = 2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \sqrt{2} E \left(\frac{\sigma}{R}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Cette expression est bien indépendante de  $P$ ,  $\sigma$  étant un terme statistique d'irrégularité et  $R$  rayon de courbure des aspérités, variables caractérisant l'état de surface du matériau.

En somme :

$$\left. \begin{array}{l} P = k_1 A \\ F = k_2 A \end{array} \right\} \Rightarrow F = \frac{k_2}{k_1} P = \mu P$$

ce qui achève la démonstration. Les valeurs couramment observées pour  $\mu$  sont de l'ordre de 0,5 et vont de 0,05 à 1,5.

## 2. DEUX PROBLÈMES ASSOCIÉS

Nous proposons ici deux problèmes très classiques utilisant la loi de Vinci.

### 2.1. Oscillations avec frottement solide

Le premier problème présente un intérêt mathématique certain pour l'illustration de la notion de recollement des solutions des équations différentielles.

#### 2.1.1. Énoncé

Une masse  $m$  est accrochée à l'extrémité d'un ressort à spires non jointives, de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $L_0$ , relié à une paroi fixe. La masse glisse sur un support horizontal selon un axe  $x$  d'origine la position d'équilibre de la masse, avec un frottement solide assimilé à un vecteur  $\mathbf{f}$ . En posant  $f_0 = \mu \cdot mg$  et en notant  $\mathbf{v}$  le vecteur vitesse :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f} = -f_0 \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \quad \text{si } \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \\ \|\mathbf{f}\| = \min(f_0, \|\mathbf{T}\|), \mathbf{T} = \text{tension du ressort, si } \mathbf{v} = \mathbf{0} \end{array} \right.$$

On abandonne la masse sans vitesse initiale de la position :

$$x_0 = 10,5 \frac{f_0}{k}$$

Déterminer le mouvement du solide.

#### 2.1.2. Résolution

On remarque que la force de frottement présente une discontinuité à chaque fois que la vitesse s'annule, lorsque  $x(t)$  passe par une valeur extrême.

### 2.1.2.1. Zone d'arrêt

Montrons tout d'abord qu'il existe une zone d'arrêt. Lorsque la vitesse s'annule,  $\|f\| = \min(f_0, \|T\|)$ . Par suite, si  $\|T\| \leq f_0$ ,  $f = T$  (en normes) et la force de frottement solide est donc égale en norme et opposée en sens à la tension du ressort. La masse est donc en équilibre, sa vitesse reste constante donc nulle. On peut donc définir une zone d'arrêt :

$$\|T\| \leq f_0 \Leftrightarrow |x| \leq \frac{f_0}{k}$$

Si la vitesse du mobile s'annule à une abscisse comprise entre  $-\frac{f_0}{k}$  et  $\frac{f_0}{k}$ , il s'immobilisera.

### 2.1.2.2. Le mouvement du mobile

Le mouvement du mobile se décompose en phases d'allers et retours, l'état final de la phase  $i$  étant :

$$v = v_{i,f} = 0, \quad x = x_{i,f}$$

La discussion à chaque fin de phase sera donc, d'après le paragraphe précédent :

– si  $|x_{i,f}| > \frac{f_0}{k}$ , le mouvement continue, le début de la nouvelle phase  $i + 1$  coïncidant avec la fin de la phase  $i$ , d'où les conditions initiales :

$$v_{i+1,0} = v_{i,f} = 0, \quad x_{i+1,0} = x_{i,f}$$

– si  $|x_{i,f}| \leq \frac{f_0}{k}$ , le mouvement s'arrête, le mobile s'immobilise en  $x = x_{i,f}$ .

### 2.1.2.3. Études une phase du mouvement

Prenons comme état initial de la phase  $i$  :

$$\begin{cases} x_{i,0} > \frac{f_0}{k} \\ v_{i,0} = 0 \end{cases} \quad \text{par exemple.}$$

Au tout début du mouvement, le ressort est tendu, exerce donc une force de rappel dont la projection sur l'axe est négative. La vitesse est donc elle-aussi de projection négative et la force de frottement solide qui s'oppose à  $v$  est de projection positive. D'où la figure 5 :

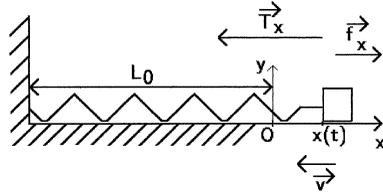


Figure 5

Le théorème de la résultante cinétique s'écrit :

$$\mathbf{T} + \mathbf{f} + \mathbf{P} + \mathbf{R} = \mathbf{T} + \mathbf{f} = m \mathbf{a}$$

soit, par projection sur l'axe des abscisses :

$$-kx + f_0 = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

d'où l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{f_0}{m}$$

La solution générale, somme d'une solution particulière de l'équation avec second membre et de la solution générale de l'équation sans second membre s'écrit :

$$x(t) = \frac{f_0}{k} + A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)$$

$A$  et  $\varphi$  étant deux constantes réelles qu'on détermine grâce aux conditions initiales. L'origine des temps étant ramenée au début de la phase  $i$  considérée, on peut écrire :

$$\begin{cases} x(0) = x_{i,0} \\ \frac{dx}{dt}(0) = v(0) = 0 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} \frac{f_0}{k} + A \cos \varphi = x_{i,0} \\ -A \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \varphi = 0 \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} \varphi = 0 \\ A = x_{i,0} - \frac{f_0}{k} \end{cases}$$

En somme :

$$x_i(t) = \frac{f_0}{k} + \left( x_{i,0} - \frac{f_0}{k} \right) \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right)$$

La fin de cette phase  $i$  aura lieu lorsque  $\frac{dx_i}{dt} = 0$ , donc à la première date  $t > 0$  telle que :

$$\sin \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) = 0$$

c'est-à-dire à la date :

$$t_i = \pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

A cette date,  $\cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t_i \right) = \cos \pi = -1$ . Par suite, l'état de fin de phase  $i$  est :

$$v_{i,f} = 0 \quad \text{et} \quad x_{i,f} = \frac{2f_0}{k} - x_{i,0}$$

#### 2.1.2.4. De même,

si  $x_{i,0} < -\frac{f_0}{k}$ , la projection du théorème de la résultante cinétique s'écrit :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = -\frac{f_0}{m}$$

Cette équation différentielle admet pour solution :

$$x_i(t) = -\frac{f_0}{k} + \left( x_{i,0} + \frac{f_0}{k} \right) \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right)$$

et l'état final est :

$$v_{i,f} = 0 \quad \text{et} \quad x_{i,f} = -\frac{2f_0}{k} - x_{i,0}$$

#### 2.1.2.5. Partant de la condition initiale proposée,

le mouvement est une succession de phases de durée égale :

$$\frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

pendant chacune desquelles le mobile effectue une demi oscillation autour des abscisses alternatives  $\frac{f_0}{k}$  et  $-\frac{f_0}{k}$  avec la suite de positions extrémales :

$$x_{0,0} = 10,5 \frac{f_0}{k} \quad x_{1,0} = -8,5 \frac{f_0}{k}$$

$$x_{2,0} = 6,5 \frac{f_0}{k} \quad x_{3,0} = -4,5 \frac{f_0}{k}$$

$$x_{4,0} = 2,5 \frac{f_0}{k} \quad x_{5,0} = -0,5 \frac{f_0}{k}$$

: arrêt

On donne ci-après une allure de la courbe représentative de  $x(t)$  :

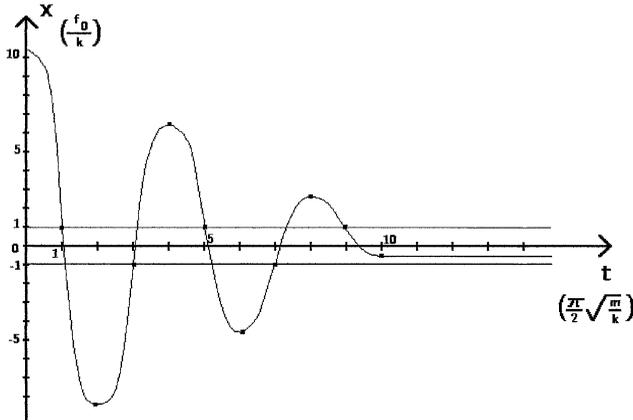


Figure 6

## 2.2. Le cabestan

Le second problème donne l'interprétation de la grande efficacité de l'enroulement d'un câble autour d'un cylindre pour suspendre un objet, arrimer un bateau, ou pour lancer une toupie.

### 2.2.1. Énoncé

Soit un cylindre fixe, d'axe horizontal, de rayon  $r$ , autour duquel est enroulé un câble inextensible de masse et diamètre négligeables. A l'extrémité droite est suspendue une masse  $m$ , puis on effectue dix tours plus un demi-tour dans le sens trigonométrique, et on suspend une masse  $M$  à l'extrémité gauche du câble. On demande quelle est la

masse  $M$  qu'on peut suspendre en fonction de  $m$ ,  $g$  accélération de la pesanteur et  $\mu$  coefficient de frottement solide au contact entre le câble et le cylindre. Pour l'application numérique, on prend  $m = 10^{-3}$  kg,  $g = 10\text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$  et  $\mu = 0,5$ .

**2.2.2. Résolution**

Chaque point du câble en contact avec le cylindre est repéré par l'angle  $\theta$ . La tension du câble est donc fonction de  $\theta$  :  $\mathbf{T}(\theta)$  avec la condition limite :

$$\|\mathbf{T}\| (\theta = 0) = m \cdot g$$

La condition d'équilibre du câble s'écrira alors :

$$\|\mathbf{T}\| (\theta = 10,5 \times 2\pi) = M \cdot g$$

Écrivons l'équilibre d'une portion infinitésimale du câble, celle comprise entre les angles  $\theta$  et  $\theta + d\theta$ . Cet arc est soumis, d'un côté à la tension  $\mathbf{T}(\theta)$ , de l'autre à la tension  $\mathbf{T}(\theta + d\theta)$ , à la réaction normale  $\mathbf{R}$  du cylindre et à la force de frottement solide tangentielle  $\mathbf{F}$ .

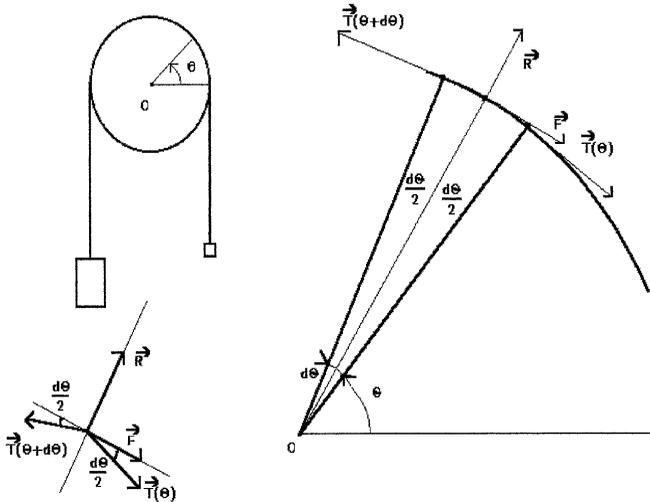


Figure 7

La loi de Vinci s'écrit ici :

$$\|\mathbf{F}\| = \mu \|\mathbf{R}\|$$

L'équilibre de l'arc s'écrit :

$$\mathbf{T}(\theta) + \mathbf{T}(\theta + d\theta) + \mathbf{R} + \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

Posons  $T(\theta) = \|\mathbf{T}(\theta)\|$ ,  $R = \|\mathbf{R}\|$  et  $F = \|\mathbf{F}\|$ . Par projection sur les axes normal et tangentiel, l'équilibre se traduit par le système :

$$\begin{cases} R - T(\theta) \sin \frac{d\theta}{2} - T(\theta + d\theta) \sin \frac{d\theta}{2} = 0 \\ -F - T(\theta) \cos \frac{d\theta}{2} + T(\theta + d\theta) \cos \frac{d\theta}{2} = 0 \end{cases}$$

Posons  $T(\theta + d\theta) = T(\theta) + dT$ . Il vient donc, en négligeant les termes du second ordre le système :

$$\begin{cases} R = Td\theta \\ F = dT \end{cases}$$

d'où, par application de la loi de Vinci, l'équation différentielle en  $T$  :

$$\frac{dT}{T} = \mu d\theta$$

dont la solution s'écrit :

$$\mathbf{T}(\theta) = \mathbf{T}_0 \exp(\mu\theta) = \mathbf{mg} \cdot \exp(\mu\theta)$$

La masse  $M$  cherchée vérifie donc l'équation  $Mg = mg \cdot \exp(\mu \times 10,5 \times 2\pi)$  d'où :

$$M = m \cdot \exp(21\pi\mu)$$

*Application Numérique* :  $M = 0,001 \cdot \exp(10,5 \cdot \pi) = 212 \cdot 10^9$  kg !... ce qui est assez spectaculaire.