

## Modélisation électrique et acoustique du haut-parleur : impédance électrique et bande passante acoustique

par Jean-Marie DONNINI et Lucien QUARANTA  
Laboratoire Agrégation-C.A.P.E.S. de Physique - Case 68  
3, place Victor Hugo - 13331 Marseille Cedex 3

---

Le haut-parleur est un système électroacoustique complexe. Généralement on réduit le modèle mécanique à un simple vibreur linéaire constitué par un ressort de raideur  $K$  (qui modélise l'effet élastique de la membrane), une masse  $m$  (qui représente la masse de l'équipage mobile) et un terme dissipatif caractérisé par un coefficient de frottement visqueux  $f$ . L'étude du système conduit alors à introduire une impédance électrique, dite impédance *motionnelle*  $Z_m$  (qui dépend de  $m$ ,  $K$ ,  $f$  et de la pulsation  $\omega$ ) qui s'ajoute à celle de la bobine ; la loi d'Ohm en régime sinusoïdal, qui relie l'amplitude complexe de la différence de potentiel appliquée aux bornes du haut-parleur à celle de l'intensité s'écrit :

$$u = (R + jL\omega + Z_m) i \quad (1)$$

où  $R$  est la résistance électrique de la bobine du haut-parleur et  $L$  son inductance propre.

Nous essayons ici de compléter l'étude habituelle en examinant de plus près la force créée par la masse d'air mise en vibration par la membrane et la puissance acoustique rayonnée.

Cette approche acoustique ne bouleverse pas la relation (1) ; en effet, cela se comprend si on sait que la puissance acoustique transmise n'est qu'une très faible partie de la puissance totale consommée par le haut-parleur. Nous pourrions néanmoins rendre compte de l'aspect de la bande passante acoustique du haut-parleur et du rôle des dimensions de la membrane relativement aux fréquences transmises.

Bien que sommairement modélisé, nous espérons attirer l'attention sur la fonction première du haut-parleur (l'émission d'un son), alors que le plus souvent on ne porte attention qu'à l'impédance électrique.

## 1. EXPRESSION DE L'IMPÉDANCE D'ENTRÉE DU HAUT-PARLEUR

### 1.1. Expression de l'impédance électrique du haut-parleur

Nous reprenons le calcul classique de l'étude du système électro-mécanique, nous verrons plus tard les éventuelles modifications apportées par la prise en compte du rayonnement acoustique. Le modèle mécanique de l'équipage mobile permet d'écrire l'équation mécanique, avec les conventions indiquées sur la figure 1 :

$$m\ddot{x} = -Kx - f v - Bl i \quad (2)$$

où  $B$  est le champ magnétique,  $l$  est la longueur totale du fil constituant la bobine mobile et  $i$  est l'intensité qui parcourt le fil.

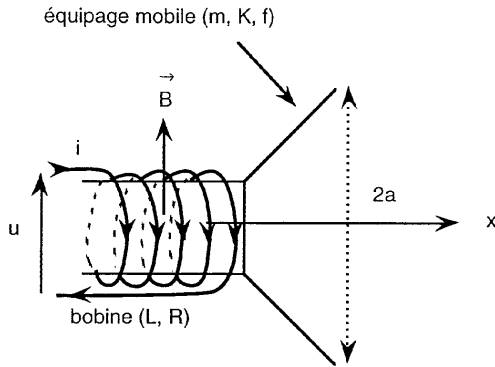


Figure 1 : Schéma modélisé du haut-parleur.

L'équation électrique donne :

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} - Bl v \quad (3)$$

où le dernier terme représente la f.é.m. d'induction ;  $u$  est la tension d'entrée et  $v$  la vitesse de l'équipage mobile.

En régime sinusoïdal forcé, on peut remplacer les valeurs instantanées des fonctions du temps par leurs amplitudes complexes et les équations (2) et (3) deviennent, en notant que  $v = j \omega x$  si  $\omega$  est la pulsation des vibrations :

$$\left( f + j m \omega + \frac{K}{j \omega} \right) v = - Bl i \quad (4)$$

et 
$$u = (Ri + j L \omega) i - Bl v \quad (5)$$

On peut en tirer l'impédance d'entrée  $Z$  du haut-parleur :

$$Z = \frac{u}{i} = R + jL\omega + \frac{1}{\frac{f}{(Bl)^2} + j\omega \frac{m}{(Bl)^2} + \frac{1}{j\omega} \frac{K}{(Bl)^2}}$$

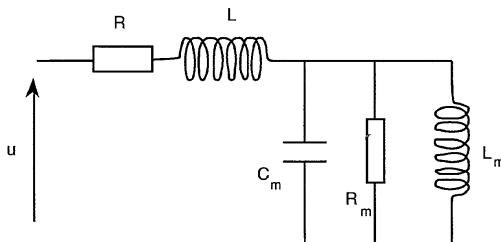
Le premier terme est l'impédance purement électrique de la bobine, le deuxième terme provient du mouvement de la membrane : c'est l'impédance motionnelle  $Z_m$  :

$$Z_m = \frac{1}{\frac{f}{(Bl)^2} + j\omega \frac{m}{(Bl)^2} + \frac{1}{j\omega} \frac{K}{(Bl)^2}}$$

En examinant la forme de  $Z_m$  on constate que cette impédance correspond à l'association en parallèle des éléments suivants :

- la résistance  $R_m = \frac{(Bl)^2}{f}$ ,
- l'inductance  $L_m = \frac{(Bl)^2}{k}$ ,
- la capacité  $C_m = \frac{m}{(Bl)^2}$ .

Ce qui conduit au schéma équivalent électrique de la figure 2 qui correspond à un circuit bouchon en série avec l'impédance  $(R + jL\omega)$  de la bobine (aux basses fréquences, il est possible de négliger le terme  $L\omega$ ).



**Figure 2 :** Schéma électrique équivalent.

### 1.2. Étude de l'impédance électrique

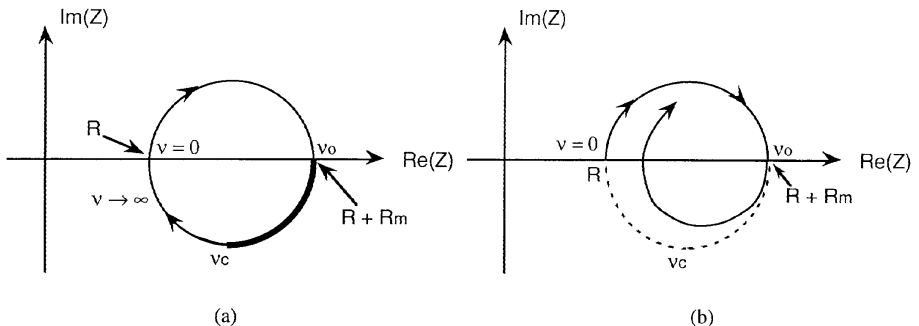
Dans un diagramme d'Argand on porte, pour chaque fréquence, les points représentatifs de l'impédance. Ces points sont disposés sur un cercle : le cercle Kennely (figure 3a).

*NB* : Il est évident que les points représentatifs de l'admittance motionnelle :

$$Y_m = \frac{f}{(Bl)^2} + j\omega \left( \frac{m}{(Bl)^2} - \frac{K}{(Bl)^2} \right)$$

sont disposés sur la droite parallèle à l'axe des imaginaires. Or la transformation géométrique qui fait passer d'un point représentatif de l'admittance au point représentatif de l'impédance est une inversion de pôle d'origine O (puisque  $|Z| = \frac{1}{|Y|}$ ), suivie d'une symétrie par rapport à l'axe des réels (puisque  $\arg(Z) = -\arg(Y)$ ). L'inversion transforme la droite en un cercle passant par O, les points représentatifs de l'impédance motionnelle sont donc bien situés sur un cercle, centré sur l'axe des réels et de diamètre  $2R_m$ . Pour obtenir l'impédance électrique Z, lorsqu'on néglige l'inductance de la bobine, il suffit d'ajouter la résistance R, ce qui produit une translation de valeur R.

On comprend que vers les hautes fréquences, les approximations faites ne seront plus vérifiées, (la résistance électrique apparente varie, le terme  $jL\omega$  intervient, des effets capacitifs se manifestent...) ; les points représentatifs de l'impédance ne se trouvent plus sur le cercle de Kennely (figure 3b).



**Figure 3 :** Représentation de l'impédance dans le plan complexe. Le cercle de Kennely théorique (a), et les mesures expérimentales (b). Sur la figure 3a, nous avons délimité en gras la partie du cercle utilisée lorsque le haut-parleur fonctionne dans sa bande passante (cf. § 3).

Sur la figure 4, nous portons  $|Z|$  en fonction de la fréquence  $\nu$  : on retrouve la courbe théorique correspondant au comportement en basse fréquence (figure 4a), et la courbe expérimentale (figure 4b) qui traduit les écarts déjà signalés sur le cercle de Kennely. On note en particulier sur cette dernière courbe, que l'impédance passe par un minimum  $Z_0$  : valeur généralement indiquée par les constructeurs (4  $\Omega$ , 8  $\Omega$ , etc.).

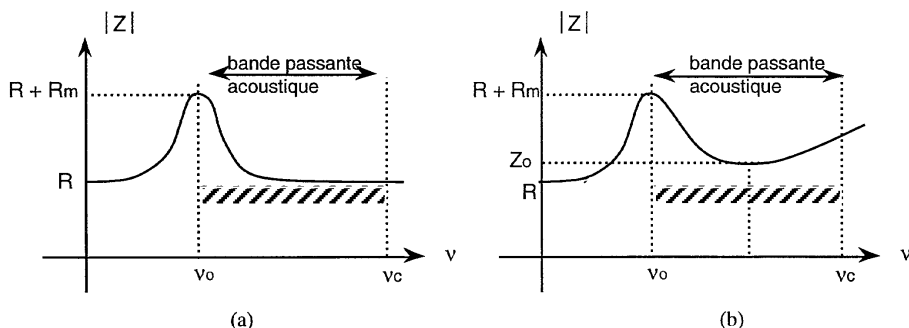


Figure 4 : Dépendance de l'impédance électrique avec la fréquence.

On remarque également que l'impédance électrique passe par un maximum pour la fréquence de résonance  $\nu_0$  de l'équipage mécanique :

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}.$$

## 2. QUELQUES RAPPELS CONCERNANT L'IMPÉDANCE DE RAYONNEMENT D'UN PISTON

Nous modélisons le mouvement de la membrane comme étant un piston circulaire, de rayon  $a$ , vibrant sur un écran infini et rigide (le lecteur pourra se reporter aux références [1] et [2]) ; à la fréquence  $\nu$  la longueur d'ondes vibrations sonores, s'écrit  $\lambda = \frac{c}{\nu}$ ,  $c$  étant la célérité

de l'onde ; nous noterons le vecteur d'onde  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$ .

La pression acoustique  $p$ , appliquée des deux côtés de la membrane produit sur celle-ci une force  $-2 F_r$  due au rayonnement de l'onde (le coefficient 2 provient du fait que la force  $F_r$  correspond au rayonnement d'une seule face). En régime sinusoïdal, on définit une impédance

mécanique au rayonnement  $Z_{ma} = \frac{F_r}{v}$  où  $v$  est la vitesse du piston. C'est cette force, dont nous indiquons plus bas la valeur et que nous comparerons aux forces purement mécaniques et modélisées par les coefficients de raideur  $K$  et de frottement  $f$ .

L'impédance de rayonnement  $Z_{ma}$  s'exprime par [1] :

$$Z_{ma} = \frac{F_r}{v} = \rho c S (r_r + j x_r)$$

où :

- $S$  est la surface du piston,
- $r_r$  et  $x_r$  sont des nombres purs : la résistance et la réactance réduite de rayonnement. Le calcul précise :

$$r_r = 1 - \frac{J_1(2ka)}{ka} \quad \text{et} \quad x_r = \frac{S_1(2ka)}{ka}$$

où  $J_1$  et  $S_1$  sont respectivement les fonctions de Bessel et de Struve d'ordre 1. Les graphes donnant les variations de ces coefficients en fonction du produit  $ka$ , et donc de la fréquence, sont reproduits (d'après [2]) figure 5 :

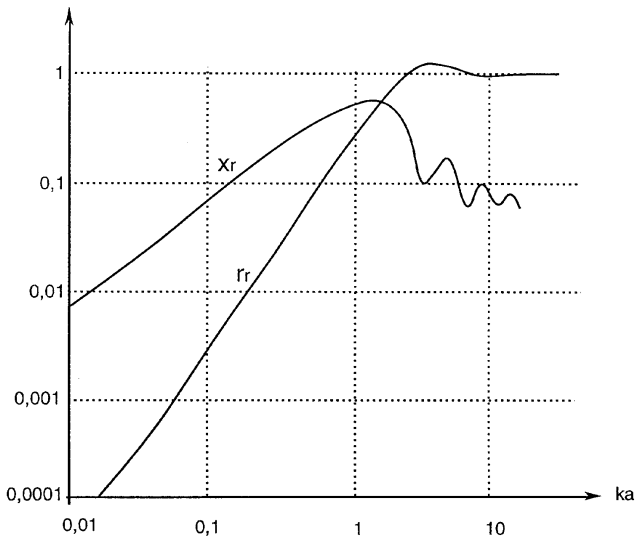


Figure 5 : Échelle logarithmique.

Si la fréquence est assez basse (soit  $ka < 1$ ) on pourra faire les approximations :

$$r_r \cong \frac{1}{2} (ka)^2 \quad \text{et} \quad x_r \cong \frac{8ka}{3\pi}$$

En résumé, le rayonnement ainsi modélisé, explique que la membrane subit, du fait du rayonnement, la force :

$$F_r' = -2F_r = -2 \rho c v S (r_r + j x_r)$$

En fait, la puissance acoustique émise par le haut-parleur et qui a son origine dans la force  $+F_r$  que subit la masse d'air entraînée par la membrane, est très faible devant la puissance électrique totale consommée par le haut-parleur. Le rendement est compris entre quelques millièmes et quelques centièmes. C'est donc que cette force n'ajoute que des termes correctifs négligeables à l'équation mécanique (4). Ces termes sont d'ailleurs proportionnels à  $r_r$  et  $x_r$ , tous deux inférieurs à l'unité.

En conclusion, les forces dues au rayonnement acoustique jouent un rôle mineur, aussi bien dans la valeur de l'impédance électrique du haut-parleur que dans son mouvement. En première approximation nous pouvons conserver les résultats indiqués au paragraphe 1.

Par contre, nous porterons notre attention sur la valeur de la force  $F_r$  qui s'exerce sur une face de la membrane : c'est cette force qui va nous permettre de calculer la puissance acoustique rayonnée par une face.

### 3. BANDE PASSANTE ACOUSTIQUE, DIRECTIVITÉ

#### 3.1. Expression de la puissance acoustique et de la vitesse

La puissance acoustique s'exprime par :

$$P_{ac} = R_{acoustique} v^2 = \rho c S r_r v^2$$

(il suffit de penser aux analogies électromécaniques et de se souvenir que la puissance électrique dissipée dans une résistance vaut  $Ri^2$ ).

D'autre part, à l'aide des relations, (4) et (5), on peut exprimer la vitesse :

$$v = \frac{Bl\dot{i}}{jm\omega + f + \frac{K}{j\omega}}$$

L'intensité  $i$  vaut  $i = \frac{u}{Z}$  soit en négligeant  $L\omega$  devant  $R$  et  $|Z_m|$  :

$$i = \frac{u}{R + \frac{(Bl)^2}{f + jm\omega + \frac{K}{j\omega}}}$$

ce qui donne :

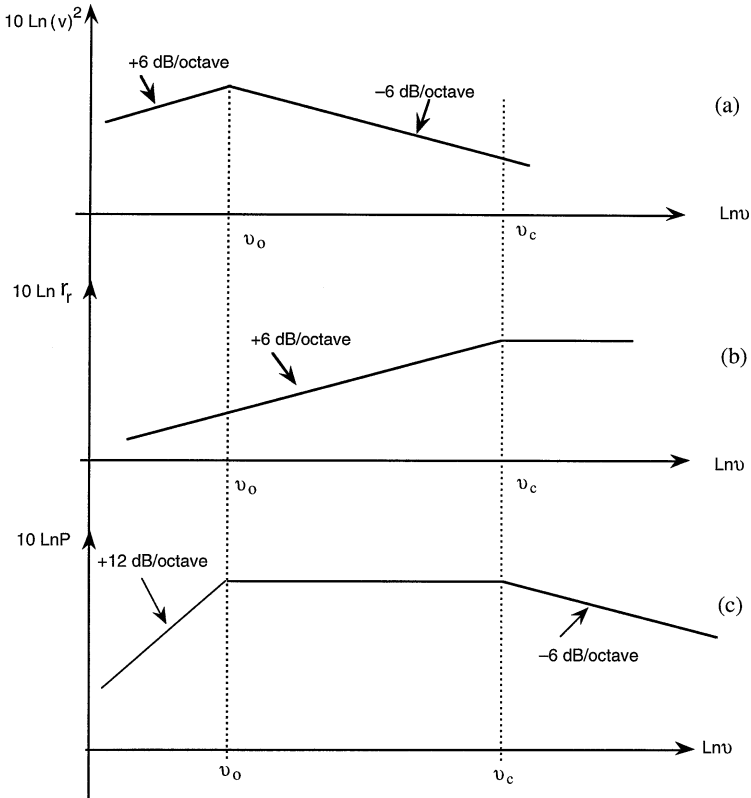
$$v = \frac{Bl}{f + jm\omega + \frac{K}{j\omega}} \times \frac{u}{R + \frac{(Bl)^2}{f + jm\omega + \frac{K}{j\omega}}} = \frac{Bl u}{(Bl)^2 + R \left( f + jm\omega + \frac{K}{j\omega} \right)}$$

### 3.2. Détermination de la bande passante : diagramme de Bode de la puissance acoustique

On peut tracer l'allure du diagramme de Bode correspondant à  $v^2$  en supposant qu'on alimente le haut-parleur avec une tension d'amplitude constante  $u$ . Cette vitesse évolue en fonction de la fréquence comme celle d'un oscillateur linéaire. Elle passe par un maximum pour la fréquence de résonance  $\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}$  (ce qui est la fréquence d'antirésonance de l'impédance électrique). Pour les fréquences inférieures à la fréquence de résonance  $\nu_0$ ,  $v^2$  varie proportionnellement à  $\omega^2$  et pour les fréquences supérieures,  $v^2$  varie comme  $\frac{1}{\omega^2}$ .

Cela donne deux asymptotes dont les pentes, en valeur absolue, sont de 6 dB/octave (voir figure 6a). Rappelons, que pour un haut-parleur courant, la fréquence de résonance mécanique  $\nu_0$  est de l'ordre de quelques dizaines de Hz.





**Figure 6 :** Détermination de la bande passante du haut-parleur.

La résistance acoustique  $R_{ac}$  varie proportionnellement à  $r_r$ . Tant que  $ka < 1$  c'est-à-dire  $\nu < \nu_c = \frac{c}{2\pi a}$ , on a vu que  $r_r = \frac{1}{2}(ka)^2$ , c'est-à-dire que  $R_{ac}$  varie proportionnellement à  $\omega^2$  (car  $k = \omega/c$ ). On peut tracer le diagramme de Bode de  $R_{ac}$  :  $R_{ac}$  étant proportionnel à  $\nu^2$  on obtient une asymptote ayant une pente de  $+6 \text{ dB/octave}$ . Pour  $\nu > \nu_c$ ,  $r_r$  reste voisin de 1 et donc  $R_{ac} \cong \rho c S$  c'est-à-dire une asymptote de pente nulle (figure 6b).

**Remarque :** La fréquence  $\nu_c$  introduite ici est supérieure à  $\nu_0$  comme le montre l'exemple numérique suivant : dans le cas d'une membrane

dont le rayon vaut  $a = 7,5$  cm, la célérité du son étant 340 m/s, on trouve  $\nu_c = 700$  Hz (alors que la fréquence  $\nu_o$  est au moins dix fois plus faible).

Le diagramme de Bode de la puissance acoustique  $P_a$  (figure 6c), s'obtient en faisant la *somme* des gains de dB pour  $\nu^2$  et pour  $R_{ac}$  puisque  $P_a$  est égale au produit  $R_{ac} \nu^2$ .

Pour les fréquences inférieures à  $\nu_o$  (qui est la fréquence de résonance de l'équipage mobile et dont la valeur est celle de la dizaine de Hz), on note une atténuation de 12 dB/octave.

Pour  $\nu > \nu_c$ , on note une atténuation de 6 dB/octave.

La fréquence  $\nu_c$  apparaît comme la fréquence de coupure haute du haut-parleur, tandis que  $\nu_o$  est la fréquence de coupure basse.

En conclusion, on peut dire que la bande passante du haut-parleur est déterminée d'une part par la fréquence de résonance  $\nu_o$  de l'équipage mobile et d'autre part par la fréquence de coupure  $\nu_c = 2\pi \frac{c}{a}$  qui, elle, dépend des dimensions de la membrane.

Remarquons que la fréquence  $\nu_c$  augmente lorsqu'on diminue le rayon de la membrane ; cela explique les dimensions des «tweeters» destinés à transmettre les *aigus* aussi bien que celle des «boomers» pour les *basses*.

### 3.3. Directivité du haut-parleur

La condition  $ka < 1$  (la fréquence considérée est alors dans la bande passante) équivaut à  $\frac{\lambda}{a} > 2\pi$ . On reconnaît dans la quantité  $\frac{\lambda}{a}$ , l'ordre de grandeur de l'étendue angulaire de diffraction des ondes (voir [3]). La condition précédente indique donc que le haut-parleur diffracte très largement et se comporte alors comme une source ponctuelle. Le haut-parleur fournit donc un rayonnement omnidirectionnel, indépendamment de la fréquence [1] pourvu que l'on reste dans la bande passante.

#### 4. CONCLUSION

Ainsi que nous l'avons montré, le modèle de simple vibreur linéaire, permet de rendre compte à la fois du mouvement de l'équipage mobile et de l'impédance électrique du haut-parleur ; en revanche il est indispensable de considérer les propriétés générales du rayonnement acoustique pour délimiter la bande passante vers les hautes fréquences. Nous retiendrons également que la fréquence de résonance mécanique fixe la borne inférieure de la bande passante acoustique alors que la taille de la membranes en définit la borne supérieure.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] Y. ROCARD : «*Dynamique des vibrations*», Éditions Masson (1971).
- [2] M. ROSSI : «*Électroacoustique*», Éditions Dunod (1986).
- [3] G. BRUHAT : «*Optique*», Éditions Masson (1992) ou,  
J.-Ph. PÉREZ : «*Optique*», Éditions Masson (1991).