EXPRESSION DES MOMENTS ET DE LA PUISSANCE DES FORCES D'INERTIE D'ENTRAINEMENT ET DE CORIOLIS

Luc DETTWILLER,
Lycée Blaise Pascal,
36, avenue Carnot,
63037 CLERMONT-FERRAND cedex

RESUME : On démontre une expression générale du moment des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis dans un référentiel non galiléen quelconque, ainsi que de la puissance des forces d'inertie d'entraînement ; on les applique au cas particulier d'un système solide, et on regarde en conclusion les simplifications apportées par une symétrie de révolution du système. Les référentiels non galiléens et les forces d'inertie figurent au programme de la classe de Mathématiques Supérieures, les systèmes solides à celui de la classe de Mathématiques Spéciales.

Introduction

Quand on veut appliquer à un système matériel les théorèmes fondamentaux de la dynamique dans un référentiel non galiléen (R'), on a besoin de la résultante et du moment des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

En ce qui concerne ces résultantes, on dispose d'expressions simples bien connues : les résultantes des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis s'écrivent respectivement $\mathbf{F}^{\mathrm{ie}} = -m\,\mathbf{a}_{\mathrm{e}}(G)$ et $\mathbf{F}^{\mathrm{ic}} = -m\,\mathbf{a}_{\mathrm{c}}(G)$, où $\mathbf{a}_{\mathrm{e}}(G)$ et $\mathbf{a}_{\mathrm{c}}(G)$ désignent les accélérations d'entraînement et de Coriolis, dans (R'), du centre d'inertie G du système, de masse totale m.

En ce qui concerne les moments de ces forces d'inertie, on est en général plus démuni. On sait bien que le cas particulier d'un référentiel (R') en translation par rapport à un référentiel galiléen (R) conduit à des simplifications notables : comme le vecteur instantané de rotation $\mathbf{\Omega}_{(R')/(R)}$ du référentiel (R') par rapport à (R) est identiquement nul, il n'y a plus de force d'inertie de Coriolis, et le champ des accélérations d'entraînement $\mathbf{a}_{\mathrm{e}}$ est uniforme, donc le moment des forces d'inertie d'entraînement par rapport à un point A quelconque s'écrit $\boldsymbol{\mathcal{M}}_A^{\mathrm{ie}} = \mathbf{AG} \times -m\mathbf{a}_{\mathrm{e}} = \mathbf{AG} \times \mathbf{F}^{\mathrm{ie}}$. Mais en dehors de ce cas particulier, ces expressions simples ne sont plus valables a priori, et on se ramène souvent au calcul direct issu de la définition. Celle du moment par rapport au point A des forces d'inertie d'entraînement s'écrit $\boldsymbol{\mathcal{M}}_A^{ie} = \sum_i \mathbf{AM_i} \times -m_i\, \mathbf{a_e}(M_i)$ pour un système de points M_i de masses m_i (mais pour les systèmes continus il suffirait de remplacer la somme discrète par une intégrale) ; elle implique l'accélération d'entraînement d'un point M quelconque, qui est donnée par la formule

$$\mathbf{a_e}(M) = \mathbf{a}_{(R)}(O') + \frac{d\mathbf{\Omega}_{(R')/(R)}}{dt} \times \mathbf{O'M} + \mathbf{\Omega}_{(R')/(R)} \times \left(\mathbf{\Omega}_{(R')/(R)} \times \mathbf{O'M}\right)$$

$$= \mathbf{a}_{(R)}(O') + \frac{d\mathbf{\Omega}_{(R')/(R)}}{dt} \times \mathbf{O'M} - \Omega^2_{(R')/(R)}\, \mathbf{H'M}$$

où les dérivées par rapport au temps t de $\mathbf{\Omega}_{(R')/(R)}$ sont les mêmes dans (R) et (R') - ainsi les note-t-on $\frac{d\mathbf{\Omega}_{(R')/(R)}}{dt}$ sans précision supplémentaire - , où O' est un point quelconque fixe dans le référentiel (R'), H' le projeté orthogonal du point M sur la droite $\Delta' = \left(O', \mathbf{\Omega}_{(R')/(R)}\right)$, et $\mathbf{a}_{(R)}(O')$ l'accélération de O' dans (R). La définition du moment des forces d'inertie de Coriolis s'écrit $\boldsymbol{\mathcal{M}}_A^{ic} = \sum_i \mathbf{AM_i} \times -m_i\, \mathbf{a_c}(M_i)$, impliquant l'accélération de Coriolis d'un point M qui est donnée par la formule $\mathbf{a_c}(M) = 2\,\mathbf{\Omega}_{(R')/(R)} \times \mathbf{v}_{(R')}(M)$ où $\mathbf{v}_{(R')}(M)$ est la vitesse de M dans (R') - dite " vitesse relative ". Ces relations sont assez facilement applicables au cas d'une tige rectiligne homogène par exemple, mais dans le cas général la complexité de ces expressions dissuade généralement de les utiliser... Alors quand on veut étudier en exercice le mouvement sans glissement d'une bille sphérique homogène sur un plateau tournant, on pourrait se sentir acculé à des approximations qui permettraient par exemple de considérer que le champ des accélérations d'entraînement est quasi uniforme sur la bille.

Pourtant, nous allons montrer qu'il suffit de connaître $\mathbf{a_e}(G)$, $\mathbf{\Omega}_{(R')/(R)}$, m et l'opérateur central d'inertie du système, pour déterminer $\boldsymbol{\mathcal{M}}_G^{ie}$. Pour déterminer $\boldsymbol{\mathcal{M}}_G^{ic}$, il suffit de connaître $\mathbf{a_e}(G)$, $\mathbf{\Omega}_{(R')/(R)}$, m et l'opérateur central d'inertie du système, et enfin le moment cinétique $\sigma_G^{(R')}$ du système par rapport à G dans (R'); dans le cas où le système est un solide (S), $\sigma_G^{(R')}$ s'exprime en fonction du vecteur instantané de rotation $\mathbf{\Omega}_{(S)/(R')}$ de (S) par rapport à (R'), et l'expression de $\boldsymbol{\mathcal{M}}_A^{ic}$ devient simple à condition de définir un autre opérateur. A cause de l'intervention de l'opérateur d'inertie, il ne pourrait être fait un usage systématique de ces expressions dans le cours ou les problèmes des classes de Mathématiques Supérieures et Spéciales ; mais on verra que la façon dont ces expressions se simplifient pour un opérateur sphérique est tout à fait remarquable, et permet de formuler de manière simple et rigoureuse le mouvement sans glissement de la bille sur un plateau qui tourne à vitesse angulaire uniforme, dans le référentiel du plateau - ce qui constitue un problème pouvant être posé en Mathématiques Spéciales [1].

Dans cet article, nous montrerons d'abord comment s'expriment séparément les moments des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis pour un système quelconque. Ensuite, nous exprimerons la puissance de ces forces. Enfin, nous examinerons la forme prise par ces formules lorsque le système est solide, et en conclusion leur simplification lorsque l'axe $\Delta_G = \left(G, \mathbf{\Omega}_{(R')/(R)}\right)$ est axe de symétrie de révolution pour la distribution des masses du système.

1. Expression du moment des forces d'inertie

1.1. Forces d'inertie d'entraînement

Pour calculer le moment des forces d'inertie d'entraînement par rapport à un point A quelconque, il est commode de se ramener au calcul du moment par rapport à G grâce à la relation fondamentale

$$\mathcal{M}_A^{ie} = \mathcal{M}_G^{ie} + \mathbf{AG} \times \mathbf{F}^{ie} = \mathcal{M}_G^{ie} + \mathbf{AG} \times -m\mathbf{a}_e(G) \qquad (1).$$

La définition de $\mathcal{M}_G^{ie}$ donne

$$\mathcal{M}_G^{ie} = \sum_i \mathbf{GM_i} \times -m_i \mathbf{a_e}(M_i)$$

$$= \sum_i \mathbf{GM_i} \times -m_i \left[\mathbf{a}_{(R)}(O') + \frac{d\Omega_{(R'/R)}}{dt} \times \mathbf{O'M_i} + \Omega_{(R'/R)} \times \left(\Omega_{(R'/R)} \times \mathbf{O'M_i} \right) \right]$$

(2) ;

mais comme $\mathbf{a}_{(R)}(O')$ est indépendant de M_i, et que $\sum_i m_i \mathbf{GM_i} = \mathbf{0}$ (3), il ne reste plus que

$$\mathcal{M}_G^{ie} = \sum_i \mathbf{GM_i} \times -m_i \left[\frac{d\Omega_{(R'/R)}}{dt} \times \mathbf{O'M_i} + \Omega_{(R'/R)} \times \left(\Omega_{(R'/R)} \times \mathbf{O'M_i} \right) \right] \qquad (4).$$

Cette expression est donc indépendante du déplacement du point O', qui est par définition un point quelconque mais fixe dans (R') ; on peut ainsi le remplacer par le point G à la date t pour laquelle on calcule $\mathcal{M}_G^{ie}$. On est donc amené au calcul des deux termes suivants.

$$\sum_i \mathbf{GM_i} \times -m_i \left[\frac{d\Omega_{(R'/R)}}{dt} \times \mathbf{GM_i} \right] = -\left(\mathcal{J}_G \right) \frac{d\Omega_{(R'/R)}}{dt} \qquad (5)$$

par simple comparaison avec l'expression du moment cinétique d'un solide, fixe dans (R'), et dont le centre d'inertie G est fixe dans (R), faisant donc intervenir l'opérateur d'inertie $(\mathcal{J}_G)$ par rapport à G - appelé opérateur central d'inertie.

Pour calculer le second terme, il est utile d'introduire le repère orthonormé direct $GXYZ$ des axes centraux d'inertie, dans lequel on donne les coordonnées $\begin{vmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{vmatrix}$ de M_i et les composantes $\begin{pmatrix} \Omega_X \\ \Omega_Y \\ \Omega_Z \end{pmatrix}$ de $\Omega_{(R'/R)}$; dans la base associée à ce repère orthonormé direct, l'opérateur d'inertie s'écrit

$$(\mathcal{J}_G)=\begin{pmatrix}\sum_i m_i(Y_i^2+Z_i^2) & 0 & 0\\ 0 & \sum_i m_i(Z_i^2+X_i^2) & 0\\ 0 & 0 & \sum_i m_i(X_i^2+Y_i^2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_{GX} & 0 & 0\\ 0 & I_{GY} & 0\\ 0 & 0 & I_{GZ}\end{pmatrix} \qquad (6)$$

il vient alors

$$\sum_i \mathbf{GM_i}\times -m_i\left[\Omega_{(R')/(R)}\times\left(\Omega_{(R')/(R)}\times\mathbf{GM_i}\right)\right]=\sum_i \mathbf{GM_i}\times -m_i\left[\left(\Omega_{(R')/(R)}\cdot\mathbf{GM_i}\right)\Omega_{(R')/(R)}-\left(\Omega^2_{(R')/(R)}\right)\mathbf{GM_i}\right]$$

$$=\sum_i -m_i\left(\Omega_{(R')/(R)}\cdot\mathbf{GM_i}\right)\mathbf{GM_i}\times\Omega_{(R')/(R)}$$

$$=\sum_i -m_i\left(\Omega_X X_i+\Omega_Y Y_i+\Omega_Z Z_i\right)\begin{pmatrix}X_i\\ Y_i\\ Z_i\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\Omega_X\\ \Omega_Y\\ \Omega_Z\end{pmatrix}$$

$$=\sum_i -m_i\left(\Omega_X X_i+\Omega_Y Y_i+\Omega_Z Z_i\right)\begin{pmatrix}Y_i\Omega_Z-Z_i\Omega_Y\\ Z_i\Omega_X-X_i\Omega_Z\\ X_i\Omega_Y-Y_i\Omega_X\end{pmatrix}$$

$$=\sum_i -m_i\begin{pmatrix}\Omega_Y\Omega_Z\left(Y_i^2-Z_i^2\right)\\ \Omega_Z\Omega_X\left(Z_i^2-X_i^2\right)\\ \Omega_X\Omega_Y\left(X_i^2-Y_i^2\right)\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\Omega_Y\Omega_Z\left(I_{GZ}-I_{GY}\right)\\ \Omega_Z\Omega_X\left(I_{GX}-I_{GZ}\right)\\ \Omega_X\Omega_Y\left(I_{GY}-I_{GX}\right)\end{pmatrix}$$

(7)

En introduisant la matrice

$$(\mathcal{K}_G)=\begin{pmatrix}\sum_i m_i X_i^2 & 0 & 0\\ 0 & \sum_i m_i Y_i^2 & 0\\ 0 & 0 & \sum_i m_i Z_i^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_X & 0 & 0\\ 0 & I_Y & 0\\ 0 & 0 & I_Z\end{pmatrix} \qquad (8),$$

ce second terme s'écrit

$$-\begin{pmatrix}\Omega_Y\Omega_Z\left(I_Y-I_Z\right)\\ \Omega_Z\Omega_X\left(I_Z-I_X\right)\\ \Omega_X\Omega_Y\left(I_X-I_Y\right)\end{pmatrix}=\Omega_{(R')/(R)}\times(\mathcal{K}_G)\Omega_{(R')/(R)}=-\Omega_{(R')/(R)}\times(\mathcal{J}_G)\Omega_{(R')/(R)} \qquad (9)$$

Finalement, le moment des forces d'inertie d'entraînement par rapport à G s'écrit

$$\boxed{\mathcal{M}_G^{ie}=-(\mathcal{J}_G)\frac{d\Omega_{(R')/(R)}}{dt}+\Omega_{(R')/(R)}\times(\mathcal{K}_G)\Omega_{(R')/(R)}=-(\mathcal{J}_G)\frac{d\Omega_{(R')/(R)}}{dt}-\Omega_{(R')/(R)}\times(\mathcal{J}_G)\Omega_{(R')/(R)}}$$

(10).

1.2. Forces d'inertie de Coriolis

Pour calculer le moment des forces d'inertie de Coriolis par rapport à un point A quelconque, il est commode de se ramener au calcul du moment par rapport à G grâce à la relation fondamentale

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}_A^{ic} = \boldsymbol{\mathcal{M}}_G^{ic} + \mathbf{AG} \times \mathbf{F}^{ic} = \boldsymbol{\mathcal{M}}_G^{ic} + \mathbf{AG} \times -m\mathbf{a}_c(G) \qquad (11).$$

La définition de $\boldsymbol{\mathcal{M}}_G^{ic}$ donne

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{M}}_G^{ic} &= \sum_i \mathbf{GM_i} \times -m_i \mathbf{a_c}(M_i) \\ &= \sum_i \mathbf{GM_i} \times -m_i \left[2\,\boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)} \times \mathbf{v}_{(R')}(M_i)\right]\end{aligned} \qquad (12);$$

On peut le mettre sous la forme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{M}}_G^{ic} &= -\sum_i m_i \left[2\left(\mathbf{GM_i} \cdot \mathbf{v}_{(R')}(M_i)\right)\boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)} - 2\left(\mathbf{GM_i} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)}\right)\mathbf{v}_{(R')}(M_i)\right] \\ &= \sum_i m_i \left[\left(\boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)} \cdot \mathbf{v}_{(R')}(M_i)\right)\mathbf{GM_i} - \left(\mathbf{GM_i} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)}\right)\mathbf{v}_{(R')}(M_i)\right] \\ &\quad - \sum_i m_i \left[2\left(\mathbf{GM_i} \cdot \mathbf{v}_{(R')}(M_i)\right)\boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)} - \left(\boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)} \cdot \mathbf{v}_{(R')}(M_i)\right)\mathbf{GM_i} - \left(\mathbf{GM_i} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)}\right)\mathbf{v}_{(R')}(M_i)\right] \\ &= \sum_i \boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)} \times \left(\mathbf{GM_i} \times m_i \mathbf{v}_{(R')}(M_i)\right) \\ &\quad \sum_i m_i \mathbf{v}_{(R')}(M_i) \times \left(\boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)} \times \mathbf{GM_i}\right) - \sum_i \mathbf{GM_i} \times \left(\boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)} \times m_i \mathbf{v}_{(R')}(M_i)\right) \\ &= -\boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)} \times \sigma_G^{(R')} \\ &\quad - \frac{d}{dt}\left[\sum_i \mathbf{GM_i} \times m_i \left(\boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)} \times \mathbf{GM_i}\right)\right]_{(R')} + \sum_i \mathbf{GM_i} \times m_i \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)}}{dt} \times \mathbf{GM_i}\right)\end{aligned}$$

(13),

à cause de (3) ; $\sigma_G^{(R')}$ est le moment cinétique du système par rapport à G dans (R'). On trouve alors

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}_G^{ic} = -\boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)} \times \sigma_G^{(R')} - \frac{d}{dt}\left[\left(\mathcal{I}_G\right)\boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)}\right]_{(R')} + \left(\mathcal{I}_G\right)\frac{d\boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)}}{dt} \qquad (14);$$

d'où le résultat

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{M}}_G^{ic} = -\boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)} \times \sigma_G^{(R')} - \left(\frac{d\left(\mathcal{I}_G\right)}{dt}\right)_{(R')} \boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)}} \qquad (15)$$

et cette expression fait bien apparaître l'influence conjointe de $\boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)}$ et du mouvement du système dans (R').

On peut vérifier que, comme prévu d'après le théorème du moment cinétique dans (R) et dans (R'),

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_G^{ie} + \boldsymbol{M}_G^{ic} &= \left(\frac{d\sigma_G^{(R')}}{dt}\right)_{(R')} - \left(\frac{d\sigma_G^{(R)}}{dt}\right)_{(R)} \\ &= \left(\frac{d}{dt}\left(\sigma_G^{(R')} - \sigma_G^{(R)}\right)\right)_{(R')} - \boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)} \times \sigma_G^{(R)} \end{aligned} \quad (16).$$

2. Puissance des forces d'inertie d'entraînement

Il est bien connu que les forces d'inertie de Coriolis ne travaillent pas, puisque leur puissance se met sous la forme

$$\mathcal{P}^{ic}_{(R')} = \sum_i -m_i\left[2\,\boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)} \times \mathbf{v}_{(R')}(M_i)\right].\mathbf{v}_{(R')}(M_i) = 0 \qquad (17).$$

Il ne reste donc qu'à calculer la puissance des forces d'inertie d'entraînement :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{ie}_{(R')} &= \sum_i -m_i\left[\mathbf{a}_{(R)}(O') - \Omega^2_{(R')/(R)}\ \mathbf{H'M}_i + \frac{d\boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)}}{dt} \times \mathbf{O'M}_i\right].\mathbf{v}_{(R')}(M_i) \\ &= \sum_i -\mathbf{grad}_i\, m_i\left[\mathbf{a}_{(R)}(O').\mathbf{OM}_i - \frac{\Omega^2_{(R')/(R)}}{2}\ \mathbf{H'M}_i^2\right].\mathbf{v}_{(R')}(M_i) \qquad (18), \\ &+ \sum_i -m_i\left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)}}{dt} \times \mathbf{O'M}_i\right).\mathbf{v}_{(R')}(M_i) \end{aligned}$$

où O est un point origine quelconque

On pose

$$U' = \sum_i m_i\left[\mathbf{a}_{(R)}(O').\mathbf{OM}_i - \frac{\Omega^2_{(R')/(R)}}{2}\ \mathbf{H'M}_i^2\right] \qquad (19)$$

qui est une énergie potentielle partielle des forces d'inertie d'entraînement, et s'écrit plus synthétiquement

$$U' = m\mathbf{a}_{(R)}(O').\mathbf{OG} - I_{\Delta'}\frac{\Omega^2_{(R')/(R)}}{2} \qquad (20)$$

où $I_{\Delta'}$ est le moment d'inertie du système par rapport à l'axe $\Delta' = \left(O', \boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)}\right)$; il vient alors

$$\mathcal{P}^{ie}_{(R')} = -\sum_i \mathbf{grad}_i\, U'(M_i,t).\mathbf{v}_{(R')}(M_i) - \sum_i \frac{d\boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)}}{dt}.\left(\mathbf{O'M}_i \times m_i\,\mathbf{v}_{(R')}(M_i)\right) \qquad (21)$$

ce qui donne finalement

$$\mathcal{P}^{ie}_{(R')} = -\left(\frac{dU'}{dt} - \frac{\partial U'}{\partial t}\right) - \frac{d\boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)}}{dt}.\sigma_{O'}^{(R')} \qquad (22).$$

On voit donc, lorsque $\Omega_{(R')/(R)}$ est constant et qu'alors les forces d'inertie d'entraînement dérivent complètement de l'énergie potentielle U', un exemple où le travail des forces d'inertie d'entraînement n'est pas égal à la diminution d'énergie potentielle U', lorsque celle-ci dépend explicitement du temps parce que $\mathbf{a}_{(R)}(O')$ n'est pas constant.

Il est important de noter que, dans cette formule (22), la dérivée " droite " est celle de U' mis en fonction de l'*unique variable* t, compte tenu de son mouvement *par rapport à* (R') puisque ce sont les vitesses des points du système dans (R') qui apparaissent dans (20) ; et pour exprimer $\dfrac{\partial U'}{\partial t}$, on considère la dérivée de U' - cf. (20) - par rapport au temps *pour une position fixée du système dans* (R'), ce qui donne

$$\frac{\partial U'}{\partial t} = m\left(\frac{d\mathbf{a}_{(R)}(O')}{dt}\right)_{(R')}.\mathbf{OG} - m\mathbf{a}_{(R)}(O').\mathbf{v}_{(R')}(O) - I_{\Delta'}\frac{d}{dt}\left(\frac{\Omega^2_{(R')/(R)}}{2}\right) \qquad (23).$$

D'autre part,

$$\frac{dU'}{dt} = m\left(\frac{d\mathbf{a}_{(R)}(O')}{dt}\right)_{(R')}.\mathbf{OG} + m\mathbf{a}_{(R)}(O').\left(\mathbf{v}_{(R')}(G) - \mathbf{v}_{(R')}(O)\right) - \frac{d}{dt}\left(I_{\Delta'}\frac{\Omega^2_{(R')/(R)}}{2}\right)$$

(24) ;

donc finalement

$$\frac{dU'}{dt} - \frac{\partial U'}{\partial t} = m\mathbf{a}_{(R)}(O').\mathbf{v}_{(R')}(G) - \left(\frac{dI_{\Delta'}}{dt}\right)\frac{\Omega^2_{(R')/(R)}}{2} \qquad (25).$$

On obtient alors

$$\boxed{\mathcal{P}^{ie}_{(R')} = -m\mathbf{a}_{(R)}(O').\mathbf{v}_{(R')}(G) + \left(\frac{dI_{\Delta'}}{dt}\right)\frac{\Omega^2_{(R')/(R)}}{2} - \frac{d\Omega_{(R')/(R)}}{dt}.\sigma_{O'}^{(R')}} \qquad (26).$$

On peut prendre pour O et O' n'importe quels points, puisque $\mathcal{P}^{ie}_{(R')}$ est indépendant de O et O' ; cependant, comme on l'a mentionné dans l'introduction, O' doit être un point fixe dans (R') - pour la relation (18) par exemple. La valeur de U' et de ses dérivées dépend de O et O', mais déjà $\dfrac{dU'}{dt} - \dfrac{\partial U'}{\partial t}$ ne dépend plus de O ; $\sigma_{O'}^{(R')}$ dépend aussi de O', mais $-\left(\dfrac{dU'}{dt} - \dfrac{\partial U'}{\partial t}\right) - \dfrac{d\Omega_{(R')/(R)}}{dt}.\sigma_{O'}^{(R')}$ ne dépend ni de O ni de O'.

L'avantage de prendre pour O et O' le point G' coïncidant à la date t_0 avec G est que l'expression de U' se simplifie : $U' = -\,I_{\Delta_G}\dfrac{\Omega^2_{(R')/(R)}}{2}$ (27), et (23) donne $\dfrac{\partial U'}{\partial t} = -\,I_{\Delta_G}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\Omega^2_{(R')/(R)}}{2}\right)$ (28), mais à la date t_0 seulement. On trouve alors

$$\frac{dU'}{dt} - \frac{\partial U'}{\partial t} = m\mathbf{a}_{\mathbf{e}}(G).\mathbf{v}_{(R')}(G) - \left(\frac{dI_{\Delta_G}}{dt}\right)\frac{\Omega^2_{(R')/(R)}}{2} \qquad (29)$$

$$\mathscr{P}^{e}_{(R')} = -m\mathbf{a}_{\mathbf{e}}(G).\mathbf{v}_{(R')}(G) + \left(\frac{dI_{\Delta^c_G}}{dt}\right)\frac{\Omega^2_{(R')/(R)}}{2} - \frac{d\Omega_{(R')/(R)}}{dt}.\sigma_G^{(R')} \qquad (30)$$

Dans (25) et (30), intervient la variation du moment d'inertie au cours du temps. Elle a pour cause le déplacement relatif du système et de l'axe $\Delta' = \left(O', \mathbf{\Omega}_{(R')/(R)}\right)$ ou $\Delta^c_G = \left(G^c, \mathbf{\Omega}_{(R')/(R)}\right)$, qui bouge dans (R') à cause de la variation de direction de $\mathbf{\Omega}_{(R')/(R)}$, *les points O' et G^c restant fixes dans* (R'). Pour calculer explicitement cette dérivée, on peut se servir de l'expression du moment d'inertie par rapport à un axe en fonction de l'opérateur d'inertie par rapport à un point de cet axe, et des cosinus directeurs de cet axe dans un repère orthonormé. Par exemple, pour le moment d'inertie $I_{\Delta^c_G}$ par rapport à l'axe Δ^c_G dont les cosinus directeurs sont α, β et γ dans le repère d'axes principaux G^cXYZ, grâce à l'expression - analogue à (6) - de $\left(\mathcal{J}_{G^c}\right)$ dans la base associée à ce repère, on a quel que soit t

$$I_{\Delta^c_G} = I_{G^cX}\alpha^2 + I_{G^cY}\beta^2 + I_{G^cZ}\gamma^2 \qquad (31)$$

et donc

$$\begin{aligned}\frac{dI_{\Delta^c_G}}{dt} &= 2\left(I_{G^cX}\alpha\frac{d\alpha}{dt} + I_{G^cY}\beta\frac{d\beta}{dt} + I_{G^cZ}\gamma\frac{d\gamma}{dt}\right)\\ &+\left(\frac{dI_{G^cX}}{dt}\alpha^2 + \frac{dI_{G^cY}}{dt}\beta^2 + \frac{dI_{G^cZ}}{dt}\gamma^2\right)\end{aligned} \qquad (32),$$

même à $t \neq t_0$.

Cette expression fait intervenir le choix d'une base particulière - pour simplifier ici on a pris une base propre de $\left(\mathcal{J}_{G^c}\right)$ - mais la dérivée du moment d'inertie en est indépendante ; cette base particulière est une base propre *quel que soit* t, donc elle n'est pas forcément fixe dans (R'), mais les expressions des cosinus directeurs α, β, γ et des moments d'inertie principaux I_{G^cX}, I_{G^cY}, I_{G^cZ} en fonction de t, ainsi que leurs dérivées dans (32), tiennent compte de cela.

3. Cas particulier d'un système solide

Considérons maintenant le cas particulier où le système est un solide (S). Disons à nouveau qu'il n'est pas nécessaire que le système soit solide pour définir son opérateur central d'inertie $(\mathcal{J}_G)$ et l'utiliser comme nous l'avons fait ci-dessus. Mais maintenant, en plus de ce que nous avons déjà montré, on sait qu'il existe un vecteur rotation instantané $\mathbf{\Omega}_{(S)/(R')}$ du solide par rapport à (R'), et donc que $\sigma_G^{(R')} = \left(\mathcal{J}_G\right)\mathbf{\Omega}_{(S)/(R')}$ (33), même si G n'est pas fixe dans (R') - ce qui ne serait pas le cas avec un point quelconque.

Les forces d'inertie d'entraînement sont indépendantes du fait que le système soit solide. Ce n'est pas le cas des forces d'inertie de Coriolis, puisqu'elles dépendent du champ des vitesses du système dans (R'), et que pour un solide le champ des vitesses est particulier.

3.1. Moment des forces d'inertie de Coriolis

Partons de l'expression générale $\boldsymbol{\mathcal{M}}_G^{ic} = -\boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)} \times \sigma_G^{(R')} - \left(\frac{d(\mathcal{J}_G)}{dt}\right)_{(R')} \boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)}$

(15), et transformons $\left(\frac{d(\mathcal{J}_G)}{dt}\right)_{(R')} \boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)}$:

$$\left(\frac{d(\mathcal{J}_G)}{dt}\right)_{(R')} \boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)} = \left(\frac{d}{dt}(\mathcal{J}_G)\boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)}\right)_{(R')} - (\mathcal{J}_G)\left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)}}{dt}\right)$$

$$= \left[\left(\frac{d}{dt}(\mathcal{J}_G)\boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)}\right)_{(S)} + \boldsymbol{\Omega}_{(S)/(R')} \times (\mathcal{J}_G)\boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)}\right] - (\mathcal{J}_G)\left[\left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)}}{dt}\right)_{(S)} + \boldsymbol{\Omega}_{(S)/(R')} \times \boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)}\right]$$

$$= \boldsymbol{\Omega}_{(S)/(R')} \times (\mathcal{J}_G)\boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)} - (\mathcal{J}_G)\left[\boldsymbol{\Omega}_{(S)/(R')} \times \boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)}\right]$$

(34)

car la matrice $(\mathcal{J}_G)$ exprimée dans une base liée à (S) est constante, et finalement

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}_G^{ic} = -\boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)} \times (\mathcal{J}_G)\boldsymbol{\Omega}_{(S)/(R')} - \boldsymbol{\Omega}_{(S)/(R')} \times (\mathcal{J}_G)\boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)} + (\mathcal{J}_G)\left[\boldsymbol{\Omega}_{(S)/(R')} \times \boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)}\right]$$

(35) ;

en calculant les composantes de $\boldsymbol{\mathcal{M}}_G^{ic}$ dans la base orthonormée directe associée au repère $GXYZ$, compte tenu de $I_{GX} = I_Y + I_Z$ (36) et des relations analogues, on vérifie que ce moment s'exprime plus simplement en fonction de la matrice $(\mathcal{K}_G)$:

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{M}}_G^{ic} = -2\left[(\mathcal{K}_G)\boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)}\right] \times \boldsymbol{\Omega}_{(S)/(R')}} \qquad (37).$$

3.2. Puissance des forces d'inertie d'entraînement

La façon la plus simple de la calculer consiste à utiliser l'expression de la puissance des forces exercées sur un solide, en utilisant le point G :

$$\mathcal{P}_{(R')}^{ie} = \mathbf{F}^{ie}.\mathbf{v}_{(R')}(G) + \boldsymbol{\mathcal{M}}_G^{ie}.\boldsymbol{\Omega}_{(S)/(R')}$$

$$= \mathbf{F}^{ie}.-m\mathbf{a}_e(G) + \left[-(\mathcal{J}_G)\frac{d\boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)}}{dt} - \boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)} \times (\mathcal{J}_G)\boldsymbol{\Omega}_{(R')/(R)}\right].\boldsymbol{\Omega}_{(S)/(R')}$$

(38).

Conclusion

Les expressions ci-dessus peuvent être intéressantes pour l'enseignement en classe de Mathématiques Spéciales, dans le cas où le système présente un axe de symétrie Δ, et où $\Omega_{(R')/(R)}$ est parallèle à Δ ; alors, comme le centre d'inertie G se trouve forcément sur l'axe de symétrie, on a $\Delta = \Delta_G$.

Dans ce cas, $(\mathcal{J}_G)\Omega_{(R')/(R)}$ et $(\mathcal{K}_G)\Omega_{(R')/(R)}$ sont parallèles à $\Omega_{(R')/(R)}$. En notant I_Δ le moment d'inertie du système par rapport à cet axe de symétrie Δ, on trouve une expression très simplifiée du moment des forces d'inertie d'entraînement :

$$\mathcal{M}_G^{ie} = -I_\Delta \frac{d\Omega_{(R')/(R)}}{dt} \qquad (39)$$

qui est nul si $\Omega_{(R')/(R)}$ est constant.

Quant au moment des forces d'inertie de Coriolis exercées sur un système solide, il est nul si $\Omega_{(S)/(R')}$ est parallèle à Δ en même temps que $\Omega_{(R')/(R)}$.

Ces conclusions peuvent être utiles à des élèves de Mathématiques Spéciales.

REMERCIEMENTS :

à Michel RENARD, professeur en CPGE au lycée Blaise Pascal, pour une fructueuse discussion.

REFERENCE :

[1] Concours commun de Centrale, option TA, 1983, épreuve de Physique I