Comparaison entre le mouvement de Képler et le mouvement elliptique harmonique

par Jean SIVARDIÈRE
DRF/SPh/ Groupe Magnétisme et Diffusion
par Interactions Hyperfines
Centre d'études Nucléaires de Grenoble
85 X-38041 Grenoble Cedex, France

RÉSUMÉ

On compare systématiquement les propriétés géométriques, cinématiques et dynamiques du mouvement elliptique de Képler et du mouvement elleptique harmonique. Cette comparaison met en évidence de nombreuses propriétés communes aux deux mouvements, liées à l'existence d'une symétrie dynamique.

INTRODUCTION

Les mouvements elleptiques képlérien et harmonique jouent un rôle fondamental en physique. Le mouvement de Képler est celui d'une masse soumise à une force centrale newtonienne $\vec{F} = -\alpha \dfrac{\vec{r}}{r^3}$. On le rencontre en mécanique céleste (mouvement des planètes, satellites et comètes) et en physique atomique (mouvement de l'électron d'un atome d'hydrogène dans le modèle planétaire classique de Rutherford). Le mouvement harmonique est observé quand une masse oscille au voisinage d'une position d'équilibre, sous l'effet d'une force harmonique (loi de Hooke) $\vec{F} = -k\,\vec{r}$. Ce mouvement est celui du pendule sphérique dans l'approximation des petits mouvements, ou celui de l'électron d'un atome d'hydrogène dans le modèle de Thomson.

Dans cet article, nous comparons systématiquement ces deux mouvements. Nous en soulignons les propriétés communes et les différences significatives. Pour bien des aspects, et contrairement aux idées reçues, le mouvement képlérien possède des propriétés plus simples que le mouvement harmonique (hodographe, valeurs moyennes, invariant de Laplace).

Nous admettons au départ que les deux mouvements sont elliptiques et s'effectuent suivant la loi des aires, le centre des aires étant un foyer de l'ellipse (deuxième loi de Képler) ou son centre (cas du mouvement harmonique). Nous en étudions les propriétés géométriques et cinématiques. Puis, en utilisant le principe de conservation de l'énergie, nous déterminons la forme analytique des potentiels responsable des deux mouvements. Nous étudions aussi le problème inverse, c'est-à-dire la détermination des orbites connaissant les potentiels auxquel est soumis le mobile. Enfin nous décrivons les invariants de Laplace et la symétrie dynamique des deux mouvements.

PREMIÈRE PARTIE : ANALOGIES ÉLÉMENTAIRES

GÉOMÉTRIE

La figure 1 représente l'orbite elliptique commune aux deux mouvements. O, A, A', B, B', F, F' sont respectivement le centre, les 4 sommets et les 2 foyers de l'ellipse : AA' = 2a, BB' = 2b, FF' = 2c. Soit M le point courant de l'ellipse : MF + MF' = 2a, d'où en plaçant M en B : $a^2 = b^2 + c^2$. L'ellipse peut être décrite par une longueur caractéristique, par exemple le demi-grand axe a, et un facteur de forme, excentricité $e = c/a$, aplatissement $\varepsilon = 1 - b/a = 1 - \sqrt{1 - e^2}$ ou encore rapport $\frac{FA'}{FA} = \frac{1+e}{1-e}$.

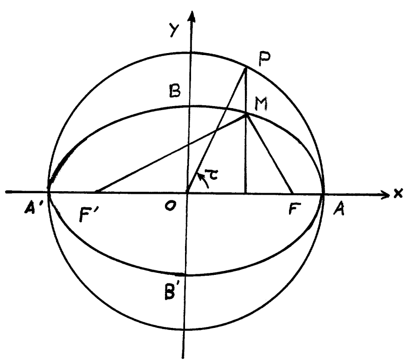


Figure 1 : Orbite elliptique des mouvements képlérien (θ = angle AFM) et harmonique (θ = angle AOM).

Dans le mouvement képlérien, l'un des foyers, F par exemple, joue un rôle privilégié puisqu'il est le centre attractif (première loi de

Képler). Il est alors logique de décrire l'ellipse par son équation polaire, le pôle étant F et l'axe polaire Ox : $r = FM$, $\theta = \text{angle }(x, FM)$ (θ est appelé anomalie vraie en astronomie). Cette équation s'obtient immédiatement en considérant le triangle F'FM dans lequel :

$$MF'^2 = MF^2 + FF'^2 + 2\,MF\,.\,FF'\,.\cos\theta$$

d'où :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \qquad (1)$$

$p = b^2/a = a\,(1 - e^2)$ est le paramètre de l'ellipse ($r = p$ pour $\theta = \pi/2$). La relation (1) s'écrit également :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos\theta \qquad (2)$$

Dans le mouvement harmonique, les foyers ne jouent aucun rôle, c'est le centre de l'ellipse qui est le centre attractif. L'orbite peut se décrire alors par son équation cartésienne :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (3)$$

qui s'obtient aisément à partir de la définition : MF + MF' = 2a. Mais il est plus logique d'utiliser une équation polaire en plaçant le pôle en O : $r = OM$ et $\theta = \text{angle }(x, OM)$. De (3), on déduit ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$) :

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}$$

d'où :

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\cos 2\theta \qquad (4)$$

ou :

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{b^2} - \frac{e^2}{b^2}\cos^2\theta$$

L'équation (2) exprime l'existence d'un périhélie (A) et d'un aphélie (A') dans le mouvement képlérien ; l'équation (4) exprime l'existence de deux périhélies (B et B') et de deux aphélies (A et A') dans le mouvement harmonique.

Considérons enfin l'angle $\tau = \text{angle }(x, OP)$ où P est le point associé à M sur le grand cercle directeur de l'ellipse. Cet angle, appelé anomalie excentrique en astronomie, est utile à la description des deux mouvements.

Dans le mouvement keplérien, les coordonnées de M (origine en F) sont :

$$x = a\,(\cos\tau - e) \qquad (5)$$

$$y = b \sin\tau$$

d'où :

$$r = a\,(1 - e\cos\tau) \qquad (6)$$

θ et τ sont liés par la relation :

$$\cos\theta = \frac{\cos\tau - e}{1 - e\cos\tau} \qquad (7)$$

Dans le mouvement harmonique, les coordonnées de M (origine en O) sont :

$$x = a\cos\tau \qquad (8)$$

$$y = b\sin\tau$$

d'où :

$$r^2 = a^2\,(1 - e^2 \sin^2\tau) \qquad (9)$$

θ et τ sont liés par la relation :

$$\tan\tau = \frac{a}{b}\tan\theta \qquad (10)$$

Notons enfin que **le mouvement de Képler** peut se décrire simplement en utilisant les coordonnées paraboliques définies par :

$$x = \xi^2 - \eta^2$$

$$y = 2\,\xi\,\eta$$

d'où :

$$r = \xi^2 + \eta^2$$

$$\tan\theta = \frac{2\,\xi\,\eta}{\xi^2 - \eta^2}$$

$$\theta = 2\ \mathrm{Arc}\tan\frac{\eta}{\xi}$$

(ξ et η sont les coordonnées du spineur associé au vecteur $\vec{r}$).

Des expressions de x et r données par (5) et (6), on déduit :

$$\xi^2 = \frac{a\,(1-e)}{2}\,(1+\cos\tau)$$

$$\eta^2 = \frac{a\,(1+e)}{2}\,(1-\cos\tau)$$

ou :

$$\xi = \sqrt{a\,(1-e)}\,\cos\frac{\tau}{2}$$

$$\eta = \sqrt{a\,(1+e)}\,\sin\frac{\tau}{2}$$

Les relations ci-dessus, analogues à (8), montrent que le point de coordonnées ξ et η dans le plan des spineurs décrit une ellipse dont le centre est l'origine. Ses coordonées polaires ρ et φ sont égales respectivement à $\sqrt{r}$ et $\frac{\theta}{2}$ (d'où le passage immédiat de l'équation (2) de l'orbite réelle à l'équation (4) de l'orbite du plan des spineurs) : il effectue donc un tour quand le mobile effectue deux tours dans l'espace réel (mais son mouvement n'est pas harmonique). En évaluant le rapport $\frac{\xi}{\eta}$, on obtient enfin :

$$\tan\frac{\tau}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,\tan\frac{\theta}{2}$$

relation analogue à (10) qui peut aussi se déduire (péniblement) de (7).

CINÉMATIQUE

Les deux mouvements képlérien et harmonique satisfont la loi des aires :

$$r^2\,\frac{d\theta}{dt} = C \qquad (11)$$

La constante des aires est donnée par :

$$C = |\vec{r} \wedge \vec{v}| = 2\,\frac{dS}{dt} \qquad (12)$$

$\frac{dS}{dt}$ est la vitesse aréolaire : dS est l'aire balayée par le rayon vecteur pendant le temps dt. Soit $P = \frac{1}{\nu} = \frac{2\,\pi}{\omega}$ la période du mouvement. ω est la valeur moyenne dans le temps de la vitesse angulaire de M : $\omega = \left< \frac{d\theta}{dt} \right>$. En une période P, l'aire balayé S = 1/2 C P n'est autre que l'aire πab de l'ellipse. D'où, pour les deux mouvements, la relation :

$$C = \omega \, a \, b \tag{13}$$

Dans le mouvement képlérien, on obtient en combinant (1) et (11) :

$$\frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = \omega \frac{a^3}{b^3} dt$$

Dans le mouvement harmonique, on obtient de même en combinant (4) et (11) :

$$\frac{d\theta}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) \cos 2\,\theta} = \frac{\omega\, ab}{2} dt$$

Dans le premier cas, on ne peut donner aucune expression simple de θ (ou de r) en fonction de t mais, comme nous allons le voir, l'angle τ s'exprime simplement en fonction de t, ce qui justifie son introduction.

Dans le deuxième cas, on obtient : $\tan \theta = \tan \omega t$ ou, d'après (10) : $\tau = \omega\, t$, une relation que nous retrouverons plus simplement ci-dessous.

Dans le mouvement de Képler, d'après (5) et (13) :

$$dS = \frac{1}{2} a \, b \, (1 - e \cos \tau) \, d\tau = \frac{1}{2} \omega \, a \, b \, dt$$

d'où :

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\omega}{1 - e \cos \tau} \tag{14}$$

et la relation de Képler (on suppose que M est en A à t = 0) :

$$\tau - e \sin \tau = \omega t \tag{15}$$

La quantité ωt est appelée anomalie moyenne. Le mouvement de P sur le cercle directeur n'est pas uniforme, mais sa vitesse angulaire moyenne est égale à ω.

Dans le mouvement harmonique, d'après (8) et (13) :

$$\tau = \omega t \tag{16}$$

Le mouvement de P est uniforme, de vitesse angulaire ω.

Dans le mouvement de Képler, les composantes de la vitesse s'obtiennent à partir de relations (5) et (14) :

$$v_x = \frac{-\omega a \sin\tau}{1 - e\cos\tau}$$

$$v_y = \frac{\omega b \cos\tau}{1 - e\cos\tau} \tag{17}$$

et les composantes polaires à partir de (6), (4) et (11) :

$$v_r = \frac{\omega a e \sin\tau}{1 - e\cos\tau}$$

$$v_\theta = \frac{C}{r} = \frac{\omega b}{1 - e\cos\tau} \tag{18}$$

De (17) et (6), on déduit :

$$v^2 = \omega^2 a^2 \frac{1 + e\cos\tau}{1 - e\cos\tau} \tag{19}$$

$$v^2 = \omega^2 a^3 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \tag{20}$$

et enfin :

$$v_x^{\,2} + v_y^{\,2} - 2 e \omega \frac{a^2}{b} v_y = \omega^2 a^2 \tag{21}$$

L'hodographe est donc un cercle de rayon $R = \omega \frac{a^2}{b} = \frac{\omega a}{\sqrt{1 - e^2}}$ centré au point K (0, Re).

Dans le mouvement harmonique, on obtient de même les composantes cartésiennes de la vitesse à partir de (8) :

$$v_x = -\omega a \sin\tau$$

$$v_y = \omega b \cos\tau \tag{22}$$

et les composantes polaires en utilisant (9) et (16) :

$$v_r = -\frac{\omega\, a\, e^2 \sin 2\tau}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \tau}}$$

$$v_\theta = \frac{\omega b}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \tau}} \qquad (23)$$

De (22) et (9) on déduit :

$$v^2 = \omega^2 a^2 (1 - e^2 \cos^2 \tau) \qquad (24)$$

$$v^2 = \omega^2 a^2 \left(2 - e^2 - \frac{r^2}{a^2}\right) \qquad (25)$$

et :

$$\frac{{v_x}^2}{\omega^2 a^2} + \frac{{v_y}^2}{\omega^2 b^2} = 1 \qquad (26)$$

L'hodographe du mouvement harmonique est donc une ellipse de même forme que l'orbite.

Revenons au **mouvement de Képler**. Nous avons vu que $< \frac{d\theta}{dt} > = \omega$ d'où, à partir de (11) et (13) : $< \frac{1}{r^2} > = \frac{1}{ab}$. d'autre part : $< \frac{d\tau}{dt} > = \omega$ d'où, par (14) : $< \frac{1}{1 - e \cos \tau} > = 1$ et, par (6) : $< \frac{1}{r} > = \frac{1}{a}$. Le mobile restant à distance finie de F, $[v_x] = [v_y] = [v_r] = 0$. De $v_\theta = \frac{C}{r}$, on déduit : $<v_\theta> = \omega\, b$ et $<{v_\theta}^2> = \omega^2\, a\, b$. De (20), on déduit : $<v^2> = \omega^2 a^2$, d'où : $<{v_r}^2> = \omega^2 a^2 \left(1 - \frac{b}{a}\right)$. Enfin en combinant $< \frac{1}{r} > = \frac{1}{a}$ et (2), on trouve : $<\cos\theta> = -e$. La valeur moyenne de $\cos\tau$ se calcule directement à partir de (14) et vaut $-e/2$, d'où : $<r> = a\left(1 + \frac{e^2}{2}\right)$ et : $<r^2> = a^2\left(1 + \frac{3}{2} e^2\right)$.

Dans le mouvement harmonique, on a de même à partir de (11) et (13) : $< \frac{1}{r^2} > = \frac{1}{a\, b}$. De (9), (24) et (16), on déduit :

$<r^2> = a^2 \left(1 - \frac{e^2}{2}\right)$ et $<v^2> = \omega^2 a^2 \left(1 - \frac{e^2}{2}\right)$. La relation $v_\theta = \frac{C}{r}$ donne : $<v_\theta{}^2> = \omega^2$ a b et par suite : $<v_r{}^2> = \frac{1}{2}\,\omega^2 (a - b)^2$. Par symétrie, on a : $<\cos\theta> = <\cos\tau> = 0$. De $\left< \frac{1}{r^2} \right> = \frac{1}{a\,b}$ et (4), on déduit : $<\cos 2\,\theta> = \frac{a - b}{a + b}$.

DYNAMIQUE

Problème direct

Nous montrons tout d'abord qu'en combinant les propriétés cinématiques du mouvement képlérien ou harmonique avec le principe de conservation de l'énergie E = T + U, on trouve l'expression du potentiel U auquel est soumis le mobile de masse m (T est l'énergie cinétique), et les paramètres orbitaux en fonction des conditions initiales du mouvement.

Ainsi de (20) on déduit pour **le mouvement de Képler** :

$$\frac{1}{2}\,m\,v^2 - \frac{m\,\omega^2\,a^3}{r} = -\,\frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,a^2$$

d'où :

$$U = -\,\frac{k\,m}{r} \tag{26}$$

avec :

$$k = \omega^2\,a^3 \tag{27}$$

(cette relation n'est autre que la troisième loi de Képler), et :

$$E = -\,\frac{k\,m}{2\,a} \tag{28}$$

En combinant (13) et (27), on obtient le paramètre de l'orbite :

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{C^2}{k} \tag{29}$$

et son excentricité :

$$1 - e^2 = \frac{p}{a} = -\,\frac{2\,C^2\,E}{m\,k^2} \tag{30}$$

On en déduit que le rayon de l'hodographe est indépendant de l'énergie et égale à k/C. Finalement l'angle ϕ entre la position initiale $\vec{r_0}$ du mobile et le grand axe de l'ellipse se déduit de (2) :

$$\cos\phi = \frac{1}{e}\left(\frac{p}{r_0} - 1\right)$$

d'où :

$$\tan\phi = \frac{r_0\, v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{k - r_0\, v_0^2 \sin^2\alpha}$$

$$= \frac{C\, v_{0r}}{k - C\, v_{0\theta}} \qquad (31)$$

ou encore :

$$\tan\phi = \frac{T_0 \sin\alpha \cos\alpha}{-\frac{1}{2} U_0 - T_0 \sin^2\alpha}$$

α est l'angle entre $\vec{r_0}$ et la vitesse initiale $\vec{v_0}$, $C = r_0\, v_0 \sin\alpha$ (figure 2).

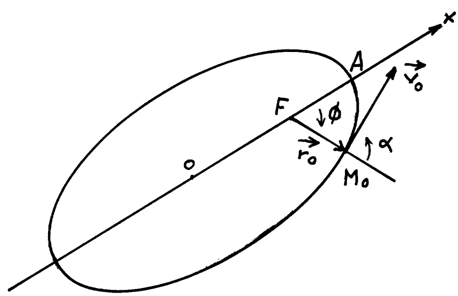


Figure 2 : Conditions initiales du mouvement képlèrien et orientation de l'orbite (pour le mouvement harmonique, l'angle ϕ est l'angle entre le grand axe et le vecteur position

De même, de (25), on déduit **pour le mouvement harmonique** :

$$\frac{1}{2} m\, v^2 + \frac{1}{2} m\, \omega^2 r^2 = \frac{1}{2} m\, \omega^2 (a^2 + b^2)$$

d'où :

$$U = \frac{1}{2} k\, r^2 \qquad (33)$$

avec :

$$k = m\, \omega^2 \qquad (34)$$

relation analogue à la troisième loi de Képler, et :

$$E = \frac{1}{2} k \left(a^2 + b^2\right) \tag{35}$$

A partir de (13) et (35), on détermine a et b :

$$a , b = \left[\sqrt{\frac{2 E}{k} + \frac{2 C}{\omega}} \pm \sqrt{\frac{2 E}{k} - \frac{2 C}{\omega}}\right] \tag{36}$$

Enfin l'angle ϕ s'obtient, à $\pi/2$ près, à partir de (4) et (36) :

$$\cos 2 \phi = \frac{\omega^2 r_0^2 + v_0^2 \cos 2 \alpha}{\sqrt{\omega^4 r_0^4 + v_0^4 + 2 \omega^2 r_0^2 v_0^2 \cos 2 \alpha}} \tag{37}$$

ou :

$$\cos 2 \phi = \frac{U_0 + T_0 \cos 2 \alpha}{\sqrt{U_0^2 + T_0^2 + 2 U_0 T_0 \cos 2 \alpha}}$$

ou encore :

$$\tan 2 \phi = \frac{v_0^2 \sin 2 \alpha}{\omega^2 r_0^2 + v_0^2 \cos 2 \alpha}$$

Le calcul de certaines valeurs moyennes effectué ci-dessus permet, connaissant l'expression de U, de retrouver simplement la troisième loi de Képler (27) et la relation analogue (34) à l'aide du théorème du viriel.

Pour le mouvement de Képler :

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle U \rangle = -E$$

$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{1}{a}$ et $\langle v^2 \rangle = \omega^2 a^2$ d'où (27) et (28).

De même pour le mouvement harmonique :

$$\langle T \rangle = \langle U \rangle = \frac{1}{2} E$$

$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$ et $\langle v^2 \rangle = \omega^2 \langle r^2 \rangle$ d'où (34) et (35).

Problème inverse

Nous supposons maintenant connu le potentiel central U, képlérien ou harmonique, et nous cherchons l'équation de l'orbite. Comme dans tout problème à potentiel central, le mouvement cinétique $\vec{L} = m\,\vec{r} \wedge \vec{v}$ est une constante du mouvement : le mouvement se fait donc dans un plan perpendiculaire à $\vec{L}$ suivant la loi des aires (11). D'autre part la loi de conservation de l'énergie peut s'écrire :

$$\frac{1}{2}\,m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] + U = E \qquad (38)$$

d'où en combinant (11) et (38) :

$$\frac{1}{2}\,m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(U + \frac{m\,C^2}{2\,r^2}\right) = E \qquad (39)$$

La quantité $U + \dfrac{m\,C^2}{2\,r^2} = U_1$ est le potentiel effectif. En éliminant le temps entre (11) et (39), il vient :

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2}{m}\;\frac{r^4}{C^2}\left[E - U - \frac{m\,C^2}{2\,r^2}\right] \qquad (40)$$

(40) s'intègre aisément **dans le cas du mouvement de Képler** en posant : $u = 1/r$. (40) devient alors :

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{2E}{m\,C^2} + \frac{2\,k}{C^2}\,u - u^2 \qquad (41)$$

d'où :
$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{C^2}$$

et :
$$u = \frac{k}{C^2} + A\cos\theta$$

avec :
$$A^2 = \frac{2\,E\,C^2 + m\,k^2}{m\,C^4}$$

On retrouve l'équation (1) avec : $p = \dfrac{C^2}{k}$ et $e = \dfrac{A\,C^2}{k}$.

(40) s'intègre aussi **pour le mouvement harmonique** en posant : $u = 1/r^2$. (40) devient :

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{8\,E}{m\,C^2}\,u - 4\,u^2 - 4\,\frac{\omega^2}{C^2} \tag{42}$$

d'où :

$$\frac{d^2\,u}{d\theta^2} + 4\,u = \frac{4\,E}{m\,C^2}$$

et :

$$u = \frac{E}{m\,C^2} + A\cos 2\,\theta$$

avec :

$$A^2 = \frac{E^2 - k\,m\,C^2}{m^2\,C^4}$$

On retrouve ainsi l'équation (4) et la relation (36).

Remarquons que le potentiel effectif peut être utilisé pour trouver les paramètres géométriques de l'orbite supposée être une ellipse. En effet les points de retournement du mouvement radial sont déterminés par la condition : $U_1 = E$. **Dans le mouvement de Képler,** les distances $FA = a\,(1 - e)$ et $FA' = a\,(1 + e)$ sont donc les racines de l'équation :

$$2\,E\,r^2 + 2\,m\,k\,r - m\,C^2 = 0$$

d'où (28) et (30). De même **dans le mouvement harmonique,** $OA = a$ et $OB = b$ sont les racines de l'équation :

$$kr^2 - 2\,E\,r^2 + m\,C^2 = 0$$

d'où le résultat (36).

RÉSUMÉ PARTIEL

Au cours de la discussion précédente, nous avons rencontré des différences notables entres les deux mouvements :

– dans le mouvement de Képler, le centre attractif est un foyer de l'ellipse, on observe donc un périhélie et un aphélie ; dans le mouvement harmonique, le centre attractif est le centre de l'ellipse, on observe donc deux périhélies et deux aphélies ;

– dans le mouvement de Képler, la période dépend de la dimension a de l'orbite, non de sa forme e (troisième loi de Képler) ; dans le mouvement harmonique, la période ne dépend ni de sa dimension ni de sa forme. Ainsi la planète Uranus et la comète de Halley ont des périodes voisines bien que leurs orbites soient très différentes, car les grands axes de ces orbites ont des longueurs voisines.

Les propriétés communes sont nombreuses :

– le potentiel responsable du mouvement est central, donc le mouvement est plan et se fait selon la loi des aires,

– l'orbite est une ellipse et $C = \omega\, ab$,

– les composantes cartésiennes et polaires de la position et de la vitesse s'expriment simplement en fonction de τ,

– τ s'exprime simplement en fonction de t,

– les équations du mouvement s'intègrent aisément en coordonnées polaires.

Enfin plus fondamentalement, comme nous allons le voir :

– l'orbite est fermé quelles que soient les conditions initiales du mouvement et par suite les périodes radiale et angulaire sont commensurables, le mouvement est périodique.

– l'énergie dépend d'un seul paramètre orbital (a pour le mouvement de Képler, $a^2 + b^2$ pour le mouvement harmonique) et non deux (a et e, ou a et b).

DEUXIÈME PARTIE : ANALOGIES FONDAMENTALES

LE THÉORÈME DE BERTRAND

Publié en 1873, ce théorème remarquable, mais peu connu, établit un lien entre les deux mouvements étudiés. Considérons une masse m soumise au potentiel central $U = -\frac{\alpha}{r^n}$. L'orbite est plane. Pour des conditions initiales très particulières, elle est circulaire. Dans le cas général, soient r_{min} et r_{max} les coordonnées des points de retournement du mouvement radial, définis par : $U_1 = E$: l'orbite est contenue dans la couronne circulaire limitée par les deux cercles centrés sur le centre attractif et de rayon respectifs r_{min} et r_{max}. Si n est quelconque, l'orbite n'est pas fermée, elle a la forme d'une rosette et remplit la couronne circulaire, toute direction radiale est un axe de symétrie. Les périodes $P_r = \frac{2\,\pi}{\omega_r}$ du mouvement radial et $P_\theta = \frac{2\,\pi}{\omega_\theta}$ du mouvement angulaire sont incommensurables et le mouvement est dit pseudo-périodique.

Cependant - c’est l’objet du théorème de Bertrand - on peut démontrer que l’orbite est fermée (réentrante) dans deux cas particuliers : n = 1 (potentiel de Képler) et n = – 2 (potentiel harmonique). Alors le mouvement est périodique, car les périodes radiale et angulaire sont commensurables. Pour n = 1 (figure 3a), $P_r = P_\theta$ et $\omega_r = \omega_\theta = \omega$. L’orbite possède un périhélie (A) et un aphélie (A’), et un axe de symétrie AA’ passant par le centre attractif. Pour n = 2 (figure 3b), $P_\theta = 2\ P_r$ et $\omega_r = 2\omega_\theta = 2\omega$. L’orbite possède deux périhélies (B et B’) et deux aphélies (A et A’), et deux axes de symétrie AA’ et BB’ passant par le centre attractif.

(a)
(b)
(c)

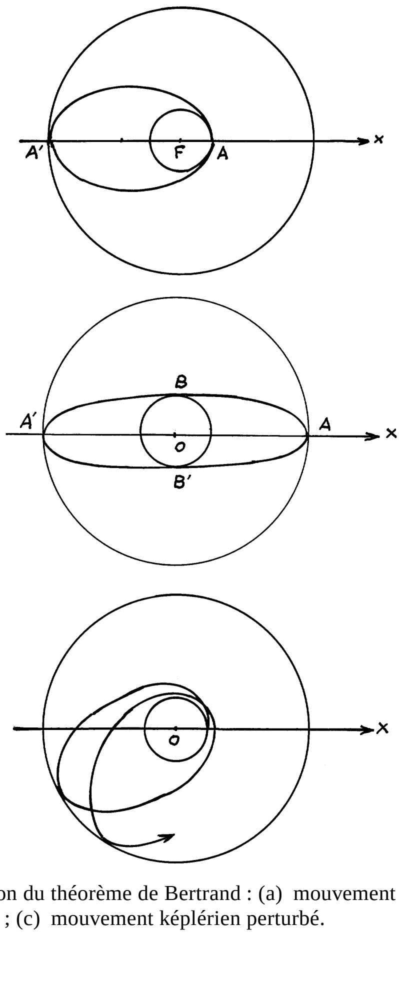


Figure 3 : Illustration du théorème de Bertrand : (a) mouvement képlérien ; (b) mouvement harmonique ; (c) mouvement képlérien perturbé.

LES INVARIANTS DE LAPLACE

Une conséquence directe du théorème de Bertrand est l'existence des invariants de Laplace, encore appelés invariants de Runge-Lenz. Si n est différent de 1 et – 2, l'orbite remplit la couronne circulaire décrite ci-dessus : il n'existe aucune direction privilégiée dans le plan orbital. Si n = 1, une telle direction privilégiée existe, elle joint le centre attractif au périhélie (ou à l'aphélie). On doit donc pouvoir trouver un vecteur parallèle à cette direction, et par suite perpendiculaire au moment cinétique, invariant au cours du temps. Un tel vecteur a été découvert au début du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle puis utilisé par Laplace, il a pour expression :

$$\vec{A} = \vec{v} \wedge \vec{L} - \alpha \frac{\vec{r}}{r} \tag{43}$$

On peut vérifier que ce vecteur est porté par le grand axe de l'orbite elliptique. On a en effet, en choisissant son support comme axe polaire :

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = m\,[\vec{v} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{v})] \cdot \vec{r} - \alpha\, r$$

$$= m\left[r^2\, v^2 - (\vec{r} \cdot \vec{v})^2\right] - \alpha\, r$$

d'où :

$$A\, r \cos\theta = m\, C^2 - \alpha\, r$$

L'équation (1) de l'orbite s'obtient ici sans intégration, et on trouve :

$$p = \frac{C^2}{k} \text{ et } e = \frac{A}{km}$$

Dans le mouvement de Képler, il existe donc deux vecteurs invariants : le moment cinétique, qui fixe le plan orbital et la taille de l'orbite ; le vecteur de Laplace, qui fixe l'orientation de l'orbite dans son plan, et sa forme. L'énergie du mouvement s'obtient en calculant la norme du vecteur de Laplace :

$$E = \frac{m}{2}\, \frac{A^2 - \alpha^2}{L^2} \tag{44}$$

Cette relation est équivalente à (28).

L'invariance du vecteur de Laplace peut être utilisée pour calculer ϕ entre $\vec{r}_0$ et le grand axe de l'orbite. Choisissons l'axe des x selon $\vec{r}_0$.

α étant l'angle entre $\vec{r_0}$ et $\vec{v_0}$, nous avons :

$$\vec{r_0} = (r_0\,,\ 0\,,\ 0)$$

$$\vec{v_0} = (v_0 \cos\alpha\,,\ v_0 \sin\alpha\,,\ 0)$$

$$\vec{L} = (0\,,\ 0\,,\ m\, r_0\, v_0 \sin\alpha)$$

$$\vec{A} = (m\, r_0\, v_0^2 \sin^2\alpha - k\, m\,,\ - m\, r_0\, v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha\,,\ 0)$$

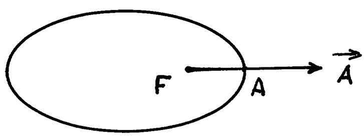
En écrivant que $\tan\phi = \dfrac{A_y}{A_x}$, on retrouve (31).

Enfin en calculant $\vec{L} \wedge \vec{A}$, on obtient :

$$\vec{v} = \frac{\vec{L} \wedge \vec{A}}{L^2} + k\, m \frac{\vec{L} \wedge \vec{u}}{L^2} \qquad \left(\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}\right) \tag{45}$$

ce qui redémontre que l'hodographe est un cercle de centre k et de rayon $R = \dfrac{km}{L} = \dfrac{k}{C} = \omega \dfrac{a^2}{b}$ d'après (27). Le vecteur $\vec{OK} = \dfrac{\vec{L} \wedge \vec{A}}{L^2}$ est un vecteur invariant initialement découvert par Hamilton, il est parallèle au petit axe de l'orbite (figure 4). Le vecteur vitesse est la somme du vecteur de Hamilton et du vecteur qui se déduit du vecteur position unitaire par une similitude d'angle $\pi/2$ et de rapport α/L. Remarquons enfin que les sens des vecteurs de Laplace et de Hamilton ont une signification physique : le premier est dirigé vers le périgée, le second est parallèle à la vitesse du mobile au périgée.

(a)



(b)

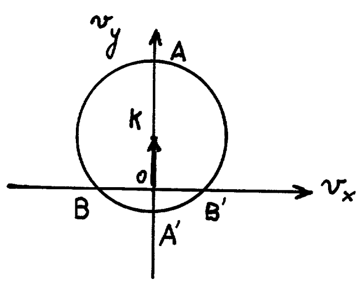


Figure 4 : Invariants dynamiques du mouvement képlérien : (a) vecteur de Laplace et orbite ; (b) vecteur de Hamilton et hodographe.

Si n = – 2 (*potentiel harmonique*), il existe, dans le plan orbital Oxy, deux directions privilégiées perpendiculaires entre elles : les axes de symétrie de l’orbite. Il doit donc être possible de construire un tenseur symétrique d’ordre deux invariant dans le temps, dont ces directions propres sont ces directions privilégiées. On vérifie que ce tenseur a pour expression :

$$\overset{=}{A} = \frac{k}{2}\ \vec{r}\ \mathrm{x}\ \vec{r} + \frac{m}{2}\ \vec{v}\ \mathrm{x}\ \vec{v} \tag{46}$$

soit :

$$\overset{=}{A} = \frac{m}{2}\begin{bmatrix} \omega^2 x^2 + {v_x}^2 & \omega^2 xy + v_x v_y & 0 \\ \omega^2 xy + v_x v_y & \omega^2 y^2 + {v_y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Posons :

$$\overset{=}{A} = \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Soient λ_1, λ_2 et λ_3 les valeurs propres du tenseur de Laplace :

$$\mathrm{tr}\ \overset{=}{A}_2 = \lambda_1 + \lambda_2 = E$$

$$\det \overset{=}{A}_2 = \lambda_1\ \lambda_2 = \frac{\omega^2\ L^2}{4} \tag{47}$$

d’où :

$$\lambda_1 = \frac{E + \sqrt{E^2 - \omega^2\ L^2}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{E - \sqrt{E^2 - \omega^2\ L^2}}{2} \tag{48}$$

et :

$$E^2 = |\overset{=}{A}|^2 + \frac{\omega^2 L^2}{2} \tag{49}$$

L’équation de l’orbite s’obtient sans intégration à partir de l’expression (46) en calculant $\vec{r} \cdot \overset{=}{A}_2 \cdot \vec{r}$ dans la base propre du tenseur :

$$\vec{r} \cdot \overset{=}{A}_2 \cdot \vec{r} = (r \cos\theta\ r \sin\theta) \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1\ r^2 \cos^2\theta + \lambda_2\ r^2 \sin^2\theta$$

Mais :
$$\vec{r} \cdot \bar{\bar{A}}_2 \cdot \vec{r} = \frac{k}{2} r^4 + \frac{m}{2} \left(\vec{r} \cdot \vec{v} \right)^2$$
$$= \frac{k}{2} r^4 + \frac{m}{2} (r^2 v^2 - C^2)$$

d'où, en éliminant v par la conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{r^2} = \frac{2\lambda_2}{mC^2} \cos^2\theta + \frac{2\lambda_1}{mC^2} \sin^2\theta$$

L'orbite est bien une ellipse dont les axes de symétrie sont les axes propres du tenseur de Laplace ; a et b sont donnés par :

$$a^2 = \frac{mC^2}{2\lambda_2} \ \text{ et } \ b^2 = \frac{mC^2}{2\lambda_1}$$

Remarquons enfin que, puisque $C = \omega ab$:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} k\, a^2 \ \text{ et } \ \lambda_2 = \frac{1}{2} k\, b^2$$

λ_1 et λ_2 sont donc les énergies d'oscillation selon les directions propres du tenseur de Laplace.

Dans le mouvement harmonique, on a donc un tenseur d'ordre deux invariant. Le plan orbital est perpendiculaire à la troisième direction propre (la valeur propre correspondante λ_3 est nulle car : $\bar{\bar{A}}\,\vec{L} = 0$). Les deux premières directions propres sont les axes de symétrie de l'orbite, les valeurs propres correspondantes en fixent les dimensions. L'énergie et le moment cinétique sont donnés par (47).

L'invariance de ce tenseur peut-être utilisée pour calculer l'angle ϕ entre $\vec{r_0}$ et un axe de symétrie de l'orbite. Choisissons l'axe des x selon $\vec{r_0}$, nous avons :

$$\vec{r_0} = (r_0, 0)$$
$$\vec{v_0} = (v_0 \cos\alpha \, , v_0 \sin\alpha)$$
$$\bar{\bar{A}}_2 = \frac{m}{2} \begin{bmatrix} \omega^2 r_0^2 + v_0^2 \cos^2\alpha & v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha \\ v_0^2 \cos\omega \sin\alpha & v_0^2 \sin^2\alpha \end{bmatrix}$$
$$E = \frac{m}{2} \left(\omega^2 r_0^2 + v_0^2 \right)$$

L'angle ϕ_1 entre $\vec{r_0}$ et l'axe a est donné par :

$$\tan_1 = \frac{A_{12}}{\lambda_1 - A_{22}}$$

$$= \frac{v_0^{\,2}\sin\alpha\cos\alpha}{\omega^2 a^2 - v_0^{\,2}\sin^2\alpha} = \frac{v_{0r}\, v_0\theta}{\omega^2 a^2 - v_{0\theta}^{\,2}}$$

L'angle ϕ_2 entre $\vec{r_0}$ et l'axe b est donné par des formules analogues. a et b sont donnés par (36). On peut vérifier simplement que le résultat est en accord avec (37). En effet le tenseur de Laplace peut se diagonaliser par une rotation d'angle :

$$\tan 2\phi = \frac{2\,A_{12}}{A_{11} - A_{12}} = \frac{v_0^{\,2}\sin 2\alpha}{\omega^2 r_0^{\,2} + v_0^{\,2}\cos 2\alpha}$$

Enfin l'équation de l'hodographe s'obtient en calculant $\vec{v} \cdot \overline{\overline{A}} \cdot \vec{v}$, et l'angle entre les vecteurs position et vitesse en calculant $\vec{r} \cdot \overline{\overline{A}} \cdot \vec{v}$.

On peut également trouver deux vecteurs invariants de Laplace pour le mouvement harmonique. Ces deux vecteurs devant définir les deux directions privilégiées du plan orbital (axes de symétrie de l'orbite), ils peuvent s'obtenir comme vecteurs propres du tenseur de Laplace, et ont pour expression :

$$\vec{A} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{L} - ka^2\,\vec{r}}{k\sqrt{(a^2 - b^2)\,(r^2 - b^2)}}$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{L} - kb^2\,\vec{r}}{k\sqrt{(a^2 - b^2)\,(a^2 - r^2)}}$$

où, d'après (13) et (35), a^2 et b^2 sont racines de l'équation :

$$X^2 - \frac{2E}{k}\,X + \frac{C^2}{\omega^2} = 0$$

On vérifie aisément que ces deux vecteurs sont invariants dans le temps, qu'ils sont perpendiculaires, que leurs longueurs respectives sont a et b, et qu'ils sont liés au tenseur de Laplace par :

$$\overline{\overline{A}} = \frac{k}{2}\,(\vec{A} \times \vec{A} + \vec{B} \times \vec{B})$$

Ils jouent le même rôle pour le mouvement harmonique que les vecteurs de Laplace et Hamilton pour le mouvement de Képler.

En calculant $\vec{A} \cdot \vec{r}$, on obtient :

$$A\, r \cos\theta = \frac{C^2 - \omega^2 a^2 r^2}{\omega^2 \sqrt{(a^2 - b^2)\,(r^2 - b^2)}}$$

d'où l'équation de l'orbite. L'angle ϕ entre $\vec{r_0}$ et le grand axe de l'orbite s'obtient par : $\tan\phi = \dfrac{A_y}{A_x}$. comme pour le mouvement de Képler.

Les deux vecteurs de Laplace ne sont invariants que pendant des intervalles de temps finis, ils changent en effet brutalement de signe aux sommets de l'orbite. Ainsi $\vec{A} = -\vec{OA}$ pour $x > 0$ et $\vec{A} = +\vec{OA}$ pour $x < 0$. De même, $\vec{B} = +\vec{OB}$ pour $y > 0$ et $\vec{B} = -\vec{OB}$ pour $y < 0$. Cette propriété curieuse est liée au fait que le mouvement est symétrique par rapport à l'origine.

Notons enfin que, dans le problème de Képler, on ne peut construire aucun tenseur invariant d'expression simple à partir des vecteurs invariants de Laplace et de Hamilton.

SYMÉTRIE DYNAMIQUE

On sait que l'invariance du moment cinétique dans le temps est une conséquence directe de l'isotropie du potentiel, c'est-à-dire de son invariance dans le groupe SO_3 des rotations qui conservent le centre attractif. De même l'invariance de l'énergie est une conséquence de l'invariance de U par translation dans le temps. On vérifie ici le théorème de Noether, selon lequel à toute symétrie continue à p paramètres d'un système physique sont associées p constantes du mouvement. Pour le groupe SO_3, $p = 3$ et on a 3 constantes du mouvement, qui sont les 3 composantes du moment cinétique ; pour le groupe de translations dans le temps, $p = 1$ et on a une constante de mouvement, l'énergie.

Les invariants de Laplace apparaissent jusqu'ici comme des invariants dynamiques, c'est-à-dire liés à la forme analytique très particulière du potentiel central U, káplérien ou harmonique, contrairement au moment cinétique et à l'énergie qui sont des invariants géométriques. Nous allons voir cependant que l'existence de ces invariants est susceptible d'une interprétation géométrique.

Pour n = 1 (les état liés étant seuls considérés), il a été démontré par Fock que le groupe de symétrie dynamique de U est le groupe SO_4 des rotations d'un certain espace mathématique à 4 dimensions (espace des phases). Ce groupe est un surgroupe de SO_3, pour lequel p = 6. D'après le théorème de Noether, on peut donc trouver 6 invariants, qui sont les 3 composantes du vecteur moment cinétique et les 3 composantes du vecteur de Laplace : l'énergie s'en déduit par la relation (44). 5 de ces invariants seulement sont indépendants puisque les 2 vecteurs sont perpendiculaires, en accord avec le fait que l'orbite elliptique dépend de 5 paramètres : deux fixent l'orientation de son plan, un troisième l'orientation de sont grand axe dans le plan orbital, un quatrième sa dimension et le cinquième sa forme.

Pour n = –2, considérons d'abord le cas d'un oscillateur à 2 dimensions. Le groupe de symétrie dynamique est alors SU_2 ou groupe spinoriel des rotations à 2 dimensions formé des matrices 2*2 unitaires de déterminant +1. Pour ce groupe, p = 3 : les 3 constantes du mouvement sont les 3 composantes indépendantes du tenseur symétrique $\overset{=}{A}_2$, d'où on déduit les valeurs propres λ_1 et λ_2, et par suite a et b, et le repère propre formé par les axes de symétrie de l'orbite.

Dans le cas d'un oscillateur à 3 dimensions, le groupe de symétrie dynamique est le groupe SU_3, surgroupe de SO_3 formé par les matrices unitaires 3*3 de déterminant +1. Pour ce groupe, p = 8 : les 8 constantes du mouvement sont les 3 composantes du moment cinétique et les 5 composantes indépendantes du tenseur symétrique $\overset{=}{A}$: l'énergie s'en déduit par la relation (49). 5 d'entre elles seulement sont indépendantes puisque : $\overset{=}{A}\,\vec{L} = 0$, en accord avec le fait que l'orbite dépend de 5 paramètres.

En résumé, les deux mouvements elliptiques possèdent une symétrie dynamique supérieure à leur symétrie géométrique. D'où l'existence d'invariants spécifiques, les invariants de Laplace, qui déterminent l'orientation de l'orbite dans son plan. L'existence de ces invariants signifie qu'on peut trouver des directions privilégiées dans le plan orbital, donc que l'orbite est fermée quelles que soient les conditions initiales.

DÉGÉNÉRESCENCE

Pour simplifier, nous supposons que le potentiel, képlérien ou harmonique, est bidimensionnel, ce qui revient à imposer le plan orbital. Comme nous l'avons déjà vu, l'énergie ne dépend que d'un seul paramètre orbital (a, ou $a^2 + b^2$ respectivement) et non de deux. A chaque valeur de l'énergie correspondent donc une infinité simple d'orbites elliptiques : on dit que les deux mouvements sont dégénérés.

Soit un système dynamique dépendant de p degrés de liberté. Si les périodes caractéristiques associées à m (< p) degrés de liberté sont commensurables, on dit que le mouvement est partiellement dégénéré : l'orbite est ouverte. Les deux mouvements elliptiques considérés sont dits complètements dégénérés (m = p = 2) : les périodes radiale et angulaire sont commensurables puisque l'orbite est fermée. On peut démontrer que la dégénérescence de l'énergie en résulte directement.

Évoquons enfin un autre aspect de la dégénérescence. Dans un système à deux degrés de liberté non ou partiellement dégénéré, il existe un seul jeu de variables séparables, c'est-à-dire permettant de découpler les deux équations du mouvement. Si au contraire le mouvement est totalement dégénéré, on peut trouver deux jeux de variables séparables : ce sont les coordonnées polaires et cartésiennes pour le mouvement harmonique, les coordonées polaires et paraboliques pour le mouvement képlérien.

PERTURBATIONS

Dès que le potentiel képlérien ou harmonique est perturbé, la symétrie dynamique disparaît. Si le potentiel perturbateur est de symétrie sphérique, l'orbite reste plane, mais les périodes radiale et angulaire ne sont plus commensurables. Les invariants de Laplace disparaissent : l'orbite n'est plus fermée et peut se décrire comme une ellipse qui précesse lentement dans son plan. Le mouvement n'est plus dégénéré, il est dit pseudo-périodique ou multiplement périodique car r et θ varient périodiquement. Enfin seules les coordonnées polaires constituent un jeu de variables séparables.

Pour un potentiel de Képler perturbé, l'orbite a pour équation approximative :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\gamma\theta}$$

où γ est voisin de 1 (cette équation est exacte pour un potentiel perturbateur de la forme $-\frac{\beta}{r^2}$). La vitesse angulaire de précession de l'orbite est voisine de $\omega\,(1 - \gamma)$. Cette situation se rencontre en astronomie, où le potentiel képlérien agissant sur une planète est perturbé par les termes séculaires dus à la présence des autres planètes ou par les termes relativistes (cas de Mercure).

De même, **pour un potentiel harmonique** perturbé, l'équation approximative de l'orbite est l'équation (4) ou θ est remplacé par $\gamma\theta$ (γ voisin de 1). C'est le cas du pendule sphérique ou d'une bille qui oscille au fond d'un bol sphérique, la perturbation est due à l'anharmonicité (dans le cas du pendule de Foucault, la précession reste faible devant celle qui est provoquée par la force de Coriolis engendrée par la rotation de la Terre).

Considérons encore deux cas particuliers :

– le mouvement de Képler perturbé par une force constante (électron d'un atome hydrogénoïde place dans un champ électrique homogène) n'est plus dégénéré. Seules les coordonnées paraboliques constituent un jeu de variables séparables ;

– il en est de même du mouvement harmonique dans le cas d'une perturbation anisotrope proportionnelle à $x^2 - y^2$. Seules les coordonnées cartésiennes constituent un jeu de variables séparables.

QUANTIFICATIONS DES MOUVEMENTS

Dans la première théorie quantique de Bohr-Sommerfeld-Wilson (BSW), des règles de quantification sont superposées aux lois de la mécanique classique de Newton. Pour un mouvement périodique à une dimension, si q est la variable de position et p le moment conjugué, on quantifie la variable d'action J qui, conformément aux idées d'Ehrenfest, est un invariant adiabatique du mouvement :

$$J = \int p\,dq = n\,h$$

n est un entier positif, h est la constante de Planck et l'intégrale est prise sur une période du mouvement. Pour un mouvement harmonique linéaire, on a : $q = x$, $p = m\, dx/dt$ et :

$$J = \int m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2 <T> P = EP = \frac{E}{\nu}$$

On obtient bien la règle de quantification de Planck : $E = n\, h\, \nu$. Pour un mouvement circulaire uniforme, $q = \theta$, $p = mr^2 d\theta/dt$ et :

$$J = \int m\, r^2 \frac{d\theta}{dt}\, d\theta = L \int d\theta = 2\, \pi\, L$$

On trouve ainsi la règle de quantification de Bohr : $L = nh/2\pi$.

Pour un mouvement périodique plan, deux règles de quantification doivent être introduites :

$$J_r = \int p_r\, dr = n_r h \tag{51}$$

$$J_\theta = \int p_\theta\, dr = n_\theta h \tag{52}$$

J_θ n'étant autre que le moment cinétique, la condition (51) s'écrit aussi :

$$\int \frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 d\theta = \frac{n_r}{n_\theta} \tag{53}$$

(53) est une condition purement géométrique qui sélectionne les orbites stables parmi toutes les orbites classiques, (52) détermine le mouvement sur ces orbites. Cependant les deux mouvements elliptiques sont dégénérés, P_r et P_θ étant commensurables. On peut donc écrire :

$$J_r + J_\theta = \int (p_r\, dr + p_\theta\, d\theta) = n\, h$$

n est un entier et l'intégrale est prise sur la plus petite période P commune aux mouvements radial et angulaire. Or :

$$p_r\, dr + p_\theta\, d\theta = 2\, T\, dt$$

Donc :

$$J_r + J_\theta = \int 2\, T\, dt = 2\, P <T>$$

Pour le mouvement de Képler, $<T> = -E$ et $P = P_r = P_\theta = \frac{2\pi}{\omega}$ d'où :

$$E = -\frac{n\, h\, \omega}{4\pi}$$

avec : $n = n_r + n_\theta$ et, en utilisant la troisième loi de Képler :

$$E = -\frac{2\,\pi^2\,m\,\alpha^2}{n^2\,h^2}$$

Pour le mouvement harmonique, $\langle T \rangle = E$ et $P = 2\,P_r = P_\theta = \frac{2\pi}{\omega}$,

d'où : $E = nh\omega/2\pi$ avec : $n = 2\,n_r + n_\theta$.

On voit que, par suite de la dégénérescence du mouvement classique, les états quantiques sont dégénérés : E dépend du seul nombre quantique n, et non séparément de n_r et n_θ ; à chaque valeur de E correspondent plusieurs orbites. Pour le mouvement de Képler, en combinant les relations : $E = -\frac{\alpha}{2a} = -\frac{n\,h\,\omega}{4\pi}$, $m\omega ab = n_\theta\,h/2\pi$ et la troisième loi de Képler, il vient :

$$\frac{b}{a} = \frac{n_\theta}{n}$$

Ce résultat se retrouve à partir des relations (1) et (53). Pour une énergie donnée, il existe une infinité d'orbites classiques (ayant même valeur de a) mais le nombre des orbites quantiques (déterminées par Sommerfeld) est fini : le degré de dégénérescence g_n vaut $2n + 1$ ($n_\theta = 0,1,...,n$) si on distingue les deux sens de parcours possibles de chaque orbite ; seules certaines valeurs de l'excentricité sont autorisées. $n = n_\theta$ décrit l'orbite circulaire de Bohr, l'orbite $n_\theta = 0$ n'a pas de sens physique (collision avec le centre attractif). De même pour le mouvement harmonique, en combinant les relations :

$E = \frac{1}{2}\,k\left(a^2 + b^2\right) = n\,h\,\omega/2\pi$, $m\omega ab = n_\theta\,h/2\pi$ et $k = m\omega^2$, il vient :

$$\frac{2ab}{a^2 + b^2} = \frac{n_\theta}{n}$$

Pour une énergie donnée, il existe une infinité d'orbites classique (ayant même valeur de $a^2 + b^2$) et un nombre fini d'orbites quantiques : le degré de dégénérescence g_n vaut $n + 1$.

Remarquons que les orbites quantiques n'ont pas de signification physique car elles dépendent du jeu de variables séparables utilisé. Pour le mouvement harmonique, si on utilise les coordonnées cartésiennes, on quantifie séparément les énergies d'oscillation suivant x et y, d'où :

$$E_x = \frac{1}{2} k\, a^2 = n_x\, h\omega/2\,\pi$$

$$E_y = \frac{1}{2} k\, b^2 = n_y\, h\omega/2\,\pi$$

avec : $E = E_x + E_y = n\, h\, \omega/2\,\pi$, $n = n_x + n_y$, et finalement :

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{n_y}{n_x}$$

(on a toujours : $g_n = n + 1$, nombre de partitions de n en deux entiers). De même pour le mouvement de Képler, on obtient en utilisant les coordonnées paraboliques :

$$\frac{1+e}{1-e} = \frac{FA'}{FA} = \frac{n_\xi}{n_\eta} \text{ ou } \frac{n_\eta}{n_\xi}$$

avec : $n = n_\xi + n_\eta$ (on a toujours : $g_n = 2n + 1$). Selon Bohr et Einstein, pour les systèmes dégénérés considérés ici, seule la condition de quantification $J_r + J_\theta = nh$ doit être retenue.

Considérons maintenant l'effet d'une perturbation centrale du potentiel képlérien ou harmonique. Le mouvement classique est alors pseudo-périodique, non dégénéré. Par suite à une valeur donnée de l'énergie ne correspond qu'une seule orbite. Les deux conditions de quantification portant sur J_r et J_θ impliquent que E est une fonction à la fois de n et n_θ : les mouvements quantiques ne sont plus dégénérés. A cette propriété correspond une précession de l'orbite elliptique du mouvement non perturbé, à une vitesse angulaire qui dépend de n_θ. Ainsi si un mouvement képlérien est perturbé par un potentiel de la forme $-\ \beta / r^2$, on obtient :

$$E(n,n_\theta) = -\frac{2\,\pi^2\, m\, \theta^2}{n^2\, h^2}\left[1 + \frac{8\,\pi^2\, m\, \beta}{n\, n_\theta\, h^2}\right]$$

(si la perturbation est due aux effets relativistes, l'énergie est donnée par la formule analogue de Sommerfeld qui interprète la structure fine de l'atome d'hydrogène). Si le mouvement non perturbé est harmonique, on obtient de même :

$$E = \frac{nh\omega}{2\pi} - \frac{2\pi\beta m\omega}{n_\theta h}$$

Si les mouvements képlérien et harmonique sont maintenant examinés dans l'espace à trois dimensions, l'orientation du plan orbital ne peut varier que de manière discrète en raison d'une troisième condition de quantification faisant intervenir le nombre quantique magnétique. Comme à deux dimensions, l'énergie ne dépend que du seul nombre quantique n, et on a : $g_n = n^2$ pour le mouvement képlérien et : $g_n = (n + 1)(n + 2)/2$, nombre de partitions de n en trois entiers, pour le mouvement harmonique.

Les résultats sont analogues en théorie quantique moderne. En l'absence de perturbation, l'équation de Schrödinger est séparable non seulement en coordonnées polaires, mais aussi en coordonnées paraboliques (mouvement képlérien) ou cartésiennes (mouvement harmonique). L'énergie ne dépend que du seul nombre quantique radial n et non du moment angulaire ($L = \ell h/2\pi$, avec la correspondance $n_\theta = \ell - 1$, le degré de dégénérescence des états orbitaux est le même qu'en théorie BSW (les deux théories doivent d'ailleurs s'identifier pour les grands nombres quantiques).

C'est Pauli qui, dès 1926, a mis en évidence la dégénérescence coulombienne de l'atome d'hydrogène en utilisant l'analogue quantique du vecteur de Laplace. Cette dégénérescence est dite essentielle car, contrairement à une dégénérescence accidentelle, elle n'est pas liée à un choix particulier des paramètres du système. Elle disparaît en présence d'une perturbation axiale ou même centrale (cas de l'électron optique des atomes alcalins pour lesquels l'effet d'écran des électrons internes perturbe le potentiel de Képler créé par le noyau).

RÉSUMÉ

Il existe un lien fondamental entre les propriétés suivantes des mouvements képlérien et harmonique :

– l'orbite est fermée (théorème de Bertrand),

– le mouvement est périodique (dégénéré),

– il existe un invariant de Laplace,

– le mouvement possède une symétrie dynamique supérieure à la symétrie géométrique de rotation,

– pour chaque valeur de l'énergie, on peut trouver une infinité d'orbites classiques de formes différentes,

– la séparation des variables a lieu dans plusieurs systèmes de coordonnées,

– les états quantiques sont dégénérés.

CONCLUSION

Les deux mouvements elliptiques ont en commun diverses propriétés de nature géométrique, qui ont été décrites dans la première partie de cet article, et des propriété dynamiques plus fondamentales qui ont été décrites dans la deuxième partie.

La comparaison que nous avons développée peut être exploitée pour introduire de manière qualitative, à partir de deux exemples simples et bien connus, des notions modernes telles que : orbites ouvertes et fermées, théorème de Bertrand, invariants dynamiques, dégénérescence et relation avec la symétrie, systèmes pseudo-périodiques, théorème de Noether, séparations des variables, perturbations, généralement écartées des cours élémentaires.

BIBLIOGRAPHIE

M. BORN - The Mechanics of Atoms, Ungar, New-York (1967).

H. GOLDSTEIN - Classical Mechanics, deuxième édition, Addison-Wesley, Reading (1980).

J. SIVARDIÈRE - Am. J. Phys. 56, 132 (1988) ; 57, 524 (1989) et Eur. J. Phys. 6, 245 (1985) ; 7, 283 (1986) ; 8, 211 (1987) ; 9, 150 (1988) ; 13, 64 (1992).