

Étude et réalisation d'un pendule élastique amorti

par Alain NOURTIER

Enseignement au Service de préparation au CAPES de sciences physiques
Université de Paris-Sud - Centre d'Orsay

Le dispositif décrit dans cet article a été conçu pour la réalisation de deux montages du CAPES externe de sciences physiques :

- étude expérimentale des oscillations libres de translation d'un solide soumis à l'action de ressorts ; influence de l'amortissement,
- étude expérimentale de l'influence de l'amortissement sur un oscillateur mécanique (oscillations forcées exclues).

Il présente deux particularités :

- 1) L'amortissement est produit par courants de Foucault, ce qui rend la force proportionnelle à la vitesse (ce qui est rarement le cas avec les dispositifs à frottement dans un liquide) et le coefficient de frottement contrôlable par simple lecture de l'ampèremètre de l'alimentation de l'électro-aimant.
- 2) La position du mobile est détectée sans contact matériel, par couplage inductif à un solénoïde placé dans un circuit oscillant ; le signal produit par le détecteur est transmis à un enregistreur.

En outre la façon dont le mobile est écarté de sa position d'équilibre permet d'éviter le balancement si agaçant qui affecte souvent ce type de pendule.

Terminé en mai 1990, le dispositif a fonctionné lors de l'oral du CAPES en juin - juillet de façon apparemment satisfaisante. C'est pourquoi il nous a paru utile de le présenter dans ce bulletin (§ 1). Cette présentation est complétée par une mise au point théorique sur le rôle de la masse des ressorts, ici non négligeable (§ 2). Toutefois, au-delà de la description d'un dispositif particulier, ce sont les considérations qui ont guidé sa réalisation que nous nous sommes attachés à développer (§ 3 et 4), afin d'aider les lecteurs qui voudraient réaliser un dispositif analogue à partir de matériel différent (électro-aimant,

ressorts,...) à faire les adaptations nécessaires. Nous sommes naturellement à leur disposition pour toutes précisions supplémentaires.

1. PRÉSENTATION GÉNÉRALE

Le mobile, de masse 530 g, se compose d'une plaque rectangulaire de $20 \times 3 \times 1$ cm et d'un tube mince de 20 cm de long, tous deux en aluminium. La plaque passe entre les pièces polaires, distantes de 2 cm, d'un électro-aimant comportant deux bobines de 1 000 spires et posé sur une planchette de bois. Elle est suspendue par des crochets pivotants à deux ressorts dont la longueur passe de 40 cm à vide à 1 m en charge. Le tube pénètre dans le solénoïde du détecteur de position. En tirant sur un fil attaché au tube et passant dans un œillet, on écarte le mobile de sa position d'équilibre sans le déplacer horizontalement. Les éléments fixes (tringle de suspension, planchette, détecteur, tringle percée), dont la position relative doit pouvoir être ajustée, sont montés sur du profilé Tixit. L'ensemble fait environ 2 m de haut et se fixe au mur ou à une armoire.

Les oscillations libres ont une période $T_0 = 1,57$ s. On obtient l'amortissement critique quand le champ magnétique au centre de l'entrefer vaut 0,19 T, ce qui correspond à une intensité totale à travers les bobines, montées en parallèles, de 2,85 A et une tension de 15 V. Le coefficient de frottement h (tel que $\vec{F}_{\text{frottement}} = -h\vec{v}$) vaut alors $h_c = 4,7 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$. h étant proportionnel au carré du champ, donc de l'intensité, on peut explorer largement le régime surcritique sans dépasser la tension de sécurité de 24 V, ni l'intensité maximale admissible par les bobines. L'alimentation stabilisée dont nous disposons (30 V, 10 A) permet d'atteindre $h = 4 h_c$ de façon permanente et $h = 5 h_c$ si on n'attend pas que les bobines s'échauffent, donc que leur résistance augmente. Pour donner une idée de ce que représente ce frottement, indiquons que le mobile, soumis en permanence, à la seule action de son poids et d'un frottement de coefficient $5 h_c$, tomberait à la vitesse de $22 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$.

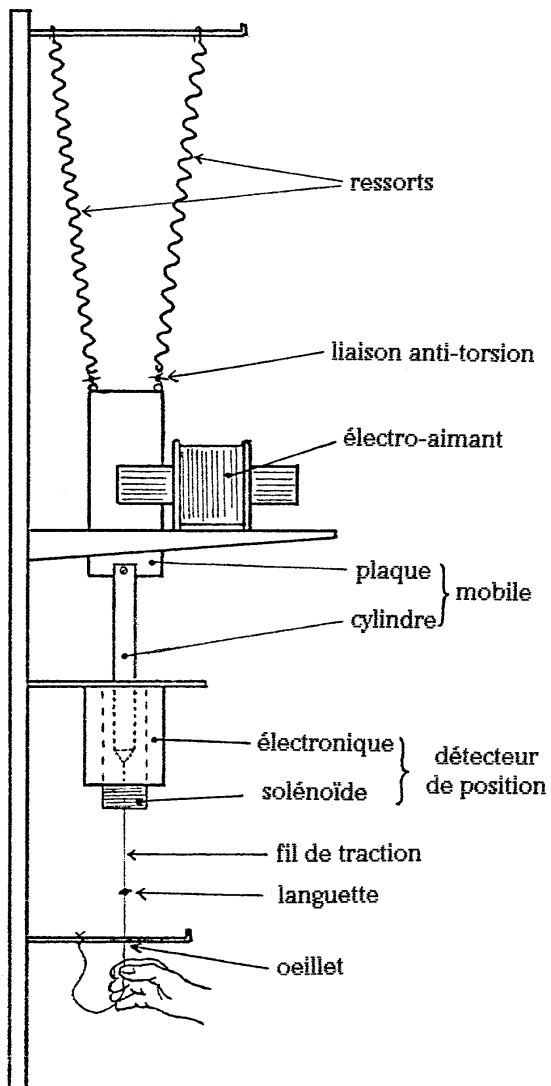


Figure 1

Le solénoïde de détection, qui n'a pas été construit spécialement pour cet usage, n'a qu'une longueur de 12,5 cm et, pour que le signal délivré par le détecteur reste une fonction affine du déplacement, celui-ci doit être assez faible. Une languette nouée au fil de traction limite l'écart initial y_0 à la position d'équilibre à 4 cm, ce qui suffit pour la mise en évidence des différents régimes d'amortissement et des mesures sommaires. Pour des mesures soignées, notamment pour la détermination du décrément logarithmique, il est préférable de réduire y_0 à 2 cm.

La qualité des résultats dépend beaucoup du degré d'immobilité atteint par le système au moment où on lâche le fil de traction. Il faut notamment prendre garde aux deux points suivants :

- 1) Par simple fait d'augmenter ou de diminuer le champ magnétique, on communique une impulsion latérale au mobile, qui se met ainsi à se balancer. En décalant l'axe du tube en aluminium par rapport à celui du solénoïde, ce balancement simule une oscillation verticale d'une période différente de T_0 et d'une amplitude qui peut atteindre le millimètre et fausser la mesure du décrément logarithmique ou la détermination de l'amortissement critique.
- 2) En écartant un peu brutalement le mobile de sa position d'équilibre, on produit dans les ressorts des ondes longitudinales qui peuvent persister après qu'on a lâché le fil et perturber le mouvement du mobile.

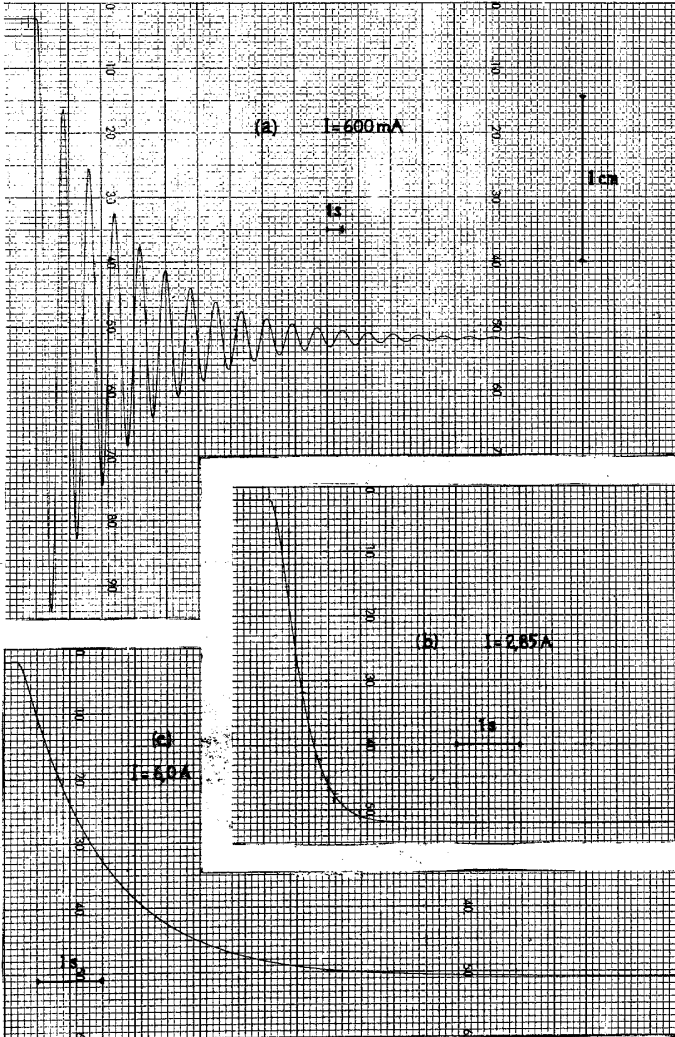
La figure 2 montre le résultat auquel on peut parvenir en procédant avec soin. Les oscillations amorties de la figure 2a ont été obtenues avec une intensité $I = 0,60$ A. On mesure un décrément logarithmique $\delta = 0,315 \pm 0,005$ et, par la relation :

$$\frac{h}{h_c} = \left(1 + \frac{4\pi^2}{\delta^2} \right)^{-1/2}$$

on trouve $h/h_c = 0,050$. Comme h est proportionnel à I^2 , on peut calculer l'intensité correspondant à l'amortissement critique, soit $I_c = 2,7 \pm 0,1$ A. En effectuant différents enregistrements pour des intensités voisines de 2,7 A et en comparant à la courbe théorique :

$$x = x_0 (1 + \omega_0 t) \exp(-\omega_0 t)$$

où $\omega_0 = 2\pi/T_0$ on trouve que le meilleur accord est obtenu pour $I_c = 2,85$ A (figure 2b). Un exemple d'amortissement fortement surcritique ($h = 5 h_c$) apparaît sur une figure 2c.



Figures 2

2. LE RÔLE DE LA MASSE DES RESSORTS

Ayant besoin de ressorts capables de s'allonger beaucoup, nous avons utilisé des ressorts à boudin conçus pour l'observation d'ondes longitudinales, donc lourds (ils sont en laiton). Leur masse représente

24 % de celle du mobile et ne peut donc être négligée. Toutefois, comme on va le voir, cette masse n'est pas suffisamment importante pour modifier de façon perceptible la nature du mouvement du mobile, qui reste celui d'un pendule élastique «simple», mais dont la masse vaudrait :

$$M_{\text{eff}} = M + \frac{m_1 + m_2}{3}$$

où m_1 et m_2 sont les masses des ressorts.

Pour la simplicité de l'explication qui suit, on peut assimiler les deux ressorts à un ressort unique de masse $m = m_1 + m_2$, de raideur $k = k_1 + k_2$ et de longueur à vide $l = l_1 + l_2$. Soit x l'abscisse d'un point du ressort à vide ($0 < x < l$, origine au point d'accrochage) et $u(x,t)$ son déplacement. Posons $\lambda = m/l$ et $\kappa = kl$. La tension du ressort est $T(x,t) = \kappa \partial u / \partial x$. L'équation de la dynamique pour un petit élément de ressort de longueur unité s'écrit :

$$\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda g$$

En $x = 0$, on a évidemment $u(0,t) = 0$. En $x = l$, on écrit l'équation de la dynamique du mobile :

$$M \frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial t^2} = Mg - h \frac{\partial u(l,t)}{\partial t} - T(l,t)$$

Pour résoudre ce système, décomposons :

$$u(x,t) = u_0(x) + u_1(x,t)$$

Le terme indépendant du temps, $u_0(x)$, décrit la configuration d'équilibre :

$$u_0(x) = \frac{g}{k} \left[(M + m) \frac{x}{l} - \frac{m}{2} \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right]$$

On remarque que l'allongement du ressort à l'équilibre :

$$u_0(l) = \frac{g}{k} \left(M + \frac{m}{2} \right)$$

est proportionnel à la masse du mobile augmentée de la *moitié* de la masse des ressorts.

Le terme $u_1(x,t)$, qui représente l'écart à la position d'équilibre, obéit au même système d'équations que $u(x,t)$, excepté que λg et Mg n'y apparaissent pas. En toute généralité, $u_1(x,t)$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de fonctions propres de la forme $f(x) e^{rt}$ où r est complexe. Les valeurs possibles de r sont les solutions de l'équation :

$$r M + h + \sqrt{km} \coth(r \sqrt{m/k}) = 0$$

Elles se divisent en deux catégories, selon que $|r|$ est inférieur ou supérieur à $\omega_f = \pi \sqrt{k/m}$, qui est la pulsation fondamentale de vibration du ressort supposé fixé à ses deux extrémités distantes de l :

1) Cas $|r| < \omega_f$. - Pour $m \ll M$, on obtient, en utilisant le développement à l'origine de $\coth x$:

$$\left(M + \frac{m}{3}\right)r^2 + hr + k = \frac{1}{45} \frac{m^2}{k} r^4 + \dots$$

Le premier membre est le polynôme caractéristique de l'équation différentielle qui régit le mouvement d'un pendule élastique simple de masse $M + m/3$. Ce polynôme peut avoir deux racines complexes (régime sous-critique, avec oscillations amorties), une seule racine (régime critique) ou deux racines réelles (régime surcritique). La série du second membre, dont on n'a écrit que le premier terme, modifie quelque peu ces racines, mais, dans le cas qui nous préoccupe ($m/M = 0,24$), la correction est tout à fait négligeable (ni la pseudo-période, ni le décrétement logarithmique, ni le coefficient de frottement critique ne sont modifiés de plus de 0,2 %).

2) Cas $|r| > \omega_f$. - Pour $m \ll M$, on obtient :

$$r = i n \omega_f - \frac{k}{h + i n \omega_f M} + \dots \quad (n \text{ entier positif})$$

Le mouvement est essentiellement une vibration du ressort, un peu perturbée par la présence du mobile et, en retour, le faisant légèrement osciller.

La façon dont les différents modes propres se combinent pour former le mouvement du mobile dépend des conditions initiales. Si on lâche celui-ci après l'avoir écarté de sa position d'équilibre et avoir attendu que le ressort s'immobilise, la contribution des modes $|r| > \omega_f$ au déplacement du mobile est très faible, inférieure à 0,1 % de l'écart

initial à la position d'équilibre si $m/M = 0,24$. En fin de compte, en ce qui concerne ses propriétés dynamiques, le système peut être assimilé à un pendule élastique simple dont la masse est celle du mobile augmentée du tiers de la masse des ressorts.

On peut retrouver ce facteur un tiers en raisonnant sur l'énergie du système, exprimée en fonction de $y(t) = u_1(l,t)$, écart du mobile à sa position d'équilibre. L'énergie potentielle $\frac{1}{2}ky^2$ et la puissance dissipée $h (dy/dt)^2$ ne dépendent pas des masses. L'énergie cinétique se compose de celle du mobile, $E_{c1} = \frac{1}{2} M (dy/dt)^2$, et de celle du ressort :

$$E_{c2} = \frac{1}{2} \lambda \int_0^l \left(\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx$$

En première approximation, on peut admettre que $u_1(x,t)$ est proportionnel à x (autrement dit, que le ressort a, à tout instant, la configuration qu'il aurait l'équilibre après avoir subi un allongement y), d'où :

$$E_{c2} \approx \frac{1}{2} \frac{m}{3} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2$$

3. CONCEPTION DU MOBILE

Dans l'élaboration du dispositif, notre première préoccupation a concerné l'efficacité de l'amortissement. Quand une plaque conductrice se déplace dans l'entrefer d'un électro-aimant, elle est le siège de courants induits dont la densité \vec{j} est proportionnelle à la norme B du champ magnétique et à la vitesse \vec{v} de la plaque. Considérant la puissance dissipée :

$$P = h v^2 = \frac{1}{\rho} \iiint j^2 dV$$

où ρ est la résistivité et dV l'élément de volume, on en déduit la forme de h :

$$h = C B^2 / \rho$$

où C qui dépend de la forme des lignes de courant, a la dimension d'un volume. C peut être calculé exactement dans le cas d'une plaque infinie et d'un entrefer de section carrée en supposant le champ uniforme dans

l'entrefer et nul ailleurs. Les lignes de courant, qui ont l'allure indiquée sur la figure 3 (les bords de l'entrefer sont en pointillé), sont alors identiques aux équipotentielles d'un système de deux rubans infiniment longs disposés selon les faces d'entrée et de sortie de l'entrefer et portant des charges surfaciques opposées. On trouve $C = V/2$ où V est le volume de conducteur plongé dans le champ (à ne pas confondre avec le volume où circulent des courants).

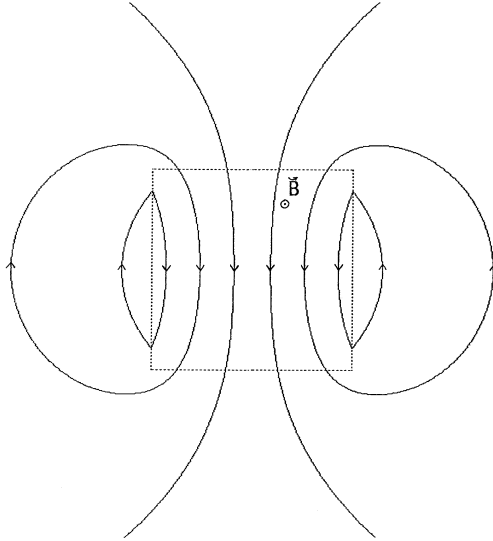


Figure 3

On veut pouvoir explorer les différents régimes d'amortissement, de part et d'autre du régime critique. Celui-ci produit pour $h = h_c = 2 M\omega_0$ (M masse du mobile, $\omega_0 = 2\pi/T_0$), donc pour un champ magnétique :

$$B_c = 1/\omega_0 \rho M/V$$

La masse contenue dans V représente une fraction p de la masse totale du mobile. Notant μ la masse volumique du matériau conducteur, on peut encore écrire :

$$B_c = 2 \sqrt{\omega_0 \rho \mu/p}$$

On atteint d'autant plus facilement le champ B_c que $\rho\mu$ est plus petit. Ceci impose d'emblée l'aluminium ($\rho\mu = 7,7 \cdot 10^{-5}$ S.I.) comme

matériau de la plaque. On a aussi intérêt à avoir p aussi grand que possible. On choisit la largeur de la plaque à peine supérieure à celle des pièces polaires de l'électro-aimant et sa longueur égale à plusieurs fois sa largeur pour pouvoir donner aux oscillations une amplitude convenable. En ne comptant dans V que la région où le champ peut vraiment être considéré comme uniforme, on obtient p de l'ordre de quelques pour-cent (3 % dans notre cas).

Le champ B dans l'entrefer d'un électro-aimant dépend de l'intensité I du courant et de la distance D entre les pièces polaires. Dans les conditions présentes ($L_m/\mu_r \ll D \ll A$, L_m longueur du circuit magnétique, μ_r , perméabilité relative, A largeur des pièces polaires), B est proportionnel à I et inversement proportionnel à D . L'intensité I est limitée, soit par l'échauffement admissible des bobines, soit par les performances de l'alimentation. C'est donc le produit DB_c qu'il s'agit de rendre suffisamment petit.

D doit comprendre l'épaisseur e de la plaque et le jeu d nécessaire pour que celle-ci ne touche pas les pièces polaires. On peut diminuer e , mais on ne gagnerait pas grand'chose à le prendre très inférieur à d . Le jeu d comprend un premier terme proportionnel à la longueur du pendule. En effet, plus celui-ci est long, plus il est susceptible de se balancer et de pivoter. La longueur du pendule est, au minimum, égale à l'allongement ΔL des ressorts sous l'effet du poids du mobile. k désignant la raideur de chaque ressort, on a :

$$\Delta L = Mg/2k = g/\omega_0^2$$

d contient donc un terme proportionnel à $1/\omega_0^2$. Par ailleurs la précision avec laquelle l'expérimentateur est capable de positionner l'électro-aimant par rapport à la plaque est limitée. d contient donc un second terme, indépendant de ω_0 . Finalement le produit DB_c se compose de deux termes, proportionnels l'un à $\omega_0^{1/2}$, l'autre à $\omega_0^{-3/2}$. Il est donc minimum pour une valeur déterminée de ω_0 . Si on tente d'évaluer en pratique la période T_0 correspondante, on trouve plusieurs dizaines de secondes.

Une période longue est évidemment favorable à l'observation et à l'enregistrement du mouvement. Mais de T_0 dépend l'allongement des ressorts, d'après la formule précédente. Ainsi $\Delta L = 25$ cm si $T_0 = 1$ s ; $\Delta L = 2,5$ m si $T_0 = 10$ s. En fin de compte on se trouve limité par l'encombrement du pendule. Si on veut réaliser un dispositif de ce

genre, il faudra donc commencer par fixer cet encombrement. Puis on se procurera des ressorts capables de s'allonger suffisamment sans perdre leur caractère élastique et on déterminera la masse du mobile de façon que l'allongement prenne la valeur prévue. De cette masse dépend l'épaisseur de la plaque, ses autres dimensions étant liées à celles des pièces polaires et à l'amplitude du mouvement, comme indiqué plus haut.

4. DÉTECTION DE LA POSITION

Quand on introduit un tube d'aluminium dans un solénoïde parcouru par un courant alternatif, des courants sont induits dans le tube et l'impédance Z du solénoïde varie (la résistance augmente, l'inductance diminue). On peut aussi faire varier Z en introduisant un matériau ferromagnétique, mais ce type de matériau est beaucoup plus lourd et, comme nous l'on montré des essais préalables, moins efficace pour une masse donnée.

Si le solénoïde est assez long, la variation d'impédance ΔZ est pratiquement proportionnelle à la profondeur de pénétration. On veut transformer ΔZ en une tension continue utilisable par un enregistreur. Il existe différentes façons de le faire, mais il faut tenir compte de la facilité avec laquelle un solénoïde capte les perturbations électromagnétiques environnantes. On peut masquer ce phénomène en utilisant un courant assez fort, mais nous avons préféré éviter d'introduire des composants de puissance dans le montage électronique, n'utilisant comme composants actifs que des amplificateurs opérationnels, ce qui simplifie le problème de l'alimentation.

La solution retenue repose sur le schéma suivant :

- 1) On produit une tension sinusoïdale de fréquence f (quelques kilohertz) et d'amplitude bien définies à l'aide d'un oscillateur à pont de Wien et d'un réducteur de tension, chacun utilisant un amplificateur opérationnel.
- 2) Le solénoïde est disposé en série avec un condensateur ; quand le tube d'aluminium est en dehors du solénoïde, ce circuit résonne à la fréquence f et un montage à amplificateur opérationnel compense sa résistance ; quand le tube pénètre dans le solénoïde, le même montage délivre un signal d'amplitude proportionnelle à $|\Delta Z|$.
- 3) Un filtre actif atténue les signaux de fréquence différente de f (c'est-à-dire les parasites).

4) Le signal est redressé et filtré grossièrement.

Le montage utilise 4 amplificateurs opérationnels (avec leurs potentiomètres d'équilibrage), 6 condensateurs et 14 résistances dont 4 ajustables. Il est décrit en détail dans la notice qui accompagne le dispositif et que nous enverrons volontiers aux lecteurs intéressés.

REMERCIEMENTS

Exprimant à la fois mon sentiment et celui de mes collègues, je remercie vivement Daniel Philippon qui s'est chargé de la réalisation matérielle du dispositif. Par ailleurs cet article n'aurait pas vu le jour sans l'amicale insistance de mes collègues Pierre Fontes et Gérard Torchet, qui ont aussi contribué à son amélioration.