Moment de forces d'inertie distribuées dans un solide

par Jean-Marie NICOLAS
Lycée Jean Moulin, 57600 Forbach

RÉSUMÉ

Après le rappel de la composition des accélérations, du théorème du moment cinétique dans un référentiel non galiléen, de la définition d'une force d'inertie et de son moment, on calcule le moment des forces d'inertie d'entraînement et le moment des forces d'inertie de Coriolis pour un solide en rotation autour d'un point fixe.

Les résultats sont appliqués à la toupie symétrique : on obtient les équations différentielles (du second ordre) du mouvement avec la signification physique de chaque terme.

L'intérêt de l'analyse est d'interpréter ce qui est fascinant dans le mouvement de la toupie :

elle ne tombe pas quand elle tourne.

RAPPEL DE LA COMPOSITION DES ACCÉLÉRATIONS

R est le repère d'origine O, muni de la base orthonormée $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$; R_1 est un autre repère, d'origine O_1, muni de la base orthonormée $\vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1}$.

A un instant donné, le vecteur accélération d'un point P, pour son mouvement dans R est donné par :

$$\vec{\gamma}_R(P) = \vec{\gamma}_e(P) + \vec{\gamma}_c(P) + \vec{\gamma}_{R_1}(P) ,$$

où : $$\vec{\gamma}_e(P) = \vec{\gamma}_R(O_1) + \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_R \wedge \overrightarrow{O_1P} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_1P}\right)$$

est l'accélération d'entraînement du point P à cet instant : c'est l'accélération, pour son mouvement dans R, d'un point fixe dans R_1

coïncidant à cet instant avec le point P ; $\vec{\Omega}$ est le vecteur rotation du repère R_1 par rapport au repère R à cet instant ; $\left(\frac{d...}{dt}\right)_R$ signifie dériver les composantes d'un vecteur qui sont exprimées dans la base associée à R ;

$$\vec{\gamma}_c(P) = 2\,\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{R_1}(P)$$

est l'accélération complémentaire, ou de Coriolis, du point P à cet instant ; $\vec{v}_{R_1}(P)$ est le vecteur vitesse de P pour son mouvement dans R_1 à cet instant ;

$\vec{\gamma}_{R_1}(P)$ est l'accélération de P pour son mouvement dans R_1 à cet instant.

Si O_1 est un point fixe (situons le en 0) on aura :

$$\vec{\gamma}_e(P) = \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_R \wedge \vec{OP} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OP})\ ;$$

$$\vec{\gamma}_c(P) = 2\,\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{R_1}(P)\ ,$$

avec, si on étudie le mouvement d'un solide en rotation autour du point fixe O :

$$\vec{v}_{R_1}(P) = \vec{\omega} \wedge \vec{OP},\ \text{où :}$$

$\vec{\omega}$ est le vecteur rotation du solide pour son mouvement dans R_1.

THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE

$\vec{L}_0$ est le moment cinétique du système au point fixe O, pour le mouvement du système dans le repère R ; si R est galiléen, le théorème est :

$$\left(\frac{d\vec{L}_0}{dt}\right)_R = \vec{M}_0\ ,\ \text{où :}$$

$\vec{M}_0$ est le moment en O des forces extérieures appliquées au système. Pour le mouvement du système dans un repère non galiléen R_1, on montre que le théorème garde la même forme à condition d'ajouter au moment $\vec{M}_0$, les moments des forces d'inertie :

$$\left(\frac{d\vec{L}_{0_1}}{dt}\right)_{R_1} = \vec{M}_0 + \vec{M}_{0_e} + \vec{M}_{0_c}\ ;$$

$\overrightarrow{M}_{0_e}$ est le moment en O des forces d'inertie d'entraînement ;

$\overrightarrow{M}_{0_c}$ est le moment en O des forces d'inertie de Coriolis ;

$\overrightarrow{L}_{0_1}$ est le moment cinétique du système au point fixe O pour son mouvement dans R_1.

MOMENTS DES FORCES D'INERTIE

La force d'inertie est définie par : $-m\,\overrightarrow{\gamma}(P)$, où : m est la masse ponctuelle placée en P et $\overrightarrow{\gamma}$ l'accélération d'entraînement, respectivement de Coriolis du point P ; son moment en O est : $-m\,\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{\gamma}(P)$; pour un système de points matériels, on fera la somme des moments étendue à tous les points du système : $-\sum_i m_i\,\overrightarrow{OP}_i \wedge \overrightarrow{\gamma}(P_i)$; pour un solide S, on étendra cette dernière définition :

$$\overrightarrow{M}_{0_{\text{forces d'inertie}}} = -\iiint_{(S)} \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{\gamma}(P)\,dm.$$

EXPRESSION DU MOMENT EN O DES FORCES D'INERTIE D'ENTRAÎNEMENT

$$\overrightarrow{M}_{0_e} = -\iiint_{(S)} \overrightarrow{OP} \wedge \left[\left(\frac{d\overrightarrow{\Omega}}{dt}\right)_R \wedge \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OP}\right)\right] dm = \overrightarrow{M}_{0_{e_A}} + \overrightarrow{M}_{0_{e_B}}.$$

On allège les notations en écrivant : $\overrightarrow{M}_A = \overrightarrow{M}_{0_{e_A}}$ et $\overrightarrow{M}_B = \overrightarrow{M}_{0_{e_B}}$.

Calcul de $\overrightarrow{M}_A$

$$\overrightarrow{M}_A = -\iiint_{(S)} \overrightarrow{OP} \wedge \left[\left(\frac{d\overrightarrow{\Omega}}{dt}\right)_R \wedge \overrightarrow{OP}\right] dm = [M_A]\left(\frac{d\overrightarrow{\Omega}}{dt}\right)_R, \text{ où :}$$

$[M_A]$ est la matrice de l'application linéaire qui à $\left(\frac{d\overrightarrow{\Omega}}{dt}\right)_R$ associe $\overrightarrow{M}_A$.

On reconnaît, au signe près, l'application linéaire qui a $\overrightarrow{\Omega}$ associe $\overrightarrow{L}_o$, quand $\overrightarrow{\Omega}$ signifie le vecteur rotation du solide. Donc : $[M_A] = -[I]$, où $[I]$ est la matrice d'inertie en O du solide.

Calcul de $\overrightarrow{M}_B$

$$\overrightarrow{M}_B = -\iiint_{(S)} \overrightarrow{OP} \wedge \left[\overrightarrow{\Omega} \wedge (\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OP})\right] dm = -\iiint_{(S)} \overrightarrow{OP} \wedge \left[(\overrightarrow{\Omega} \cdot \overrightarrow{OP})\, \overrightarrow{\Omega} - \Omega^2\, \overrightarrow{OP}\right] dm =$$

$$= -\iiint_{(S)} (\overrightarrow{\Omega} \cdot \overrightarrow{OP})\, \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{\Omega}\, dm = +\iiint_{(S)} (\overrightarrow{\Omega} \cdot \overrightarrow{OP})\, \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OP}\, dm =$$

$= \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{\mu}_B$, où on a posé :

$$\overrightarrow{\mu}_B = \iiint_{(S)} (\overrightarrow{\Omega} \cdot \overrightarrow{OP})\, \overrightarrow{OP}\, dm.$$

Trouvons les coefficients de la matrice de l'application linéaire, notée f, qui à $\overrightarrow{\Omega}$ associe $\overrightarrow{\mu}_B$.

$$f(\overrightarrow{i}) = \iiint_{(S)} (\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{OP})\, \overrightarrow{OP}\, dm = \iiint_{(S)} x\, (x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k})\, dm\ ;$$

on identifie la première colonne de la matrice $[\mu'_B]$ de l'application linéaire :

$$\mu'_{B_{xx}} = \iiint_{(S)} x^2\, dm = \frac{1}{2}\,(I_{yy} + I_{zz} - I_{xx})\ ;$$

$$\mu'_{B_{yx}} = \iiint_{(S)} y\, x\, dm = -\, I_{yx}\ ;$$

$$\mu'_{B_{zx}} = \iiint_{(S)} z\, x\, dm = -\, I_{zx}.$$

(Les coefficients I_{xx} etc. sont ceux de la matrice d'inertie [I]).

$f(\overrightarrow{j})$ fournit les coefficients de la deuxième colonne de $[\mu'_B]$:

$$\mu'_{B_{xy}} = -\, I_{xy} \quad ; \quad \mu'_{B_{yy}} = \frac{1}{2}\,(I_{zz} + I_{xx} - I_{yy}) \quad ; \quad \mu'_{B_{zy}} = -\, I_{zy}.$$

$f(\overrightarrow{k})$ fournit la troisième colonne de $[\mu'_B]$:

$$\mu'_{B_{xz}} = -\, I_{xz} \quad ; \quad \mu'_{B_{yz}} = -\, I_{yz} \quad ; \quad \mu'_{B_{zz}} = \frac{1}{2}\,(I_{xx} + I_{yy} - I_{zz}).$$

EXPRESSION DU MOMENT EN O DES FORCES D'INERTIE DE CORIOLIS

$$\vec{M}_c = -2 \iiint_{(S)} \vec{OP} \wedge \left[\vec{\Omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OP})\right] dm =$$

$$= -2 \iiint_{(S)} \vec{OP} \wedge \left[(\vec{\Omega} \cdot \vec{OP})\, \vec{\omega} - (\vec{\Omega} \cdot \vec{\omega})\, \vec{OP}\right] dm =$$

$$= +2\, \vec{\omega} \wedge \iiint_{(S)} (\vec{\Omega} \cdot \vec{OP})\, \vec{OP}\, dm =$$

$$= 2\, \vec{\omega} \wedge \vec{\mu}_B ,$$

$\vec{\mu}_B$ étant le vecteur qui intervient dans le calcul de $\vec{M}_B$.

APPLICATION À LA TOUPIE DE RÉVOLUTION

La rotation d'un angle ψ autour de $\vec{k}$ ($\vec{k}$ est dirigé selon la verticale ascendante) transforme le repère R (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) en le repère R' (O, $\vec{i_1}$, $\vec{j'}$, $\vec{k}$) ; ($\vec{i_1}$ définit la ligne des nœuds) ;
la rotation d'angle θ autour de $\vec{i_1}$ transforme le repère R' (O, $\vec{i_1}$, $\vec{j'}$, $\vec{k}$) en le repère R_1 (O, $\vec{i_1}$, $\vec{j_1}$, $\vec{k_1}$), $\vec{k_1}$ étant dirigé selon l'axe de symétrie de révolution de la toupie ; (remarquer que : $\vec{k} = \sin\theta\, \vec{j_1} + \cos\theta\, \vec{k_1}$) ;
(la rotation d'angle φ autour de $\vec{k_1}$ transforme le repère R_1 en un repère lié à la toupie).

Vecteur rotation du repère R_1 par rapport à R :

$$\vec{\Omega} = \frac{d\psi}{dt}\vec{k} + \frac{d\theta}{dt}\vec{i_1} =$$

$$= \frac{d\theta}{dt}\vec{i_1} + \frac{d\psi}{dt}\sin\theta\, \vec{j_1} + \frac{d\psi}{dt}\cos\theta\, \vec{k_1} .$$

Vecteur rotation de la toupie pour son mouvement dans R_1 :

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{k_1}.$$

Dans la base $\vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1}$ la matrice d'inertie en O de la toupie est :

$$[I] = \begin{pmatrix} I & O & O \\ O & I & O \\ O & O & J \end{pmatrix}.$$

Dans cette base la matrice de l'application linéaire f est :

$$[\mu'_B] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} J & O & O \\ O & J & O \\ O & O & 2I - J \end{pmatrix}.$$

Moment cinétique de la toupie pour son mouvement dans R_1 :

$$\vec{L_{0_1}} = [I]\,\vec{\omega}\;;$$

la colonne des composantes de $\vec{L_{0_1}}$ dans la base $\vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1}$ est :

$$\begin{pmatrix} L_{0_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O & O \\ O & I & O \\ O & O & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O \\ O \\ \dfrac{d\varphi}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O \\ O \\ J\,\dfrac{d\varphi}{dt} \end{pmatrix}.$$

Moment du poids de la toupie :

position du centre de gravité : $\vec{OG} = a\,\vec{k_1}$;

champ de gravité : $\vec{g} = -\,g\vec{k}$, g étant l'intensité de la gravité ;

$$\vec{M_o} = \vec{OG} \wedge m\vec{g} = a\,\vec{k_1} \wedge (-\,mg\,\vec{k}) = +\,mga\,\vec{k} \wedge \vec{k_1} =$$

$$= mga\,(\sin\theta\,\vec{j_1} + \cos\theta\,\vec{k_1}) \wedge \vec{k_1} = mga\sin\theta\,\vec{j_1} \wedge \vec{k_1} =$$

$$= mga\sin\theta\,\vec{i_1}\,.$$

Moment des forces d'inertie (composantes, en colonnes, dans la base $\vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1}$).

$$\vec{M_A} = -\,[I]\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_R\;;$$

avec :
$$\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_{R_1} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} = \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_{R_1}.$$

D'où :

$$(M_A) = -\begin{pmatrix} I & O & O \\ O & I & O \\ O & O & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{d^2\theta}{dt^2} \\ \dfrac{d^2\psi}{dt^2} \sin\theta + \dfrac{d\psi}{dt}\dfrac{d\theta}{dt}\cos\theta \\ \dfrac{d^2\psi}{dt^2}\cos\theta - \dfrac{d\psi}{dt}\dfrac{d\theta}{dt}\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I\,\dfrac{d^2\theta}{dt^2} \\ -I\left(\dfrac{d^2\psi}{dt^2}\sin\theta + \dfrac{d\psi}{dt}\,\dfrac{d\theta}{dt}\cos\theta\right) \\ -J\left(\dfrac{d^2\psi}{dt^2}\cos\theta - \dfrac{d\psi}{dt}\,\dfrac{d\theta}{dt}\sin\theta\right) \end{pmatrix}.$$

$$(\mu_B) = [\mu'_B]\,\overrightarrow{\Omega} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} J & O & O \\ O & J & O \\ O & O & 2I-J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{d\theta}{dt} \\ \dfrac{d\psi}{dt}\sin\theta \\ \dfrac{d\psi}{dt}\cos\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} J\,\dfrac{d\theta}{dt} \\ J\,\dfrac{d\psi}{dt}\sin\theta \\ (2I-J)\,\dfrac{d\psi}{dt}\cos\theta \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{M}_B = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{\mu}_B \text{ ; on trouve : } (M_B) = \begin{pmatrix} (I-J)\left(\dfrac{d\psi}{dt}\right)^2 \cos\theta\sin\theta \\ -(I-J)\,\dfrac{d\psi}{dt}\,\dfrac{d\theta}{dt}\cos\theta \\ O \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{M}_C = 2\,\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{\mu}_B \text{ ; on trouve : } (M_C) = \begin{pmatrix} -J\,\dfrac{d\psi}{dt}\,\dfrac{d\varphi}{dt}\sin\theta \\ J\,\dfrac{d\theta}{dt}\,\dfrac{d\varphi}{dt} \\ O \end{pmatrix}.$$

Il vient pour les équations du mouvement :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{L}_{o_1}}{dt}\right)_{R_1} = \overrightarrow{M}_o + \overrightarrow{M}_A + \overrightarrow{M}_B + \overrightarrow{M}_C \text{ ;}$$

$$O = mga\sin\theta - I\,\frac{d^2\theta}{dt^2} + (I-J)\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\cos\theta\sin\theta - J\,\frac{d\psi}{dt}\,\frac{d\varphi}{dt}\sin\theta \text{ ;}$$

$$O = -I\left(\frac{d^2\psi}{dt^2}\sin\theta + \frac{d\psi}{dt}\,\frac{d\theta}{dt}\cos\theta\right) - (I-J)\,\frac{d\psi}{dt}\,\frac{d\theta}{dt}\cos\theta + J\,\frac{d\theta}{dt}\,\frac{d\varphi}{dt} \text{ ;}$$

$$J\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\,J\left(\frac{d^2\psi}{dt^2}\cos\theta - \frac{d\psi}{dt}\,\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\right).$$

Considérons la première équation différentielle (celle du second ordre en θ). Elle permet d'interpréter le phénomène qui frappe immédiatement un expérimentateur qui aura lancé une toupie :

<u>La toupie tient sur sa pointe pourvu qu'elle tourne assez vite.</u>

Je dis que cette équation traduit l'équilibre du repère R_1 (dans lequel la toupie tourne autour de son axe de symétrie de révolution) pour la liberté de rotation autour de la ligne des nœuds que possède ce repère R_1 par rapport au repère R.

Ainsi, pour des valeurs de l'angle θ comprises entre 0° et 90°, ces bornes exclues :

– le poids, de moment $+\,mga\sin\theta$, tend à faire basculer la toupie autour de la ligne des nœuds dans le sens de la chute ;

– si $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ est négatif, le moment de la force d'inertie d'entraînement (la part due à la variation dans le temps du vecteur rotation d'entraînement) contribue dans le même sens, ainsi que,

– si I > J, le moment de la force d'inertie centrifuge (la part due à la valeur instantanée du vecteur rotation d'entraînement) ;

– seul le moment de la force d'inertie de Coriolis contrarie la chute de la toupie encore à condition que $\frac{d\psi}{dt}$ et $\frac{d\varphi}{dt}$ aient le même signe ;

– (si I < J, alors la force centrifuge fournit un couple de redressement et on pourra envisager $\frac{d\psi}{dt}$ et $\frac{d\varphi}{dt}$ de signes contraires, le moment de la force d'inertie de Coriolis, alors, agissant dans le sens de la chute).

Considérons une solution particulière du mouvement :

θ = constante comprise entre 0° et 90° , ces bornes exclues, notée θ_0 ;

donc : $\frac{d\theta}{dt} = 0$; $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0.$

$$\frac{d\psi}{dt} = \text{constante notée } \Omega_0 \quad ; \quad \text{donc} : \frac{d^2\psi}{dt^2} = 0.$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \text{constante notée } \omega_0 \quad ; \quad \text{donc} : \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0.$$

Ce mouvement est possible si :

$$mga \sin\theta_0 + (I - J)\,\Omega_0^2 \cos\theta_0 \sin\theta_0 - J\,\Omega_0\,\omega_0 \sin\theta_0 = 0,$$

les deux autres équations étant vérifiées.

Comme θ_0 est non nul, on simplifie par $\sin\theta_0$; il vient en résolvant l'équation du second degré :

$$\Omega_0 = \frac{J\omega_0}{2\,(I - J)\cos\theta_0}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\,(I - J)\,mga\cos\theta_0}{J^2\,\omega_0^2}}\right)$$

On voit que :

pour une vitesse de rotation propre donnée ω_0 (qu'on prendra positive) il y a deux vitesses de précession possibles, une lente et une rapide.

Si $I > J$, les deux valeurs de Ω_0 sont positives («la précession et la rotation propre se font dans le même sens») ; elles existeront si ω_0 dépasse une valeur minimale :

$$\omega_0 \geq \frac{2}{J}\sqrt{(I - J)\,mga\cos\theta_0}$$

Si $I < J$, il n'y a plus de condition sur ω_0 ; les deux valeurs de Ω_0 sont de signes contraires, la négative ayant la plus grande valeur absolue (la précession rapide se fait donc en sens contraire de la rotation propre).