

Un exemple de recherche par le calcul de la répartition des pressions de contact entre deux solides

par Pierre SIMONET - Professeur de Construction Mécanique
et par Abel BOULANGER - Professeur de Mathématiques
Lycée Technique Blaise Pascal, 76100 Rouen

Dans l'article précédent («la répartition des pressions de contact entre deux solides») il a été observé que cette répartition était difficile à connaître et faisant l'objet souvent d'hypothèses non justifiées.

Dans le présent article, on propose une solution théorique dans un cas précis où l'on tient compte seulement des déformations globales et locales des solides en contact.

1. PROBLÈME ÉTUDIÉ

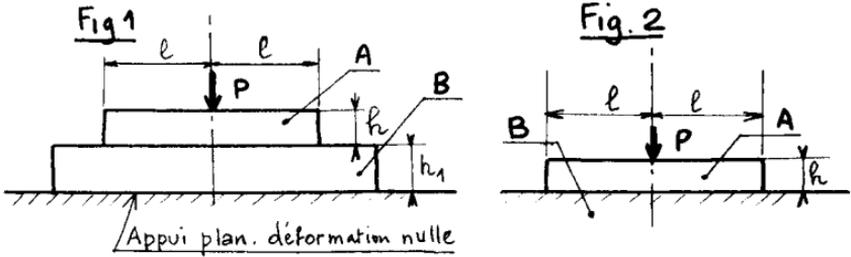
Le solide A de forme parallélépipédique, longueur $2l$, épaisseur h , largeur b , repose sur le solide B.

La charge P , appliquée sur A, est localisée sur une bande étroite de longueur b (répartition uniforme). Sous l'action de P et sous l'action du solide B le solide A se déforme en flexion plane simple.

Le solide B se déforme en compression. Cette déformation peut être définie de deux façons qui conduisent au même calcul théorique :

- soit par une épaisseur h_1 et un module d'élasticité longitudinal E_1 (figure 1).
- soit par un coefficient d'élasticité k si les dimensions de B ne sont pas définies (par exemple solide A reposant sur un sol B). (figure 2).

$$\text{On aura } k = \frac{E_1}{h_1}$$



2. LES HYPOTHÈSES DU CALCUL

Il importe de bien préciser les hypothèses de ce calcul théorique afin de ne pas en utiliser abusivement les résultats dans un problème réel.

1) Les forces de pesanteur sont négligées.

2) Pour la pièce A la seule déformation prise en compte est celle qui résulte de la sollicitation de flexion plane simple. Les hypothèses qui permettent d'utiliser la relation classique :

$$Eiy'' = Mf$$

sont supposées satisfaites. La déformée du plan de contact est supposée indentique à celle du plan neutre de A.

3) On admet que pour la pièce B le déplacement d d'un pt M en contact avec A, sous l'action de la charge P, est proportionnel à la pression de contact p en M.

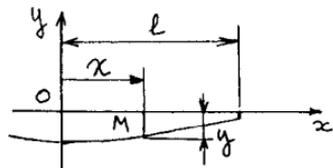
$$p = \frac{E_1}{h_1} d \quad \text{ou} \quad p = kd$$

4) Avant application de la charge P, la surface de contact rectangulaire ($b \times 2l$) est supposée parfaite sur les 2 solides A et B.

3. MISE EN ÉQUATION

– **Choix d'un repère** ($o x y z$)

Le point o est le centre du rectangle de contact avant application de la charge.



– **Ligne déformée**

La surface de contact après déformation est définie par une couche $y = f(x)$ pour x variant de o à l .

Appelons p la pression de contact, $p > 0$

– **Déformation pièce B**

En un point M d'abscisse x on a :

$$p = -\frac{E_1}{h_1} y \quad (1) \quad y < 0$$

– **Déformation pièce A**

$$EI_{GZY}'' = Mz$$

I_{GZ} moment quadratique de la section droite par rapport à l'axe GZ du repère central.

Mz moment de flexion.

$$\text{d'autre part } \frac{d^2 Mz}{dx^2} = .q \text{ densité de charge.}$$

$$q = pb \quad q > 0$$

$$\text{d'où } EI_{GZY}'''' = pb \quad (2)$$

En éliminant p entre (1) et (2) et en écrivant que $I_{GZ} = \frac{bh^3}{12}$ on arrive à :

$$y'''' + \frac{12 E_1}{E h^3 h_1} y = 0$$

La solution de cette équation différentielle du 4^e ordre doit satisfaire aux 4 conditions suivantes :

1) Pour $x = 0$ la tangente à la courbe $y = f(x)$ est parallèle à Ox
 $y'(0) = 0$

2) Pour $x = 0$ le moment de flexion peut s'exprimer :

$$EI_{GZY}''(0) = \int_0^1 xpb \, dx$$

$$\text{Ce qui s'écrit } y''(0) = -\frac{12 E_1}{E h^3 h_1} \int_0^1 xy \, dx$$

3) Pour $x = l$ le moment de flexion est nul.

$$y''(l) = 0$$

4) La pièce A est en équilibre : $\frac{P}{2} = \int_0^1 pb \, dx$

$$\text{soit } \frac{P}{2} = \frac{E_1 b}{h_1} \int_0^1 -y \, dx$$

4. SOLUTION MATHÉMATIQUE

Le professeur de mathématiques a calculé la fonction numérique y de la variable réelle x .

Ce long calcul n'est pas reproduit ici.

En voici les résultats :

$$\text{On pose } a = \frac{12 E_1}{Eh^3 h_1} \quad \left(\text{ou } a = \frac{12 k}{Eh^3} \right)$$

$$\text{avec } \mu = \frac{\sqrt{2}}{2} a^{0,25} \text{ et } K = -\frac{P}{b} \frac{\mu h_1}{8 E_1 (\sin 2\mu l + \text{sh } 2\mu l)}$$

On a la relation :

$$y(x) = 8K [\text{ch}^2 \mu l (\text{ch } \mu x \cos \mu x - \text{sh } \mu x \sin \mu x) + \cos^2 \mu l (\text{ch } \mu x \cos \mu x + \text{sh } \mu x \sin \mu x) + (\text{sh } \mu l \text{ch } \mu l + \sin \mu l \cos \mu l) (\sin \mu x \text{ch } \mu x - \cos \mu x \text{sh } \mu x)]$$

5. PRÉCAUTION IMPORTANTE

Les résultats mathématiques ne sont valables que si $y < 0$.

En effet si $y > 0$, il n'y a plus contact et les formules établies sont inapplicables. Donc dans une application numérique il faut s'assurer que la longueur l intervenant dans le calcul est inférieure à la longueur maximale de contact l_c .

6. EXPLOITATION DU RÉSULTAT MATHÉMATIQUE

A l'aide d'une calculette on peut faire rapidement quelques applications numériques en calculant seulement les valeurs de la pression maxi (pour $x = 0$) et de la pression mini (pour $x = l$).

On établit aisément à partir de la relation générale $y = f(x)$ que :

$$y(0) = 8K (\text{ch}^2 \mu l + \cos^2 \mu l)$$

$$y(l) = 16 K \text{ch} \mu l \cos \mu l$$

Cette dernière expression, très simple, permet de répondre facilement à la condition du paragraphe 5.

Pour avoir $y(l) < 0$ il faut $\cos \mu l > 0$

$$\text{donc } \mu l < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{d'où longueur maxi de contact } l_c = \frac{\pi}{2 \mu}$$

7. QUELQUES EXEMPLES

La feuille de calculs jointe donne 5 exemples. Le lecteur intéressé pourra en traiter d'autres. Les calculs ont été faits sans précision et comportent peut être des erreurs. Voici quelques remarques à propos de chaque cas.

1) A et B en acier. Pièce A faible épaisseur (10 mm) le résultat intéressant est que la longueur maxi de contact l_c est très faible : ($2 l_c = 44,4$ mm).

Si la pièce A réelle a une longueur de 100 mm par exemple on voit combien l'hypothèse d'une répartition uniforme des pressions est fautive.

2) On a augmenté h et h_1 . Malgré cela la longueur l_c est encore faible.

3) La pièce B est faite d'un matériau tel que $E_1 = 10^3 \text{ N mm}^{-2}$ (matière plastique par exemple), l_c est nettement plus important.

4) Mêmes données que pour le cas précédent mais on a augmenté fortement l'épaisseur h de la pièce A qui devient très rigide. La répartition des pressions est sensiblement uniforme si $l < l_c$.

5) La pièce B dans ce dernier cas est, par exemple, un «sol» qui s'affaisse de 10 mm sous une pression de $0,1 \text{ N mm}^{-2}$. Les grandeurs E_1 et h_1 sont donc remplacées par un coefficient d'élasticité supposé constant.

$$k = \left| \frac{\Delta p}{\Delta y} \right| = \frac{0,1}{10} = 10^{-2} \text{ Nmm}^{-3}$$

La pièce A est déformable ($h = 10$).

La longueur maxi de contact est importante.

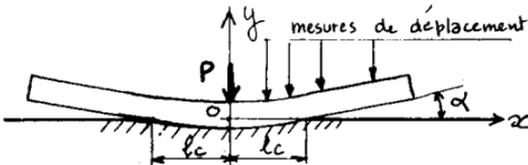
8. ESSAIS POSSIBLES

Afin de savoir si l'expérience confirme ou non les calculs théoriques on peut envisager de faire des essais et des mesures pratiques, par exemple.

8.1. Photoélasticité

Par ce moyen on doit pouvoir localiser la zone de contact et vérifier si la valeur théorique de l_c est confirmée en pratique dans différents cas.

8.2. Métrologie



A l'aide d'un comparateur on mesure le déplacement des points de la face supérieure de la pièce A sous l'action de la charge P. De cette façon on peut déterminer expérimentalement le tracé de $y = f(x)$ et comparer avec la courbe théorique.

Comme le montre le schéma on peut rendre l'expérience plus complète en utilisant une pièce A de longueur $2l > 2l_c$ et faire des mesures sur la portion non déformée de A (non en contact avec B). Ceci permettrait de vérifier si la valeur de $y'(l)$ (non mentionnée dans cet article) correspond bien à l'angle α mesuré. (On a en effet $\text{tg}\alpha = y'(l)$) et de mesurer la valeur expérimentale de l_c avec plus de précision.

8.3. Moyens informatiques

La méthode de calcul dite «des éléments finis» peut être utilisée.

FEUILLE DE CALCULS

Coeffic. d'élastic. B	k	Nmm ⁻³					10 ⁻²
Module élast. long. B	E ₁	Nmm ⁻²	210 ⁵	"	10 ³	"	"
Module élast. long. A	E	Nmm ⁻²	210 ⁵	"	"	"	"
Épaisseur A	h	mm	10	30	"	60	10
Épaisseur B	h ₁	mm	120	240	"	"	"
Coefficient	a	mm ⁻⁴	10 ⁻⁴	1,8510 ⁻²	9,210 ⁻⁹	1110 ⁻¹⁰	610 ⁻¹⁰
Coefficient	μ	mm ⁻¹	0,05√2	0,026	0,0069	0,0041	0,0035
Longeur maxi contact	lc	mm	22,2	60,4	226,5	383	449
Longeur A	l	mm	20	60	226	100	400
Coefficient	μl	sans un	√2	1,56	1,56	0,41	1,4
Charge par unité de larg.	P/b	Nmm ⁻¹	1000	"	"	"	100
Coefficient	K	mm	-6,0710 ⁻⁴	-3,410 ⁻⁴	-1,910 ⁻²	-7,4710 ⁻²	-0,513
Flèche au centre	y(o)	mm	-2,310 ⁻²	1,6810 ⁻²	-0,93	-1,2	-19,12
Flèche à l'extrémité	y(l)	mm	-3,310 ⁻³	1,410 ⁻⁴	-0,008	-1,18	-3
Pression de contact maxi	p(o)	Nmm ⁻²	38,5	14	3,9	≈ 5	0,19
Pression de contact mini	p(l)	Nmm ⁻²	7,6	≈ 0	≈ 0	≈ 5	0,03
Pression moyenne	pm	Nmm ⁻²	25	8,3	2,21	5	0,125
GRANDEURS DONNÉES ET CALCULÉES	NOT.	UNITÉS	1	2	3	4	5

GRANDEURS DONNÉES : E₁, h₁, $\left(\text{ou } k = \frac{E_1}{h_1} \right)$, E, h, l, P/b.

GRANDEURS CALCULÉES :

$$a = \frac{12 E_1}{E h_3 h_1} \quad \text{ou} \quad a = \frac{12 k}{E h^3} \quad \mu = \frac{\sqrt{2}}{2} a^{0,25}$$

$$lc = \frac{\pi}{2\mu} \quad K = \frac{P}{b} \frac{\mu h_1}{8 E_1 (\sin 2\mu l + \text{sh } 2\mu l)} \quad \text{ou} \quad - \frac{P}{b} \frac{\mu}{8k (\sin 2\mu l + \text{sh } 2\mu l)}$$

$$y(o) = 8K (\text{ch}^2 \mu l + \cos^2 \mu l) \quad y(l) = 16 K \text{ch } \mu l \cos \mu l$$

$$p(o) = \left| \frac{E_1}{h_1} y(o) \right| \quad \text{ou} \quad \left| ky(o) \right| \quad p(l) = \left| \frac{E_1}{h_1} y(l) \right| \quad \text{ou} \quad \left| ky(l) \right| \quad pm = \frac{P}{b \times 2l}$$