

La répartition des pressions de contact entre solides

par Pierre SIMONET

Professeur de Construction Mécanique
Lycée Technique Blaise Pascal, 76100 Rouen

Cet article a pour objet de rappeler combien il est difficile de connaître la répartition des pressions de contact entre deux corps réels, et de proposer quelques idées pour guider la recherche de solutions plausibles.

1. PRÉSENTATION DE L'ENSEMBLE DES PROBLÈMES

Deux objets 1 et 2 sont en contact par l'intermédiaire des portions de surfaces réelles S_1 pour l'objet 1 et S_2 pour l'objet 2.

S_1 et S_2 ont toutes les deux pour modèle mathématique la même portion de surface S . Les écarts entre S_1 et S d'une part, S_2 et S d'autre part, qui traduisent la non coïncidence de S_1 et S_2 sont dus à :

- des défauts de forme
- des défauts de position, éventuellement
- des défauts microgéométriques.

Ces défauts empêchent, a priori, les deux pièces d'être en contact sur toute l'étendue de S , le contact peut même être localisé à une ou plusieurs zones quasi-ponctuelles.

Par l'intermédiaire de S , ou plutôt des zones réellement en contact, l'objet 1 transmet à l'objet 2 une action mécanique (a.m.). Nous admettrons que le torseur de cette a.m. est connu.

Si le torseur est connu, la répartition des a.m. de contact aux différents points des zones de contact est inconnue et difficile à connaître.

Or, en construction mécanique, la pression de contact doit être inférieure à une pression maxi admissible qui dépend des matériaux constituant 1 et 2 et du rôle de la liaison L 12 (par exemple liaison fixe ou mobile).

Afin de vérifier si cette condition est bien remplie on est amené à faire des hypothèses sur la répartition des pressions de contact. Nous examinerons plus loin les hypothèses que l'on fait couramment et nous verrons qu'elles ne sont pas toujours satisfaisantes.

Les matériaux constituant 1 et 2 peuvent être très peu déformables (aciers), plus déformables, ou très déformables (élastomères) mais les considérations précédentes restent valables.

Les mécanismes ne sont en définitive, que des pièces liées entre elles.

A chaque liaison il y a des pressions de contact qu'il faudrait connaître. C'est dire que le sujet qui nous occupe est vaste et divers.

2. FACTEURS POUVANT INTERVENIR DANS LA RÉPARTITION DES PRESSIONS DE CONTACT

Ils sont très nombreux et la hiérarchie de leur importance est très variable d'un cas à l'autre. On peut citer :

1. La nature, l'importance, et la variation du torseur de l'a.m. transmise.
2. L'absence de mouvement ou les caractéristiques du mouvement 1/2.
3. La géométrie de la surface théorique de contact : forme, grandeur...
4. Les caractéristiques des matériaux constituant 1 et 2.
5. Les défauts microgéométriques, de forme, de position, des surfaces réelles.
6. Les déformations locales, élastiques ou non.
7. L'usure locale des pièces.
8. Les déformations globales des pièces 1 et 2, élastiques ou non.
9. La lubrification.
10. Variations de température : dilatations, etc...

3. 4. 5. : Si l'une des pièces est très déformable (élastomère, tissu...) la coïncidence des surfaces est assurée sans difficulté. Par contre s'il s'agit d'un axe en acier de diamètre 20 mm dans un alésage en bronze de diamètre 20,5 mm, on imagine mal la possibilité d'avoir une répartition des pressions sur une grande surface de contact.

3. 6. : Si le contact théorique est linéique ou ponctuel c'est la déformation locale qui permet d'avoir une surface de contact finie suffisante et une pression acceptable (formules de Hertz).

3. L'AUTO-ÉLIMINATION DE CERTAINS DÉFAUTS

Au moment où les surfaces réelles S_1 et S_2 entrent en contact, les zones réelles de contact peuvent être très limitées à cause des défauts microgéométriques, de forme, et de position si ces derniers interviennent ce qui est le cas lorsque le positionnement 1/2 est réalisé par d'autres surfaces que S_1 et S_2 (réalisations hyperstatiques).

Les pressions locales de contact peuvent donc être très élevées.

Si l'il s'agit d'un contact mobile il se produira une usure rapide.

Si l'il s'agit d'un contact fixe il pourra se produire des déformations locales ou globales (ou les deux). Dans les deux cas les zones de contact vont s'agrandir et les pressions locales diminuer.

Dans ce qui suit (sauf 5) nous supposons que les défauts microgéométriques, de forme, et de position, sont négligeables et qu'en l'absence d'effort transmis les surfaces S_1 et S_2 coïncident. Ce résultat pouvant être dû, soit à des précautions initiales (État de surface, tolérancement de forme et de position) soit à l'auto-élimination.

Un procédé tel que le rodage est en définitive une auto-élimination provoquée et contrôlée.

L'emploi d'antifrictions plastiques favorise l'auto-élimination.

4. LES HYPOTHÈSES HABITUELLES SUR LA RÉPARTITION DES PRESSIONS DE CONTACT

Si l'on cherche dans les livres scolaires de construction et de technologies de construction et fabrications, on constate que ces questions sont peu abordées. Elles sont mêmes parfois tout à fait absentes. Si des répartitions de pression sont indiquées elles ne sont pas, sauf exception, justifiées. L'hypothèse qui est souvent proposée est celle de la répartition uniforme. C'est d'une grande simplicité mais c'est dangereux car, à partir de cette hypothèse on calcule une pression de contact qui est nécessairement inférieure à la pression réelle. Quand on adopte cette hypothèse il faudrait au moins évaluer l'erreur commise et majorer la pression calculée pour la comparer à la pression maxi admissible.

Si la pression uniforme ne peut pas être retenue, alors on admet une variation linéaire de la pression qui n'est pas plus justifiée en général.

Parfois aussi on découvre un moyen permettant de mieux connaître la répartition réelle et c'est évidemment préférable.

Rappelons quelques calculs classiques.

4.1. La clavette parallèle

Cet exemple est étonnant. Pour calculer la longueur de la clavette on se préoccupe de la pression de contact entre arbre et clavette d'une part, et moyeu et clavette d'autre part, et on fait l'hypothèse classique d'une répartition uniforme de la pression. Or l'étude de l'équilibre de la clavette condamne sans appel cette hypothèse. On peut montrer que la pression réelle est au moins quatre fois plus grande que la pression moyenne calculée avec la mauvaise hypothèse.

4.2. Contact plan avec action mécanique localisée et centrée

La figure 1 montre le schéma d'une pièce 1 en appui plan sur une pièce 2 et soumise en son centre à une force normale $\vec{P}$. La répartition uniforme des pressions est très généralement admise. Rien ne permet de la justifier.

Si la pièce 2 est supposée indéformable, si la pièce 1 est suffisamment haute pour être assimilée à une poutre soumise à la compression simple, alors on pourra considérer que la répartition des contraintes normales dans la section droite de la poutre 1, voisine de la surface de contact, est uniforme, et par conséquent admettre une répartition uniforme des pressions de contact.

Mais dans le cas de la figure 1, si la pièce 1 est relativement mince la pression de contact sera probablement beaucoup plus grande au centre de la surface de contact.

4.3. Contact plan avec a.m. non centrée

La figure 2 indique que le torseur des a.m. transmises 1/2 a pour éléments de réduction au centre G de la surface rectangulaire S de contact :

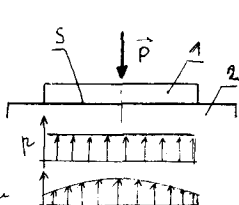


Figure 1

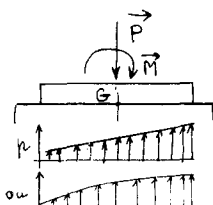


Figure 2

- Une résultante $\vec{P}$
- Un moment de vecteur $\vec{M}$ parallèle à un axe de symétrie de S.

Cette fois une répartition uniforme des pressions n'est pas possible.

On admet donc une répartition linéaire des pressions. Celle-ci est la même que la répartition des contraintes normales de compression dans la section droite d'une poutre 1 soumise à une sollicitation composée flexion-compression.

Pour que cette hypothèse de répartition soit plausible il faudrait que les hypothèses de la théorie des poutres en R de M soient vérifiées pour la pièce 1. C'est rarement le cas.

Cette hypothèse peu justifiée est cependant retenue, par exemple, dans les calculs simples qui permettent d'installer correctement un appareil sur son massif de fondation (dimensions de la semelle, pressions acceptables, boulons de scellements etc...). Il est possible que dans la majorité des cas la répartition réelle des pressions ne soit pas trop différente de la répartition linéaire.

4.4. Cas des freins, embrayages, etc...

Dans un calcul rapide on fait souvent l'hypothèse d'une répartition uniforme. Dans une étude plus poussée on peut analyser de quelle façon l'usure se produit : l'usure en un point est proportionnelle à la vitesse de glissement et à la pression.

Pour certains freins à mâchoires la vitesse est la même en tous points mais l'usure est variable (rotation de la mâchoire autour d'un axe).

Pour un embrayage d'automobile c'est l'usure qui est la même en tous points mais les vitesses diffèrent.

Dans les deux cas on peut déterminer une répartition des pressions non uniforme, assez bien justifiée et probablement conforme à la réalité.

4.5. Arbre et bague figure 3

Admettons que l'a.m. transmise est un glisseur de norme F dont le droit d'action, perpendiculaire à l'axe de rotation, passe par le centre de la liaison.

A partir de l'hypothèse d'une répartition uniforme des pressions sur un demi-cylindre de diamètre d et de longueur l, on calcule une pression

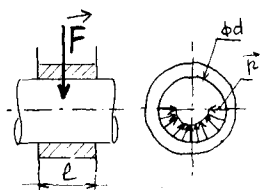


Figure 3

dite diamétrale $p = \frac{F}{ld}$ qui doit rester inférieure à une pression maxi admissible. L'hypothèse est évidemment fausse : on n'imagine même pas un seul cas où la répartition des pressions pourrait être celle proposée.

Curieusement dès qu'il s'agit de calculer le couple de frottement on abandonne cette hypothèse au profit d'une autre (contact quasi-linéique) ce qui permet d'établir la relation : $M_f = F d/2 \operatorname{tg} \varphi$. Avec la première hypothèse on aboutit à une expression du couple de frottement différente.

Les paliers lisses fonctionnant avec film d'huile permanent ont fait l'objet d'études et d'essais multiples qui ont permis de connaître la répartition des pressions de contact.

4.6. Emmanchements forcés, cylindriques, coniques, prismatiques

A partir des déformations globales et des contraintes dans les pièces assemblées on peut en principe connaître, dans un certain nombre de cas du moins, la répartition et la valeur des pressions de contact.

Par exemple dans le cas d'une bague d'épaisseur constante emmanchée à force sur une portée cylindrique les pressions de contact sont uniformément réparties et la pression de contact peut être calculée à partir des formules de Lamé en particulier. Si l'épaisseur de la bague n'est pas constante, la répartition n'est plus uniforme le long d'une génératrice.

Dans ces assemblages par frettage la pression de contact élevée permet la transmission d'un effort axial ou d'un couple important. A ce propos le précis de construction Mécanique-AFNOR - NATHAN Tome 3 et un récent article de D. SPENLE dans le bulletin n° 26 de l'A.P.T.E.P. montrent l'importance du facteur «défauts géométriques» dans ce type de liaison complète, où tout repose sur l'importance et la répartition des pressions de contact.

4.7. Contacts non surfaciques

Dans ce cas, nous l'avons déjà rappelé, c'est l'étude des déformations et contraintes locales qui permet de connaître l'étendue de la surface réelle de contact et la répartition des pressions (Form. de Hertz).

5. APPLICATION DES FORMULES DE HERTZ AUX CONTACTS... SURFACIQUES.

Dans le cas d'un contact sphère/plan (acier/acier) les formules de Hertz donnent des relations entre la pression maxi p , le rayon a de la calotte sphérique de contact, le rayon R de la sphère et l'effort normal P . Voir figure 4a.

– Les expressions $a = 0,019 (PR)^{1/3}$ et $p = 1330 \left(\frac{P}{R^2} \right)^{1/3}$ sont extraites du Tome 3 «construction mécanique AFNOR - NATHAN»

– L'expression $p = 1,5 \frac{P}{\pi a^2}$ est extraite de «Éléments de projets» de Mrs Geminard et Cros La Faige, et vérifie sensiblement les 2 expressions précédentes.

On doit pouvoir appliquer ces relations au contact plan avec effort centré (voir § 4.2) à condition de considérer que la surface S_2 est plane rigoureusement, et que la surface S_1 est en réalité une sphère de rayon $R = 5.10^5$ mm (ce qui correspond à une défaut de planéité $d = 0,01$ mm pour une surface circulaire de contact de rayon 100 mm : on a $d \times 2R = 1002$). L'application numérique avec $P = 3.10^5$ N donne :

$$a = 0,019 (3.10^5 \times 5.10^5)^{1/3} = 100 \text{ mm} \quad (\text{voir figure 4b})$$

On a donc contact sur toute la surface avec une pression maxi égale à $p = 1,5 \times \frac{3.10^5}{\pi \times 100^2} = 14,3 \text{ N/mm}^2$. La pression moyenne étant $p_m = \frac{3.10^5}{\pi \times 100^2} = 9,5 \text{ N/mm}^2$.

Si on refait le calcul avec $P = 10^5$ N on a alors $a = 0,019 (10^5 \times 5.10^5)^{1/3} = 70 \text{ mm}$. (Voir figure 4c).

On a contact sur une partie seulement de S . Pression maxi $p = 1,5 \frac{10^5}{\pi \times 70^2} = 9,7 \text{ N/mm}^2$, la pression moyenne calculée avec l'hypothèse de la répartition uniforme étant $p_m = \frac{10^5}{\pi \times 100^2} = 3,2 \text{ N/mm}^2$.

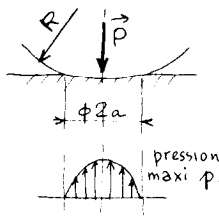


Figure 4a

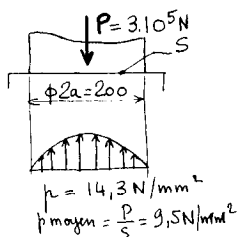


Figure 4b

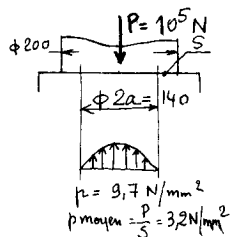


Figure 4c

Les formules de Hertz ne prennent en compte que les déformations locales. L'une des hypothèses à vérifier pour appliquer ces formules, comme nous le faisons, est que les déformations globales des pièces 1 et 2 sont nulles ou négligeables.

L'application inattendue des formules de Hertz à des contacts surfaciques est peut être riche de possibilités, si toutefois elle n'est pas condamnable sur le plan théorique (il faut vérifier ce point). Par ce moyen on pourrait établir des relations intéressantes entre la répartition des pressions et les défauts de forme, et montrer ainsi l'importance de ceux-ci.

Dans le cas du contact cylindrique arbre-bague (voir § 4.5.) on devrait pouvoir évaluer, de la même façon, la surface réelle de contact et la pression maxi et mettre en évidence l'importance considérable du jeu (différence des diamètres des surfaces cylindriques).

6. RÉCAPITULATION

Les exemples rappelés, et d'autres que l'on doit trouver dans des ouvrages spécialisés, montrent que :

1) On fait souvent des hypothèses simplistes, injustifiées et parfois dangereuses sur la répartition des pressions de contact. La plus courante est d'admettre une répartition linéaire des pressions, l'étude de l'équilibre des pièces permettant de calculer alors la pression maximum. Avec des liaisons hyperstatiques et par conséquent des difficultés pour connaître exactement le torseur des a.m. transmises on admet une répartition uniforme.

2) Dans un certain nombre de cas on peut justifier une répartition des pressions de contact plus conforme à la réalité en partant des éléments suivants :

- a. Équilibre des pièces. C'est élémentaire mais il ne faut pas l'oublier.
- b. Contraintes et déformations locales, élastiques ou non.
- c. Déformation globales élastiques ou non.
- d. Phénomène d'usure et conditions dans lesquelles il se produit.
- e. Hypothèses sur les défauts de forme.

Il est bien certain que la répartition réelle des pressions de contact est impossible à connaître. Cependant chaque cas devrait être analysé de façon à adopter une hypothèse raisonnable et évaluer ainsi la pression maxi sans commettre une trop grossière erreur.

7. QUELQUES AUTRES OBSERVATIONS ET IDÉES

Dans les exemples qui suivent on a cherché à utiliser les déformations globales des pièces pour trouver la répartition possible des pressions de contact.

7.1. Contact plan avec a.m. centrée

Reprenons l'exemple déjà cité (§ 4.2.), où l'on fait généralement l'hypothèse d'une répartition uniforme. Supposons que les pièces 1 et 2 puissent être modélisées par des «poutres» sollicitées en flexion plane simple selon la figure 5. Cette étude conduit à une impasse.

Les déformées de 1 et 2 ne peuvent en aucun cas être identiques et l'action de P provoque le décollement des surfaces initialement en contact.

On aboutit à un contact très localisé probablement aux extrémités de la pièce 1. Mais en définitive il ne s'agit pas d'un essai pour rien : on a bel et bien montré que dans le cas où les pièces 1 et 2 se déforment en flexion, non seulement l'hypothèse de répartition uniforme est fausse, mais de plus il y a décollement des surfaces en contact.

7.2. Contact plan avec a.m. centrée

Toujours le même exemple (§ 4.2.). Mais cette fois on considère que la pièce 1 se déforme en flexion et la pièce 2 en compression (avec des hypothèses simplificatrices). On doit dans ce cas aboutir à des résultats théoriques précis sur la répartition des pressions. Voir figure 6.

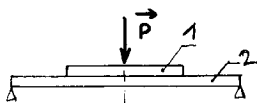


Figure 5

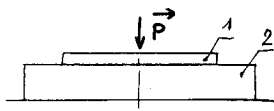


Figure 6

Si mon collègue professeur de mathématiques, et moi-même, parvenons à terminer cette étude... nous y consacrerons un autre article.

7.3. Goupille de liaison.

Soit une goupille cylindrique (ou conique) montée sans jeu et assurant la liaison complète d'un moyeu sur un arbre. Voir figure 7.

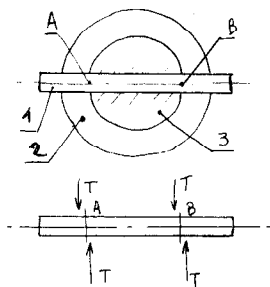


Figure 7



Figure 8

Comment se répartissent les pressions aux contacts 1/2 et 1/3, et quelles sont, en conséquence, les sollicitations de la goupille ?

Je propose le raisonnement suivant, très contesté par l'un des mes collègues :

Les déformations globales des pièces 2 et 3 sont négligeables, donc la goupille, globalement, ne peut pas se déformer. En particulier, étant donné sa faible section, elle n'est pratiquement pas soumise à la flexion sinon son axe serait courbé. Donc la goupille est sollicitée par des efforts localisés près des sections A et B. Les pressions de contact sont élevées à ces endroits et faibles ailleurs. En bref la sollicitation de la goupille est proche du cisaillement simple.

7.4. Liaison pivot par surfaces cylindriques voir figure 8

Prenons l'exemple d'une liaison pivot réalisée de façon hyperstatique par 1 pivot et 1 pivot glissant. Sans pousser l'analyse, remarquons brièvement qu'il est contradictoire d'admettre simultanément :

- que l'arbre fléchit mais que les jeux permettent son rotulage,
- que la pression est répartie uniformément.

Malgré ces contradictions les mécanismes fonctionnent... heureusement.

7.5. Les skis de fond

Le ski non chargé est incurvé. La raison en est peut être la recherche d'une pression de contact répartie plus uniformément lorsque le ski est chargé (surface et poids réduits...). Si cela est vrai, c'est un bon exemple de relation entre déformation globale et répartition des pressions.

7.6. L'un des corps est fait d'un matériau très déformable

Si le corps déformable ne peut pas se «répandre» la pression de contact est la même partout (pression d'une pâte sur une paroi).

Si ce n'est pas le cas la pression ne pourra pas être très grande. Ainsi, si vous êtes échoué sur les sables mouvants de la baie du Mont-St-Michel avec votre planche à voile, qui devient aussi votre seule planche de salut, vous avez intérêt à localiser son noyau central et à veiller à ce que la ligne d'action de votre glisseur-poids le coupe en permanence (figure 9), ceci afin d'assurer une répartition des pressions de contact planche/sable sur toute la surface et une pression maxi aussi réduite que possible.

D'une façon générale la grande malléabilité de l'un des matériaux est un facteur favorable à l'hypothèse de répartition linéaire ou uniforme des pressions.

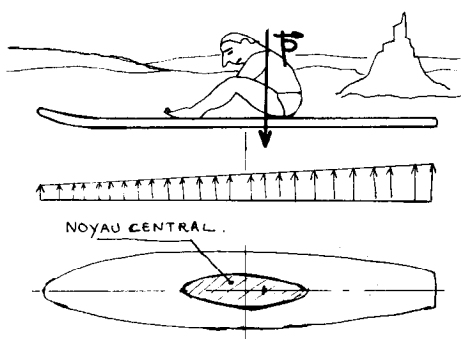


Figure 9

8. CONCLUSION

Tout étude de construction débouche nécessairement sur les questions suivantes :

Comment sont réparties les pressions de contact dans les liaisons ? Souvent nous voulons ignorer les questions ou alors nous apportons des réponses à partir d'hypothèses très mal justifiées. Les ouvrages généraux de technologie et construction mécanique sont très discrets superficiels et conventionnels sur ce sujet. La raison est qu'il est bien difficile de proposer des méthodes d'analyse et de calculs applicables en général. Cependant il faut bien évaluer les pressions de contact maximales.

J'ai essayé, incomplètement et sans doute maladroitement, de regrouper les données diverses sur ce sujet, de constater notre ignorance et notre incapacité à apporter des réponses précises, et de proposer quelques idées pour éviter de trop grossières approximations.

Pour terminer j'aimerais évoquer un aspect de notre activité pédagogique particulièrement mis en lumière par le sujet de cet article, et par bien d'autres sujets dans l'enseignement de nos disciplines si complexes vastes et diverses : Technologies de constructions et fabrications mécaniques.

Le professeur, conscient de la faiblesse de certaines de nos connaissances et méthodes d'études doit-il faire partager cette lucidité à ses élèves, développant ainsi leur esprit critique mais risquant de créer chez certains une réaction stérile de doute systématique à l'égard de l'enseignement qu'ils reçoivent ?

Doit-il au contraire cacher le mieux possible toutes ces imperfections et traiter avec la même assurance ces problèmes délicats et ceux de mécanique théorique (par exemple) ?

La réponse dépend sans doute du niveau de l'enseignement donné et de la qualité des élèves, mais par tempérament le professeur penche vers l'une ou l'autre des deux attitudes.

Je penche nettement vers la première attitude, qui n'est pas toujours très confortable. Et vous ?