Le bel et le byte
Conte sur l'invariance vis-à-vis de la base de numération

par Marc SERRÉRO
L.D.P.E.S. Paris VII

Il était une fois, il y a bien longtemps, un vieil homme qui s'appelait Isman. Cet homme était riche mais il n'avait pas d'enfant. Aussi imaginez sa joie lorsqu'il apprit que sa jeune épouse était enceinte. La maladie s'aggravant, il fit le testament suivant : s'il lui advenait un fils, alors celui-ci aurait une part de l'héritage et la mère deux parts. Si c'était une fille, alors la mère aurait une part, et la fille deux parts car il ne voulait pas que sa fille fut sans dot.

Le vieil homme mourut. Quelque temps après, la mère mit au monde deux beaux enfants, un garçon et une fille. Et l'on fut fort embarrassé, car à l'époque, on ne connaissait pas... les fractions ! Heureusement quelqu'un eût l'idée ingénieuse d'inventer une pièce de monnaie, le tal : 7 tals vaudraient un écu ; et le problème fut résolu : pour chaque écu d'héritage, on donna un tal au fils, deux à la mère et quatre à la fille (Note 1).

Ainsi naquit le système de numération à base 7. Pour résoudre des cas similaires et n'avoir jamais à traiter de fractions, il eût fallu raisonner en base $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$, ce qui faisait un nombre considérable de chiffres et une table de Pythagore immense. Les écoliers n'en dormaient plus et les maîtres se désespéraient. Aussi les civilisations décidèrent-elles de raisonner en base 2, 10, 12 ou 60. Mais alors, et pour des siècles, la division par sept, qui «ne tombait pas juste», fit du chiffre 7 un chiffre talisman, un peu comme l'indivisible 3 de la sainte trinité.

Ce conte n'était que pour sourire, mais il fait saisir que la notion de fraction, comme son nom l'indique, est née du partage et de la mesure, et qu'un même nombre se représente différemment selon la base de numération choisie : allez énoncer cela innocemment dans un cercle de numérologie, vous créerez un bel effarement, ce qui réduirait déjà beaucoup les prétentions de certains numérologues. Mais nous-mêmes, scientifiques, avons-nous bien démystifié la base décimale ?

Un cours aux agrégatifs sur le sujet ne s'est pas avéré inutile : *les relations entre grandeurs décrivent une réalité indépendante du choix du référentiel d'unités (invariance newtonienne) et du choix de la base de numération. Que peut-on en déduire ?* Sur le premier point, nous renvoyons à un article antérieur (BUP Dec. 87), réfléchir au deuxième nous conduira, sans clore le débat, aux conclusions provisoires suivantes :

1) Comme l'angle, le logarithme possède une unité.

2) Pour la mesure d'angle, il convient de ne pas mélanger grades et degrés. De même, il faudra bien comprendre ce que veut dire une expression comme «le décibel par octave».

3) L'indice n(x) d'une fonction f(x), soit $\frac{df}{f} \Big/ \frac{dx}{x}$ est un outil efficace de description de la variation de f(x).

4) Enfin, si le binary digit peut à bien des égards être considéré comme l'unité naturelle d'entropie au niveau moléculaire, on peut lui préférer le Néper. Mais mieux vaut encore utiliser *l'Ordre de Grandeur Litteral* de l'entropie molaire, c'est-à-dire R, la constante des gaz parfaits.

Voici le plan suivi :

1. ÉCHELLE LOGARITHMIQUE
   - 1.1. Ordre de grandeur EXACT
   - 1.2. Changement de base de numération
   - 1.3. Conséquence de l'invariance par changement de base
   - 1.4. Interpolation sur une échelle logarithmique.

2. DIAGRAMME LOGARITHMIQUE ; INDICE D'UNE FONCTION
   - 2.1. Diagramme logarithmique
   - 2.2. Pentes en décibels/octaves ou bien indice $n(x) = \frac{df}{f} \Big/ \frac{dx}{x}$?
   - 2.3. Comparaison avec les unités d'angle
   - 2.4. Utilité de l'indice n(x).

3. LE BINARY DIGIT, UNITÉ NATURELLE D'ENTROPIE ?
   - 3.1. Une unité manquante : l'extensité
   - 3.2. L'entropie au niveau moléculaire
   - 3.3. La fossilisation de la constante de Boltzmann

4. CONCLUSIONS PROVISOIRES

Examinons tout cela.

1. ÉCHELLE LOGARITHMIQUE

1.1. Ordre de grandeur EXACT

Soit à représenter une grandeur positive sur plusieurs ordres de grandeur. On pense immédiatement échelle logarithmique. Exemples classiques : fréquences électromagnétiques ; concentrations en chimie (Note 2). Parler de la grandeur x en puissance de dix revient à en parler en ordre de grandeur :

$x = x_0 \, 10^n$, $n \in \mathbb{N}$, x_0 étant la référence.

En parler sans perte de précision consiste à poser :

$x = x_0 \, 10^n$, $n \in \mathbb{R}$: c'est l'ordre de grandeur «EXACT» !

1.2. Changement de base de numération

Le nombre x/x_0 a une représentation qui diffère selon la base de numération choisie :

si $x/x_0 = 2^n = 10^m$, alors $m \neq n$

m est la «mesure» en log base 10

n est la «mesure» en log base 2

m est dit mesure en bels ; n en octaves

Le rapport n/m est indépendant de x/x_0 et ne dépend que du rapport des «unités» : $n/m = \log 2/\log 10$. Donc :

$$\boxed{1 \text{ octave} = \log 2/\log 10 \qquad \text{bel} \simeq 3 \text{ décibels}}$$

Bien sûr, ceci revient à dire que :

$2 \simeq 10^{3/10}$ ou bien $10 \simeq \sqrt[3]{2^{10}} = \sqrt[3]{1024}$, ce qui est familier aux informaticiens.

A quoi cela conduit-il ? L'égalité $\log_b u = \log_a u/\log_a b$ reproduit une égalité connue concernant le changement d'unités. Rappelons ici la définition de la mesure d'une grandeur : mesurer une grandeur G c'est la comparer à une grandeur de même nature G_0 prise pour unité : $G = g\, G_0$.

Donc si on change d'unité, $G = g\, G_0 = g'\, G'_0$, on aura : si $G'_0 = K.G_0$ alors $g' = g/K$.

Traduisons ici : un nombre possède plusieurs représentations logarithmiques selon «l'unité choisie» : avec 1 octave = K bels ($K = \log_{10} 2$) et $\log_2 x/x_0 = (\log_{10} x/x_0) / K$ on a bien :

$\log_2 x/x_0$ octaves $= \log_{10} x/x_0$ bels.

De la même façon, on peut introduire le Néper, «unité» des logarithmes naturels. Ainsi la représentation logarithmique d'un nombre se trouve affublée d'une unité, le bel, l'octave ou le néper, selon la base choisie. Concluons : on peut, si l'on veut, considérer l'unité d'un logarithme.

1.3. Conséquence de l'invariance par changement de base

Changer d'unités (x_0) revient à effectuer en coordonnée logarithmique une translation d'échelle, c'est-à-dire un changement d'origine. En ce sens, on dit qu'un diagramme logarithmique n'a pas d'origine. Par exemple, le sacro-saint pH = 7 de la neutralité acido-basique deviendrait pH = 5 en centimole/litre ; mais pourquoi détruire des idoles sans utilité ?

Changer de base de numération (2 en 10 par exemple) revient à dilater l'échelle logarithmique. On peut parler de changement d'unités des logarithmes : on gradue les axes en décibels ou en octaves.

1.4. Interpolation sur une échelle logarithmique

La seule réelle difficulté pour un élève est de savoir lire une échelle logarithmique (Note 3). Si le point M se trouve entre deux graduations voisines A et B et si AM/AB = k, alors :

$$x_M = x_0\, n_A (n_B/n_A)^k = x_0\, n_A^{1-k}\, n_B^k$$

par exemple, $n_A = 2$, $n_B = 3$ et $k = 64/100$ donne $2\,(3/2)^{64/100} = 3\,(2/3)^{36/100} = 2^{36/100}\,3^{64/100} = 2{,}59\ldots$

Avec combien de chiffres significatifs ? La réponse est connue : cela dépend de la précision sur k, c'est-à-dire de la «densification» de l'échelle en dessinant les décibels, puis les centibels, etc... On en sait la limite : l'évasive régularité des traits dans leur épaisseur et leur positionnement conditionne la précision ultime sur le pointé de k.

2. DIAGRAMME LOGARITHMIQUE ET INDICE D'UNE FONCTION

2.1. Diagramme logarithmique

Si $x \longmapsto y = f(x)$ est une relation entre deux grandeurs postives variant énormément, on pense diagramme log.log :

$$\text{on pose : } x = x_0\, a^n \quad ; \quad y = y_0\, b^m$$

La correspondance $n \longmapsto m$ est dite diagramme logarithmique (Note 4). Comme on l'a souligné, l'arbitraire du choix de (x_0, a) (y_0, b) conduit à n'attribuer ***aucun caratère absolu soit à l'origine soit à la dilatation du diagramme, donc aux pentes.***

2.2. Pentes en décibels/octave ou bien indice : $\boxed{n(x) = \frac{df}{f} \Big/ \frac{dx}{x}}$?

En coordonnées log.log, la notion d'indice s'introduit de manière très naturelle :

$$n(x) = \frac{d \log f}{d \log x} = \frac{df}{f} \Big/ \frac{dx}{x}$$

Ce rapport de la variation relative de la fonction à la variation relative de l'argument est une bonne définition en ce sens qu'elle est indépendante du choix des unités ET de LA base de numération (à condition de n'en choisir qu'une, évidemment). De plus, si y(x) «varie comme» x^{α}, alors n(x) est constant et égal à α.

Par exemple en électronique, le diagramme de Bode d'un filtre passe-bas d'ordre deux, aura pour indice -2 en H.F. C'est plus simple à retenir que des pentes à -12 dB/octave voire -40 dB/décade. J'ai personnellement mis un certain temps à retrouver l'utile formule :
$\varphi(\omega) \simeq \frac{\pi}{12} \cdot \frac{d\,G}{d \log_2 \omega}$ (en radians dB/octave, nul doute !) reliant la phase et le gain d'une fonction de transfert.

La chimie n'est guère mieux lotie : les pentes des diagrammes de Pourbaix sont en millivolts par unité pH. Certes, les professeurs compatissants suggèrent à leurs élèves les «bonnes» échelles : 6 dB = 1 cm ; 1 octave = 1 cm et en chimie 60 mV = 1 cm et 1 unité pH $\equiv$ 1 bel = 1 cm. D'où subtil retour à la case départ : un filtre d'ordre deux a bien une pente -2 et la pente de ($Red \longrightarrow ox + e^- + H^+$) est bien -1. Ne vaut-il pas mieux utiliser directement l'indice n(x) ?

2.3. Comparaison avec les unités d'angle

Sans y voir plus qu'une simple similitude, cette gabegie d'unités n'est pas sans rapport avec ce qui se passe avec leurs cousines, les unités d'angle : leur géniteur commun est sans doute :

$$\text{Ln} z = \text{Ln}\,(x + iy) = \text{Ln}\,\rho + i\,\theta$$

L'unité d'angle pratique est le TOUR et ses sous-multiples (grades ou degrés, selon la base !). Mais l'unité d'angle théorique reste le radian : 1 tour = $2\,\pi$ radians.

On mesure en degrés ou en grades. On raisonne en radians. La dérivée de sin x est cos x parce qu'on est CONVENU de toujours s'exprimer en radians. Qui défendrait l'idée saugrenue de dériver tgx avec sin x, x en degrés et cos x, x en grades. Exit donc les unités d'angle du champ théorique, sinon on en aurait trop de soucis pour peu de profit.

Ne pourrait-on adopter la même sage conduite avec les logarithmes ? On mesure et on compte en base 10, mais on raisonne sur e^x. Soit $M \equiv \log_{10} e = 0{,}434...$ Alors, 1 Néper = M bels $\simeq$ 4,34 décibels*. En travaux pratiques, les gains se mesurent en décibels ; au niveau thérorique on préfère les Népers. Rendre familier aux élèves ce passage du laboratoire à la classe et vice-versa est l'important : ils sauront alors traduire $\exp -3 \simeq 5\ \%$ ou $\exp -4{,}6 \simeq 1\ \%$.

Nous soutiendrons donc la thèse suivante : après avoir expliqué aux élèves ce que sont les unités pratiques des logarithmes, on pourrait convenir de n'utiliser au niveau théorique que le néper : le décibel/octave paraît une complication pédagogique dérisoire. (Note 5).

2.4. Utilité de l'indice $n(x) = \frac{df}{f} / \frac{dx}{x}$

Comme on l'a dit, l'indice n(x) ne dépendant pas des unités, on retrouvera cette notion à chaque fois que l'on voudra caractériser la variation locale «intrinsèque» d'une fonction. Par exemple :

– dans la stabilité cyclotron à gradient fort, on indique que B(r) a pour indice n : $-2 < n < 1$

– de même, dans l'étude de la stabilité des trajectoires circulaires en champ central, on indique que la force F(r) a un indice $n > -3$

– dans la théorie de la fusion thermonucléaire, ou aussi avec les fonctions à croissance «boltzmanniennes», $T \longmapsto A \exp - W/kT$, on parle de croissance vertigineuse en T^n, avec $n = W/kT$

– en économétrie on parle de l'élasticité de la demande

– en électronique des filtres, on parle sensibilité locale par rapport au paramètre x :

$$S(x) = \frac{x}{f}\frac{df}{dx}$$

Mais l'indice n(x) est surtout bien adapté à l'étude des comportements asymptotiques. L'exemple classique est :

$$(y/y_0)^q = 1 + (x/x_0)^p$$

mais d'après le 2.1., on peut se limiter grâce à un changement d'échelle, sans restreindre la généralité à $y = 1/(1 + x)$. Donc retenons :

* Sauf à dire qu'un décibel correspond à $10 \log_{10} x^2$ auquel cas 1 Néper = 8,68 décibels !

L'exemple type est $x \longmapsto y = \dfrac{1}{1+x}$

qui pour $x << 1$ donne : y «varie comme» x^0 : $n = 0$

pour $x >> 1$ donne : y «varie comme» x^{-1} : $n = -1$

C'est SIMPLE et EFFICACE.

La valeur exacte n(x) est : $n(x) = -x/(1+x)$. Si on pose $u = \text{Ln } x$, alors :

$$u \longmapsto F(u) = -n\,(x(u)) = 1/(1+e^{-u})$$

On reconnait la fonction de Fermi Dirac, (fonction palier qui vaut 0, puis progressivement 1). Dans le cas des fractions rationnelles, ce qui est le cas de l'électronique des fonctions de transfert ou de la **chimie**, l'indice n(x) est un outil très efficace de description des variations de f(x).

Par exemple en chimie, il intervient la fonction de transfert d'un triacide (par exemple H_3PO_4) :

$$x \longmapsto y(x) = 1/(1 + 10^{12}x + 10^{19}x^2 + 10^{21}x^3)$$

la fonction STEP (x) : $= -n(x)$ vaudra alors 0, 1, 2, 3 par paliers successifs (cf. cours de chimie de GARRIC p. 300).

Il faudra bien voir maintenant que l'indice n(x) condense la description de la variation de f(x), SANS PERTE D'INFORMATION, puisqu'aux unités près, on peut remonter de n(x) à f(x). On peut comparer cela à ce qui est dit de *l'ordre de grandeur exact* en 1.1.

Compter en ordre de grandeur est une idée simple et une gymnastique intellectuelle fondamentale.

Raisonner en ordre de grandeur exact, sans aucune perte de précision est la géniale invention des logarithmes.

De même on peut dire : l'indice n(x) d'une fonction est l'ordre de grandeur de sa variation locale : f(x) varie localement comme $x^{n(x)}$ (Note 6). L'étude des fractions rationnelles en électronique et en chimie (Note 7) grâce à la notion d'indice n(x) est sous des vocables différents très utilisée.

3. LE BINARY DIGIT, UNITÉ NATURELLE D'ENTROPIE ?

3.1. Une unité manquante : l'extensité

Rappelons tout d'abord ce fait fondamental : le nombre d'Avogadro est un nombre BIOLOGIQUE qui n'a rien à voir avec la physique ou la chimie de l'univers et dont l'unique intérêt est de ramener à notre ego les quantités atomiques. C'est bien parce que la main peut retenir quelques centimètre-cubes de matière que l'on a choisi une masse de 12 g de carbone pour référence. Or il se trouve que 1 $cm^3 = 10^{24}$ A^3, et du coup il apparaît «naturel» qu'une mole contienne environ 10^{24} atomes et plus précisément $\mathcal{N}$ par définition. Si l'on veut faire la «théorie» du nombre d'Avogadro, c'est la théorie de l'homme que l'on doit faire (et des atomes ! mais celle des atomes est connue : $a_0 = \hbar^2/me^2 = 0{,}53$ A), c'est-à-dire expliquer pourquoi un homme contient environ 5 10^{28} nucléons. Le nombre $(e^2/GM^2)^{3/4}$, avec $e^2 = q^2/4\pi\epsilon_0$, $G = 6{,}67\ 10^{-11}$ S.I. et M masse du proton, n'est pas loin du compte et ce n'est pas un hasard numérologique, mais nous en reparlerons (Note 8). Retenons : $\mathcal{N}$ est biologique. Étudiant de physique, tu sais dorénavant que $\mathcal{N}$ n'a rien à faire dans tes raisonnements. Étudiant ingénieur, occupé du réel humain, $\mathcal{N}$ sera ta «loupe théorique» qui te permettra de passer continuellement du macroscopique humain au microscopique atomique. MAIS Professeur, distingue bien ces deux attitudes : démontre $PV = N\ kT$; indique la notation $PV = n\ RT$; démontre $E_0 = -\frac{1}{2} me^4/\hbar^2 = -13{,}6$ eV ; indique $\Delta\overline{U}\,(H \longrightarrow H^+ + e^-) \simeq 1312$ kJ.mol^{-1}.

Notons maintenant un à-côté non négligeable de l'expression des $\Delta\overline{H}$ en joules mol^{-1} : c'est la traduction en électron-volts immédiatement assurée car 96500 J.mol^{-1} c'est 1 eV par molécule :

$$\boxed{100 \text{ kJ.mol}^{-1} \simeq 1 \text{ eV par molécule}}$$

Voici alors une mi-sérieuse miséreuse difficulté pédagogique : il manque souvent un symbole comme «entité extensive», car si l'énergie molaire est $\Delta\overline{U}$ en kJ.mol^{-1}, alors l'énergie moléculaire est bien en eV/molécule : comme le prix d'une poule est 30 F, le prix poulaire est 30 F.poule^{-1} ; comme la masse d'un volume est en kilogrammes, la masse volumique est en kg m^{-3}. Cela prête à sourire (avec l'énergie solaire, on pourrait encore noter J.soleil^{-1}, mais avec le froid polaire on tombe dans le calembour... scolaire) et je ne défendrai pas le prix poulaire plus avant : mais à ne pas distinguer conceptuellement V en m^3 et $\overline{V}$, volume molaire, en m^3.mol^{-1}, beaucoup d'élèves sont incapables de passer de l'équation de Van der Waals exprimée pour une mole à celle de n moles. La même difficulté surgit avec chaque quantité extensive, et la notion «quantité de matière» s'avère inadéquate : l'énergie d'un photon jaune est environ 2 eV, celle d'une «mole» de ces photons 200 kJ, et «l'énergie molaire» de ces mêmes photons est 200 kJ.mol^{-1}. Pour tout élève attentif à l'homogénéité tout cela va sans dire, mais va peut être mieux en le disant en souriant.

3.2. L'entropie au niveau moléculaire

L'entropie n'est pas conservative. Néanmoins c'est une fonction d'état. Elle est extensive, quoique non simplement additive. On parle de $\Delta\overline{S}$ en

$J.K^{-1}$ mol^{-1}. Il est donc tentant d'effectuer avec $\Delta\overline{S}$ la même opération qu'avec $\Delta\overline{U}$: descendre au niveau moléculaire. Il convient cependant d'être prudent : les variables seront choisies intensives : P et T. Le système devra être homogène. Enfin le sous-système ne devra pas être confondu avec la particule : il s'agit bien de la particule ET du volume moyen qu'elle occupe. Ce n'est pas conceptuellement satisfaisant, je l'avoue, mais faute de quoi, on tombe sur de jolis pseudoparadoxes de fausses entropies de mélange. D'autre part, que veut vraiment dire homogène ? L'eau liquide, pure, dite homogène, est extrêmement structurée car l'orientation d'un dipôle retentit sur celle des voisins : il en résulte un «déficit d'entropie de structuration» (sic !). Qualitativement on comprend bien, quantitativement comment chiffre-t-on ?* (Note 9).

Laissons cela provisoirement et avançons témérairement pour découvrir l'unité naturelle d'entropie : le $J.K^{-1}$ mol^{-1} deviendra $1/6\ 10^{23}$ $J\ K^{-1}$ par «entité». Les ΔS molaires étant de l'ordre de R, les ΔS moléculaires seront de l'ordre de $R/\mathcal{N} = k$, la constante de Boltzmann. On pense à $S = k \log \Omega$. Oui ; et $\log \Omega$, DANS QUELLE BASE ?

3.3. La fossilisation de la constante de Boltzmann

Rappelons ici la définition moderne de l'entropie : étant donné un système à Ω micro états équiprobables, l'entropie est le nombre de questions binaires à poser pour connaître son état : en procédant par dichotomie, on trouve vite $S = \log_2 \Omega$. Les musiciens auraient dit octaves, les informaticiens ont dit binary digits. Mais qu'importe, le 1.2. nous ouvre la voie.

$S = k \operatorname{Ln} \Omega = \log_2 \Omega$ bits $= \log_{10} \Omega$ bels $= \operatorname{Ln} \Omega$ népers

c'est-à-dire 1 Néper $= 1{,}38\ 10^{-23}\ J.K^{-1}$

1 Mole de Népers $= 8{,}32\ J.K^{-1}$!

Ainsi la constante de Boltzmann, k, apparaît-elle comme simple facteur de conversion du logarithme. On pourrait presque dire qu'elle apparaît nécessairement, car *la Nature ne pouvait préjuger de la base de numération que nous utiliserions :* il existe des tris ternaires au même titre que des dichotomies. Aussi bien k n'a-t-elle peut être pas plus d'utilité que la constante universelle J, l'ancien équivalent mécanique de la chaleur. Le physicien LANDAU n'utilise jamais $\mathcal{N}$, ni k, dans son traité de physique. Notre position est plus réservée, par lâcheté pragmatique.

Au niveau macroscopique, l'ordre de grandeur littéral de référence pour l'entropie molaire est bien sûr R. La valeur $R \operatorname{Ln}2 = 5{,}2\ J.K^{-1}$ mol^{-1} correspond à un doublement du nombre de cas, c'est-à-dire à 1 bit par extensité. En chimie, où les ordres de grandeur des variations de $\Delta\overline{S}°$

sont environ 100 $J.K^{-1}$ mol^{-1}, il conviendra de comprendre pourquoi les **rapports** des nombres d'états microscopiques sont donc dans un facteur $2^{20} \sim 10^6$, ce qui peut paraître considérable. A contrario, sachant que les $\Delta\overline{S}°$ sont souvent ~ 100 $J.K^{-1}$ mol^{-1}, un rapport $2^{20\,000}$ apparaîtra faux à notre intuition maintenant éduquée. (Note 10).

4. CONCLUSION PROVISOIRE

Réfléchir à la notion de base de numération nous a conduit progressivement à cette curieuse notion d'unités des logarithmes cousines des unités d'angle. On en a dénoncé certains abus et on a essayé de promouvoir la fonction indice n(x). Enfin la constante de Boltzmann s'est fossilisée comme vulgaire facteur de conversion de logarithme. N'escomptez pas trop une future unité d'entropie le bit et donc une future unité de température le $joule.bit^{-1}$. Peut être verra-t-on exprimer les entropies en Népers et la température en eV/Néper : 1 eV/Néper = 11 600 K. Mais c'est peu probable. L'unité de logarithme restera marginale comme l'est l'unité d'angle. Si on **convient** de toujours s'exprimer en Népers, cette unité sort du champ conceptuel et on identifiera Kelvins et Joules. Mais on ne confondra par pour autant température et énergie : la température est intensive ; l'énergie interne est extensive. Un physicien averti sait en profiter au niveau de l'invariance par autosimilitude de ses équations. L'attitude pragmatique à conseiller n'est-elle pas la suivante ? : k et T étant toujours associés au cours des calculs, autant raisonner toujours avec kT et ramener les entropies à leur «référence naturelle» k. Supprimer k viendra plus tard dans les études.

J'espère au moins par cet article avoir nettement plaidé pour l'éloignement de ces querelles peu productives consistant à défendre le décibel/octave ou le Néper/décade.

Qu'il me soit permis ici de remercier mes référés et amis Laurence VIENNOT du L.D.P.E.S. Paris VII, Claude WALTER et Hubert GIÉ, qui ont contribué par leur amicale critique constructive à remanier cet article.

Note 1 :

Je dois ce joli conte à Laura Rigatelli. Confer Histoire des fractions, fractions d'histoire. Jim Ritter C.N.R.S. 87. L'histoire des nombres est fascinante, des Sumériens à Nicolas Chuquet et Weierstrass. Signalons aussi Histoire de la métrologie par Decourdemanche et Routes et Dédales, histoire des mathématiques par A. Dahan Dalmédico et J. Pfeiffer.

Note 2 :

Il serait intéressant de répertorier les situations qui ont conduit à instaurer une échelle logarithmique : bien sûr, il y a les sensations avec la loi de Fechner : comme nous ne sommes sensibles qu'au rapport des grandeurs, on invente les octaves pour les hauteurs et les bels pour les intensités, les magnitudes en astronomie. Il y a aussi les cas où une situation se reproduit identiquement à elle-même en réduction : d'où les densités optiques, d'où les gains des fonctions de transfert pour les filtres électriques en cascade, etc... Mais il y a aussi les cas où il s'agit de simple accumulation et où l'on «formate» sur le même modèle la hiérarchie des mesures : format A_1, A_2, A_3, A_4 des pages de papier, format des boîtes de poids, format des capacités de volumes, mais aussi des objets techniques : la série Renard, les valeurs standard des résistances (10, 15, 22, 33, 47, 68, confer Auvray - circuits et composants électroniques - Hermann). Il y a de bonnes raisons de compter 1, 2, 3, 4 ; j'aimerais connaître mieux les raisons de compter 1, 2, 4, 8...

Note 3 :

Ce qui suit est tiré d'un petit opuscule «l'échelle logarithmique» de l'I.R.E.M. de Paris qui possède par ailleurs tout un catalogue fort remarquable.

Note 4 :

En mathématiques on distingue le graphe de f et la représentation graphique de f. Le graphe c'est l'ensemble des couples (x, y ; y = f(x)). Nous, physiciens, appelons tableau à simple entrée le graphe échantilloné. La représentation graphique c'est un abaque de f : on porte en abscisse une fonction monotone de x dite échelle des x et en ordonnée une autre fonction monotone de y. L'étude des «meilleurs» abaques est la nomographie. Sa version informatisée, le traitement graphique des données fait partie de l'infographie. On en connaît l'impact pédagogique impressionnant et on en pressent l'essor fulgurant, avec le développement des mémoires et du débit d'information. Les réalisations du LACTAMME sont à cet égard remarquables. Cf article de Pour la science ou numéro spécial du courrier du CNRS. A quand une stage de recyclage pour professeurs ?

Note 5 :

Attention, chaque praticien a certainement de très bonnes raisons pour défendre son unité. Voir proliférer les unités des logarithmes soit par promotion des Laboratoires Bell, soit par rationalisation technologique (la série Renard ou les valeurs des résistances électriques) ou par bien fondé expérimental (les octaves des musiciens) est malheureusement inéluctable : chaque secteur technologique secrète vite son propre système d'unités :

parfois cela est pratique, très bien ; parfois cela tient de «l'épate» pour bluffer les clients, attitude de Diafoirus plus douteuse. En ce sens l'obligation du Système International est illusoire et en même temps fondamentale car elle refrène la tendance naturelle à «l'esprit de clocher» et permet une communication universelle. Doit-on parler en décibels, népers, octave ($\equiv$ bit) ou byte ($\equiv$ octet) ? Il importe surtout d'apprendre à communiquer, c'est-à-dire à savoir **traduire,** translater un langage étroitement technique en un langage physique clair.

Note 6 :

Mes référés me demandent de développer un peu cette notion d'indice $n(x) = \frac{df}{f} \Big/ \frac{dx}{x}$, ou exposant variable, ou ordre de f(x). Nous avons vu que si $f(x) = A\,x^{\alpha}$, $n(x) = \text{cste} = \alpha$. D'autre part $n(fg) = n(f) + n(g)$. En particulier $n(1/f) = -n(f)$.

Pour un polynôme $\Sigma\, a_n x^n$, $n(x) = \frac{\Sigma\, n\, a_n x^n}{\Sigma\, a_n x^n}$, n(x) apparaît comme une sorte de n moyen ou n effectif, d'où sa notation en chimie sous la forme de $\bar{n}$ (cf GARRIC).

L'étude des fractions rationnelles et de la stabilité est très liée à $\bar{n}$: il apparaît en théorie de la variable complexe une notion voisine, l'indice de Cauchy.

Pour une fonction de fonction f(g(x)), on a bien sûr :

$$n(x) = \left(\frac{dg}{g} \Big/ \frac{dx}{x} \right) \times \frac{df}{f} \Big/ \frac{dg}{g}$$

En particulier puisque $f^{-1}(f(x)) = x$, $1 = n(f).n(f^{-1})$.

Enfin si $y = \log_a x = \text{Ln}\, x/\text{Ln}\, a$, $n(x) = 1/\text{Ln}\, x$. Donc $y = a^x$ aura l'indice $n = \text{Ln}y$ $(= x\text{Ln}a)$.

Attention enfin, si on se donne $n(x) = \frac{df}{f} \Big/ \frac{dx}{x}$ on en déduit $f(x) = A \exp \int n(x) \frac{dx}{x} = x \uparrow \bar{n}(x)$ avec $\bar{n}(x) = \frac{1}{\text{Ln}x} \int n(x) \frac{dx}{x}$. Donc inversement si $f(x) = A\ x \uparrow \bar{n}(x)$, alors n(x) n'est pas $\bar{n}(x)$ mais $n(x) = x \frac{d}{dx} (\text{Ln}x.\bar{n}(x)) = \bar{n}(x)\ (1 + \epsilon(x))$ avec $\epsilon(x) = x\ .\ \text{Ln}x\ . \frac{d\bar{n}}{dx} \Big/ \bar{n}$ (Cf vitesse de groupe et de phase).

Très utile, la notion d'indice doit donc être manipulée avec prudence, comme cela peut être testé avec la fonction suivante intervenant en cinétique chimique : Gomperz(x) = exp (exp(− x)).
Réponse : $n(x) = -\,xe^{-x}$ et non pas $-\exp(-x)$.

Note 7 :

Pour dire bref, l'idée essentielle en électronique est la suivante : via la causalité, les relations de dispersion entre phase et gain pour les fonctions de transfert à déphasage minimal s'expriment simplement à l'aide de l'indice n(ω) de la fonction G(ω) et d'une «mauvaise fonction delta». Confer n'importe quel traité d'électronique théorique, par exemple le FELDMAN (attention, on veillera à ne pas confondre l'indice n(ω) dont on parle ici avec l'indice $n(\omega) = \sqrt{\epsilon_1(\omega)}$ de l'optique, quoique (d'autant plus que) les notions sont voisines).

Pour dire bref, en chimie l'idée essentielle est : une fois maîtrisée la notion capitale de **système équivalent** dans la théorie des équilibres chimiques en phase aqueuse, la notion d'indice $pH \longrightarrow n(pH)$ se révèle un outil d'une efficacité prodigieuse sous le nom de fonction : $pH \longrightarrow$ STEP (pH) (cette fonction «palier» est l'acronyme pour fonction Significative du Taux Effectif des Protons (fournis par un acide)). En effet la fonction STEP est RIGOUREUSEMENT la courbe de dosage : cela permet SANS CALCULS de visualiser la valeur du pH et si on le désire d'indiquer les approximations de calculs, tout en restant aussi PRÉCIS que l'on veut à chaque étape. Dans une bonne math sup, cette méthode marche bien mais...foin de prosélytisme.

Note 8 :

Aux journées de Reims 86, nous avions introduit le nombre d'Avogadro stellaire $N_{\odot} = (\hbar c/GM^2)^{3/2}$. Le problème du nombre d'Avogadro humain est plus délicat, de même que celui du noyau. Il s'agit d'être très prudent et averti : on dérape vite vers la numérologie.

Note 9 :

Cet article a été écrit bien avant les remous de l'eau avec mémoire de J. BENVENISTE. Il ne s'agit pas pour moi d'agiter ici cette eau trouble.

Note 10 :

Il y a là matière à réflexion = RÉDUIRE l'écrasante masse des données thermochimiques et cinétiques à leurs *Ordres de Grandeur Littéraux* est d'un grand bénérice pour les élèves/professeurs qui en maîtrisent la technique. Mais là encore l'équilibre est difficile à trouver entre enseignants et praticiens.