

Correction

La première partie de ce problème montre que le champ de gravitation terrestre est lié à la répartition spatiale des masses et analyse l'influence de perturbations, comme celle qui résulte de la rotation diurne de la terre. La comparaison de l'ordre de grandeur de ces perturbations, à la précision des mesures étudiées en seconde partie, permettra de savoir si elles sont effectivement décelables et susceptibles d'applications pratiques.

1. LE CHAMP DE PESANTEUR TERRESTRE

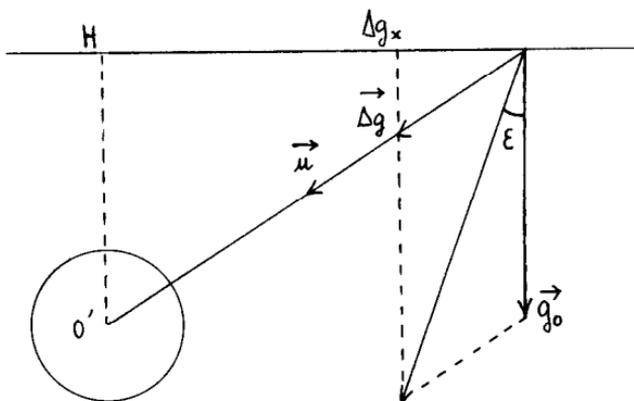
1.1. L'application du théorème énoncé en préambule (cas particulier du théorème de Gauss), permet d'écrire :

$$M = \frac{g_0 R^2}{g_f} ; \quad M = 6,02 \cdot 10^{24} \text{ kg.}$$

$$\mu_m = \frac{3g_0}{4\pi R g_f} ; \quad \mu_m = 5,48 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

1.2. Le calcul classique en terminale donne :

$$g = \frac{g_0 R^2}{(R+z)^2} ; \quad \text{et pour } z \ll R \quad g = g_0 \left(1 - \frac{2z}{R} \right)$$



Avec les conventions du schéma :

$$\vec{\Delta g} = \frac{4}{3} \pi \rho_j R^3 \frac{\mu' - \mu}{x^2 + h^2} \vec{u}$$

$$\Delta g \text{ a le module maximal en H : } \Delta g_m = \frac{4}{3} \pi \rho_j R^3 \frac{\mu' - \mu}{h^2}$$

2.2. Les courbes d'égalité de g à la surface du sol sont des cercles de centre H.

2.3. D'après le schéma $\varepsilon = \frac{\Delta g_x}{g_0}$ avec $\delta g_x = \frac{x}{(x^2 + h^2)^{3/2}}$

$$\text{d'où } \varepsilon = 4 \pi \rho_j R^3 \frac{(\mu' - \mu)_x}{3g_0(x^2 + h^2)^{3/2}}$$

On cherche la valeur de x qui annule la dérivée de $x(x^2 + h^2)^{-3/2}$ soit $x = \frac{h}{\sqrt{2}}$. Les points Q sont donc ceux d'un cercle de centre H et rayon $\frac{h}{\sqrt{2}}$.

2.4. La profondeur de la cavité est $h = 1200\sqrt{2} = 1700$ m. Δg_m permet de calculer :

$$R = \left(\frac{3h^2}{4\pi \rho_j (\mu' - \mu)} \right)^{1/3} = 968 \text{ m.}$$

Si $\mu' < \mu$, les anomalies $\vec{\Delta g}$ et ε changent de sens.

L'énoncé suggère l'application à la prospection minière et pétrolière. Citons également la recherche de cavités dans les pyramides d'Égypte.

L'introduction du Gal ou milligal peut surprendre car la conversion d'unités ne présente ni difficulté, ni intérêt. Cependant, le nom de cette

unité commémore celui de Galilée, et il est bon de savoir que les spécialistes d'une science donnée conservent souvent leurs propres unités, même illégales.

3.1. Toujours en application des formules et théorème énoncés en préambule :

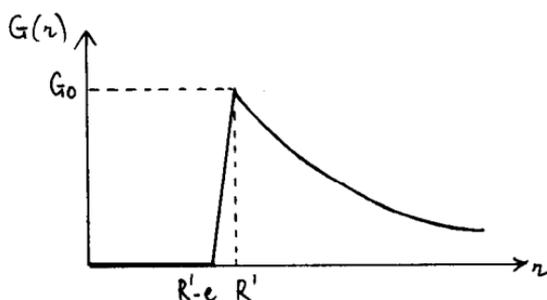
$$r < R' - e \quad \vec{G} = \vec{0}$$

$$r > R' \quad \vec{G} = - \frac{G_0}{r^3} M \vec{r} \text{ avec } M = 4 \pi R'^2 e \mu$$

$$\text{en particulier } G_0 = 4 \pi e \mu$$

Dans la matière de la coquille, $R' - e < r < R'$, le module du champ est proportionnel à la masse contenue dans la sphère de centre O et de rayon r, soit celle d'une coquille d'épaisseur x :

$$G = G_0 \frac{x}{e} \quad \text{avec } x = e + r - R'$$



3.2. L'élément crée en M_1 et M_2 des champs \vec{G}_1 et \vec{G}_2 opposés :

$$\vec{G}_1 + \vec{G}_2 = \vec{0}$$

Du fait de leur proximité, le reste de la coquille crée en M_1 et M_2 des champs \vec{G}_1' et \vec{G}_2' , identiques :

$$\vec{G}_1' = \vec{G}_2'$$

Le champ est nul en M_2 : $\vec{G}_2 + \vec{G}_2' = \vec{O}$.

Il s'ensuit $\vec{G}_1 = \vec{G}_1' = \frac{1}{2} \vec{G}_0$ et $G_1 = 2 \pi \varrho z \mu$.

3.3. Il faut tenir compte d'une part de l'altitude (résultat de 1 - 2), d'autre part de la présence du plateau (résultat de 3 - 2).

$$g = g_0 \left(1 - 2 \frac{z}{R} \right) + 2 \pi \varrho z \mu.$$

D'après 1.1.
$$\varrho = \frac{3g_0}{4 \pi R \mu_m}.$$

D'où :
$$g = g_0 \left(1 - \frac{2z}{R} + \frac{3}{2} \frac{z}{R} \frac{\mu}{\mu_m} \right)$$

et
$$\Delta g = g_0 \frac{z}{R} \left(-2 + \frac{3}{2} \frac{\mu}{\mu_m} \right) = -193 \text{ mGal.}$$

On remarque que la variation due à l'altitude l'emporte sur celle qu'entraîne la présence du plateau. La formule précédente porte le nom de formule de Bouguer.

3.4. La masse contenue dans la sphère de rayon $R - z'$ peut s'exprimer par $M - 4 \pi R^2 z' \mu$.

On en tire :
$$g = \varrho \frac{M - 4 \pi R^2 z' \mu}{(R - z')^2}$$

après approximations
$$g = g_0 \left(1 + \frac{2z'}{R} - 4 \pi \mu \frac{\varrho}{g_0} z' \right)$$

$$\text{et } g - g_0 = g_0 \frac{z'}{R} \left(2 - \frac{3\mu}{\mu_m} \right) = 80 \text{ mGal.}$$

$g - g_0$ est positif : le champ de pesanteur augmente sur une certaine profondeur (relativement faible) avant de diminuer et tendre vers zéro au centre de la terre. Ceci est dû à la variation de la masse volumique : les roches de l'écorce sont moins denses que les couches plus profondes.

Dans les conditions d'approximation envisagées ($z' \ll R$), g reste égal à g_0 si $2 - \frac{3\mu}{\mu_m} = 0$, soit $\mu = 3,65 \text{ kg.m}^{-3}$, qui est une valeur possible.

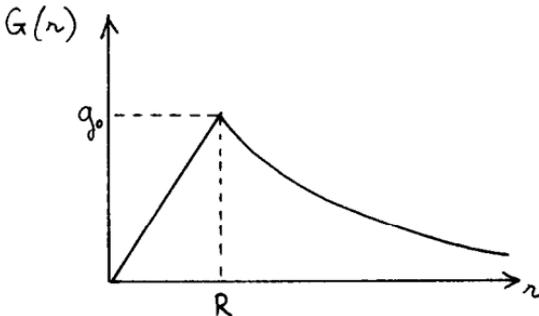
4.1. Dans ce modèle rudimentaire,

$$r > R \quad \vec{G} = - \frac{G}{r^2} \frac{M}{r^2} \vec{u} = - g_0 \frac{R^2}{r^2} \vec{u}$$

$$r > R \quad \vec{G} = - \frac{G}{r^2} \frac{M(r)}{r^2} \vec{u}$$

où $M(r)$ est la masse de la sphère de rayon r , soit $M \frac{r^3}{R^3}$

$$\vec{G} = - g_0 \frac{r}{R} \vec{u}$$



4.2. a) La vitesse s'annule aux extrémités du diamètre et il y a conservation de l'énergie totale. Le mouvement est périodique, pourvu que la répartition des masses présente la symétrie sphérique.

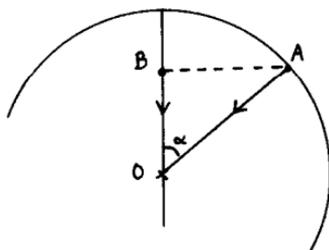
b) La force qui s'exerce sur l'objet est $-mg_0 \frac{r}{R} \vec{u}_r$

Le mouvement satisfait à $\ddot{r} + \frac{g_0}{R} r = 0$.

Il s'agit donc d'un oscillateur harmonique rectiligne de période

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g_0}} = 5,08 \cdot 10^3 \text{ s.}$$

c) Le mouvement circulaire uniforme du satellite A satisfait à $m\omega^2 R = mg_0$ et l'on retrouve la même période. En effet, l'oscillateur rectiligne B a pour accélération $G(r) = g_0 \frac{r}{R} = G(R) \cos \alpha$ qui est la projection sur le diamètre de l'accélération du satellite.



Le mouvement rectiligne est la projection sur le diamètre du mouvement du satellite.

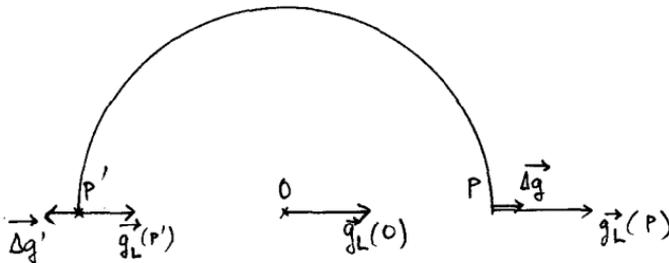
5.1. Un point lié à la terre se trouve dans un référentiel animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe Nord-Sud, par rapport à un référentiel Galiléen.

$$\epsilon'_{\max} = 1,72 \cdot 10^{-3} \text{ rd} = 6'.$$

Noter que cette théorie ne rend pas bien compte des variations dues à la latitude.

5.4. Le champ s'annule dans le plan équatorial à la distance r telle que $G = \omega^2 r$ ou $g_0 \frac{R^2}{r^2} = \omega^2 r$ $r = 42,2 \cdot 10^6$ m. C'est le rayon de l'orbite du satellite géostationnaire. Ce satellite est immobile dans le référentiel lié à la terre.

6.



$$\vec{\Delta g} = \vec{g}_L(P) - \vec{g}_L(O)$$

$\vec{\Delta g}$ a même sens que $\vec{g}_L(P)$

$\vec{\Delta g}'$ a le sens opposé à $\vec{\Delta g}$

$$\Delta g = \mathcal{G} \frac{M_L}{P_L^2} - \mathcal{G} \frac{M_L}{OL^2}$$

$$\Delta g = \mathcal{G} M_L \left(\frac{1}{(d-R)^2} - \frac{1}{d^2} \right) \approx 2 \mathcal{G} \frac{M_L R}{d^3} \quad \text{car } d \gg R.$$

$\vec{\Delta g}$ et $\vec{\Delta g}'$, ayant les sens opposés, la perturbation Δg se retrouve deux fois par tour dans la rotation diurne de la terre. La périodicité est donc d'environ 12 heures. Mais le soleil a aussi une influence appréciable (environ la moitié de celle de la Lune).

$$\text{Numériquement : } \Delta g = 2 \frac{g_0}{81 \times 60^3} = 0,11 \text{ mGal.}$$

2. LES MESURES GRAVIMÉTRIQUES

La deuxième partie du problème propose l'étude de méthodes gravimétriques. Il ne s'agit pas d'une étude exhaustive, car les méthodes les plus récentes ne sont pas à la portée d'un élève de terminale. On pourra constater que le gravimètre absolu atteint une précision telle qu'il devient pratiquement nécessaire de tenir compte de la variation de g avec l'altitude, pour des hauteurs de chute pourtant modestes.

A. LES GRAVIMÈTRES ABSOLUS UTILISENT LA CHUTE LIBRE DANS LE VIDE

$$1.1. \quad \left| \frac{\Delta g}{g_0} \right| = \frac{2z}{R} = 3.10^{-7} \quad \text{et} \quad |\Delta g| = 0,03 \text{ mGal.}$$

1.2. En vertu de la conservation de l'énergie, l'objet repasse en M avec la vitesse $-\vec{v}_0$.

1.3. La variation de quantité de mouvement est la même ($2mv_0$), que g soit uniforme ou non. D'après l'expression : $\Delta p = \int F dt$; comme F est plus grand pour g uniforme que pour g non uniforme, la durée correspondante est plus faible. $t_0 < t_0 + \Delta t$ avec $\Delta t > 0$.

$$1.4. \quad \text{Si } g \text{ uniforme} \quad z = -\frac{1}{2} g_0 t^2 + v_0 t \quad \text{et} \quad t_0 = \frac{2v_0}{g_0}$$

$$\text{Si } g \text{ non uniforme, on peut poser} \quad g = g_0 - az \quad \text{où} \quad a = \frac{2g_0}{R}$$

$$\ddot{z} = -g = -g_0 + az \quad \text{avec } z \approx v_0 t - \frac{1}{2}g_0 t^2$$

$$\ddot{z} = -g_0 + a v_0 t - \frac{1}{2} a g_0 t^2$$

On intègre, il s'ensuit $v = v_0 - g_0 t + \frac{1}{2} a v_0 t^2 - \frac{1}{6} a g_0 t^3$

et on écrit $v = v_0$ pour $t = \frac{2v_0}{g_0} + \Delta t$

En se limitant aux termes significatifs, on obtient :

$$-v_0 = v_0 - 2v_0 - g_0 \Delta t + 2a \frac{v_0^3}{g_0^2} - \frac{4}{3} \frac{a v_0^3}{g_0^2}$$

$\Delta t = \frac{4v_0^3}{3g_0^2 R} = 1,4 \cdot 10^{-7} \text{s}$, ce qui est très faible vis-à-vis de t_0 , lui-même de l'ordre de la seconde.

$$2.1. \quad \delta = 2(d_2 - d_1)$$

Les vibrations qui interfèrent en D peuvent s'écrire $a \cos \omega t$ et $a \cos(\omega t - \Phi)$ où $\Phi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$.

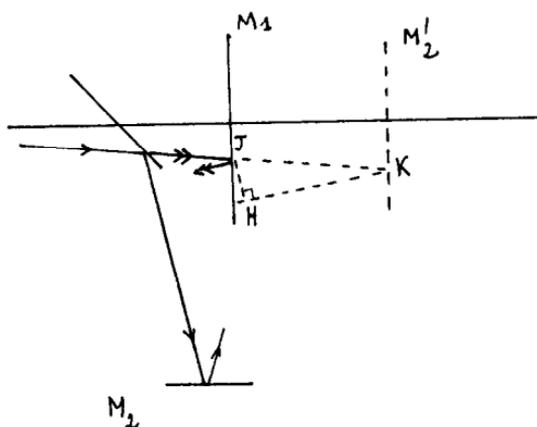
D'où la vibration résultante :

$$a \cos \omega t + a \cos(\omega t - \Phi) = 2a \cos \frac{\Phi}{2} \cos(\omega t - \frac{\Phi}{2}).$$

$$I = 4a^2 \cos^2 \frac{\Phi}{2} = 2a^2 (1 + \cos \Phi) = 2 I_0 (1 + \cos \Phi).$$

I est maximal pour $\delta = 0$. La première valeur qui annule I correspond à $\Phi = \pi$, soit $d_2 - d_1 = \frac{\lambda}{4}$.

2.2.



$$\delta = JK + KH = 2 (d_2 - d_1) \cos i.$$

Les franges correspondent à i constant : ce sont des cercles centrés sur l'axe. Elles sont données par $2 (d_2 - d_1) \cos i = p\lambda$ où p est entier.

Au centre $2(d_2 - d_1) = p_0 \lambda$. (La comparaison montre que l'ordre d'interférence décroît à partir du centre $p < p_0$)

Les 2 premières franges correspondront donc à $p = p_0 - 1$ et $p = p_0 - 2$.

$$i \text{ étant faible, } \cos i = 1 - \frac{i^2}{2}$$

$$2(d_2 - d_1) \left(1 - \frac{i^2}{2}\right) = (p_0 - 1)\lambda, \text{ et } i = \sqrt{\frac{2\lambda}{d_2 - d_1}}$$

le rayon des 2 premières franges sont:

$$r_1 = f' \sqrt{\frac{\lambda}{d_2 - d_1}} \quad \text{et} \quad r_2 = f' \sqrt{\frac{2\lambda}{d_2 - d_1}}$$

3.1. Soit $C x y z$ le trièdre, u_x, u_y, u_z les composantes d'un vecteur porté par le rayon incident. Après réflexion sur le plan $C x y$, le vecteur porté par le rayon réfléchi a pour composantes $u_x, u_y, -u_z$. Après trois réflexions, le vecteur $(-u_x, -u_y, -u_z)$ a changé de sens.

3.2. Les lois du mouvement de chute permettent d'écrire

$$v_1 = g \frac{T}{2} ; \quad v_2 = g \frac{T'}{2} \text{ et } \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = gh$$

ce qui aboutit à $g = \frac{8h}{T^2 - T'^2}$

Résultats numériques : $v_1 = 5,59 \text{ m.s}^{-1}$ et $v_2 = 3,43 \text{ m.s}^{-1}$

$\frac{\Delta g}{g} = \frac{2 \Delta T}{T - T'}$ conduit à $\Delta T = 7.10^{-8} \text{ s}$, résultat qu'il faut comparer à celui de la question 1.1

4. Par analogie avec la question 2.1. (mais avec un I_0 n'ayant pas la même dimension, on écrit :

$$dJ = 2 I_0 (1 + \cos \Phi) dv ; \quad \Phi = \frac{2\pi \delta v}{c}$$

$$J = 2I_0 \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \left(1 + \cos \frac{2\pi\delta v}{C} \right) dv$$

après intégration et transformation trigonométrique, on obtient la formule demandée avec les notations suivantes :

$$J_0 = 2 I_0 (v_2 - v_1)$$

$$\alpha = \pi \frac{(v_1 - v_1)}{c} = \pi \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2}$$

$$\beta = \pi \frac{(v_1 + v_2)}{c} = \pi \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2}$$

On remarque que J s'annule en même temps que $\sin \alpha \delta$ (à l'exception du cas $\delta = 0$) et $\cos \beta \delta$, cette deuxième circonstance ayant une fréquence plus grande. D'autre part le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ vaut numériquement $\frac{1}{3}$.

$\cos \beta \delta$ s'annule pour la première fois quand

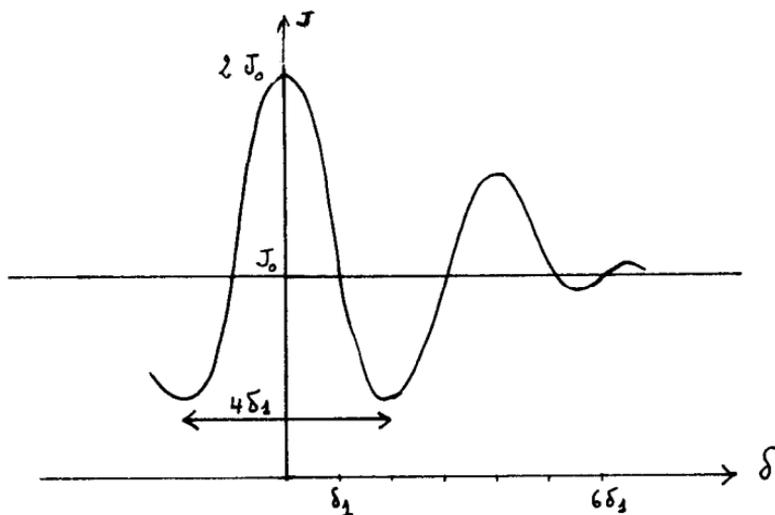
$$\delta = \delta_1 = \frac{\pi}{2\beta} = 0,133 \mu m$$

$\sin \alpha \delta$ s'annule pour la première fois (hormis $\delta = 0$).

$$\text{pour } \delta = \frac{\pi}{\alpha} = 6 \delta_1.$$

La courbe représentative a donc l'allure suivante :

Il n'y a qu'un maximum secondaire entre 0 et $6 \delta_1$.



Au-delà de cette valeur J tend rapidement vers J_0 . La courbe montre donc que l'impulsion s'étend sur une largeur de $4 \delta_1$ approximativement.

Mais la variation de δ est 4 fois plus grande que le déplacement du coin de cube qui vaut donc $0,133 \mu\text{m}$

Les valeurs des vitesses en P_1 et P_2 ont été calculées, on en déduit la durée des impulsions :

$$\text{au passage en } P_1, \quad \frac{d}{v_1} = 2,38 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

$$\text{au passage en } P_2, \quad \frac{d}{v_2} = 3,88 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

Les dates de passage sont donc obtenues avec une excellente précision, de même que les durées T et T' envisagées en 3.2. Il y a lieu de s'inquiéter de l'influence de l'air résiduel sur le mouvement par exemple.

5. Entre le passage à l'altitude z_1 et le sommet de la trajectoire, il s'écoule un temps $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Entre 2 passages à l'altitude z_1 , $T = 2 \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Le nombre de maximums correspond au nombre de λ compris dans la variation de chemin optique de $4h$.

$$4h = N\lambda, \text{ d'ou } T = 2 \sqrt{\frac{N\lambda}{2g}} \text{ et } g = \frac{2N\lambda}{T^2}$$

B. GRAVIMÈTRES RELATIFS

1.1. Le résultat est immédiat : $mgl \sin \theta - 2C(\theta - \theta_0) = 0$

$$1.2. \quad g = \frac{2C(\theta - \theta_0)}{ml \sin \theta} \text{ d'ou } \frac{dg}{d\theta} = \frac{2C \sin \theta - (\theta - \theta_0) \cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$\text{ou encore } \frac{dg}{d\theta} = \frac{mgl \sin \theta}{2C - mgl \cos \theta}$$

$$1.3. \quad \theta - \theta_0 = \frac{mgl \sin \theta}{2C} = 12,25 \text{ rd}$$

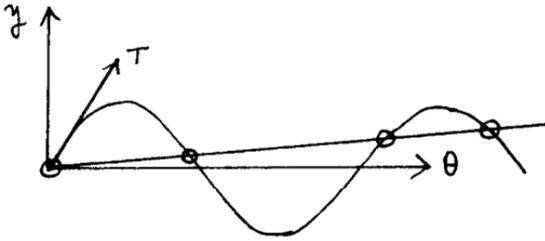
$\theta_0 = -10,7 \text{ rd}$. Il a fallu plus d'un tour pour réaliser l'équilibre.

$$\Delta g = \frac{2C}{ml} \Delta \theta = 8 \text{ mGal}$$

$$2.1. \quad mgl \sin \theta = C\theta$$

Les solutions de cette équation peuvent s'obtenir graphiquement par intersection de la droite d'équation $y = \frac{C}{mgl} \theta$ et de la courbe $y = \sin \theta$

Si $\frac{C}{mgl} < 1$ (tente de la tangente à l'origine) il y a plusieurs solutions



2.2. La solution est unique : $\theta = 0$ si $C > mgl$, $C_0 = mgl$

2.3. Le mouvement de m satisfait à

$$m g l \sin \theta - C \theta = m l^2 \ddot{\theta}$$

la période a pour expression

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m l^2}{C - mgl}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{g}}{\frac{C - C_0}{C_0}}}$$

$$2.4. \frac{C = C_0}{C_0} = \frac{4\pi^2 l}{gT^2} = 1,61 \cdot 10^{-2}$$

$$2.5. T = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{C - C_0}} \text{ conduit à } \frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\Delta(C - C_0)}{C - C_0}$$

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{C_0}{C - C_0} \frac{\Delta g}{g}$$

$$\Delta g = 2g \frac{C - C_0}{C_0} \frac{\Delta T}{T} \text{ alors que } \Delta g' = 2g \frac{\Delta T}{T}$$

numériquement $\Delta g = 3,2 \text{ m Gal} = 0,016 \Delta g'$. La comparaison des précisions s'impose d'elle-même.

3.1 Si on désigne par T la tension du ressort

$$T \cdot OH = mgb \cos \theta$$

$$\text{or } T = k(l - l_0) \text{ et } OH = \frac{ab \cos \theta}{l}$$

On obtient $\frac{1}{l_0} = \frac{ka}{ka - mg}$, ce qui impose $ka > mg$

3.2. D'après le schéma

$$l^2 = a^2 + b^2 - 2ab \sin \theta \approx a^2 + b^2 - 2ab \theta$$

L'utilisation des 2 expressions de l^2 conduit à

$$\theta = \frac{a^2 + b^2}{2ab} - \frac{k^2 a l_0^2}{2b(ka - mg)^2}$$

$$3.3. \text{ d'où } \frac{d\theta}{dg} = - \frac{mk^2 a l_0^2}{b(ka - mg)^3}$$

Pour obtenir $g \frac{d\theta}{dg}$ on multiplie l'expression précédente par $ka \frac{l - l_0}{ml}$ qui est une expression de g . Après quelques lignes de calculs, il vient

$$g \frac{d\theta}{dg} = \frac{l - l_0}{l_0} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)$$

L'appareil est d'autant plus sensible que l_0 est faible.

3.4. La poussée d'Archimède intervient dans l'équilibre. Or elle est variable puisqu'elle dépend de la pression de l'air. Pour s'en affranchir il convient de placer le gravimètre dans le vide.

Enfin la température doit être stable, car elle a une influence sur la constante du ressort.

Remarques

1. Les gravimètres à ressorts mécaniques sont supplantés par les gravimètres dits « supraconducteurs » qui sont des gravimètres relatifs de meilleure précision. Le ressort est remplacé par le champ magnétique créé par le courant circulant dans des bobines supraconductrices. Ce champ provoque la lévitation d'une sphère supraconductrice asservie.

2. Il existe des gradiomètres, sortes d'accéléromètres, qui mesurent le gradient d'accélération de la pesanteur. On projette de lancer un satellite héliosynchrone équipé d'un tel instrument. Les résultats qu'on en espère, vont permettre d'établir des expressions du potentiel de gravitation sous la forme d'une série d'harmoniques, avec pour conséquences entre autres, une meilleure définition du géoïde, le calcul précis des trajectoires de satellites...

3. Les gravimètres relatifs suffisent à de nombreux domaines d'application, tels que la prospection. L'existence de gravimètres absolus a donné lieu à des projets plus ambitieux. Voici les principales applications :

— Amélioration des cartes gravimétriques.

— Étalonnage des gravimètres relatifs.

— Étude de tous les mouvements de matière, tels que déplacements glaciaires, séismes et études tectoniques.

— Étude des marées gravimétriques et de la variation séculaire du champ de gravitation.

4. Actuellement la précision des gravimètres absolus semble limitée par la variation de longueur d'onde de la source laser, provoquée par des variations de pression. Les gravimètres absolus équipés d'un interféromètre au vide parfait, attendraient la précision relative de 10^{-9} .

N.B. - Ces renseignements m'ont été fournis par le BIPM (Bureau International des Poids et Mesures) et le BRGM (Bureau de Recherches Géologiques et Minières).

J. ALLÉE et les membres du Jury.

Vient de paraître

**Spécial Concours Énoncés de CAPES +
Agrégation, (externes et internes).**

Pour se procurer ce bulletin, envoyer la somme de 46 F
(Étranger + 5 F) à :

U.d.P. - 44, boulevard Saint Michel - 75270 PARIS Cedex 06

CCP : Paris 2113-81 T

GRAVIMETRE ABSOLU TRANSPORTABLE
BIPM **JAEGGER**
Vue générale

