

## Trois expériences d'électricité

Ces montages simples, se prêtant à une facile description mathématique, sont dus à la présence sur le marché de composants électroniques modernes qui permettent de réaliser de manière quasi parfaite certaines fonctions (multiplication, résistance négative, retard...).

Il est donc possible de les utiliser pour illustrer quelques-unes de nos leçons.

### A. VALEUR MOYENNE DU PRODUIT DE DEUX FONCTIONS SINUSOÏDALES DE MEME FREQUENCE.

Principe du Wattmètre.

Si un récepteur, alimenté sous une tension  $u(t)$ , absorbe un courant  $i(t)$  (fig. 1), il consomme une puissance instantanée  $p(t) = u(t) \cdot i(t)$ . En régime permanent, on s'intéresse à la puissance moyenne  $P = u \cdot i$ .

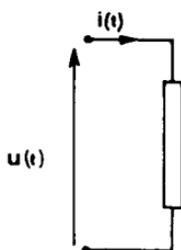


Fig. 1

Ainsi en régime sinusoïdal :

$$u = U \sqrt{2} \cos \omega t.$$

$$i = I \sqrt{2} \cos (\omega t - \varphi).$$

$$p = UI \cos \varphi + UI \cos (2 \omega t - \varphi).$$

$$P = UI \cos \varphi.$$

#### 1. Valeur moyenne du produit de deux fonctions sinusoïdales de même fréquence.

Le multiplicateur du montage représenté sur la figure 2 est l'élément essentiel du montage. C'est un circuit intégré au prix abordable (300 F), facile à mettre en œuvre, et qui réalise le produit des deux tensions appliquées entre les bornes X et M d'une part, Y et M de l'autre. (Note 1).

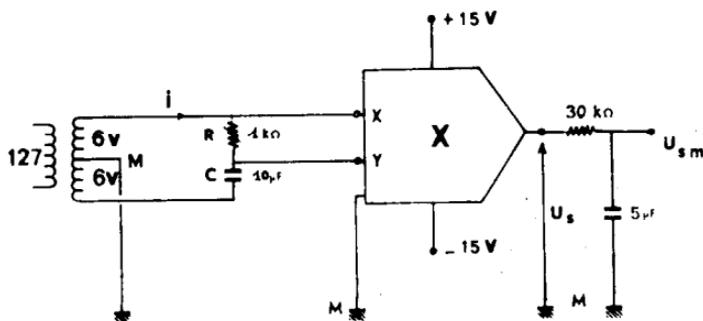


Fig. 2

(En réalité  $U_s = \frac{U_x \cdot U_Y}{10}$ ).

Le réseau déphaseur RC permet de faire varier le retard  $\varphi$  de  $U_Y$  par rapport à  $U_x$  selon la relation  $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = RC\omega$  (fig. 3).

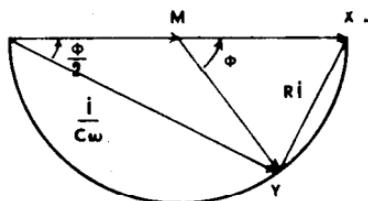


Fig. 3

A la sortie, on peut observer à l'oscilloscope la tension  $U_s = \frac{U_x \cdot U_Y}{10}$ , ou bien la valeur moyenne de  $U_s$  aux bornes de  $C_s$ . Un oscilloscope utilisé en X, Y montre le déphasage de  $U_Y$  sur  $U_x$ . Un autre oscilloscope, utilisé sur les entrées continues, montre par exemple  $U_x$  et  $U_s$  (fig. 4).

## 2. Réalisation d'un milliwattmètre.

Il faut convertir l'intensité absorbée par le récepteur en tension applicable au multiplieur. Une très faible résistance placée en série avec la charge et suivie d'un amplificateur de gain

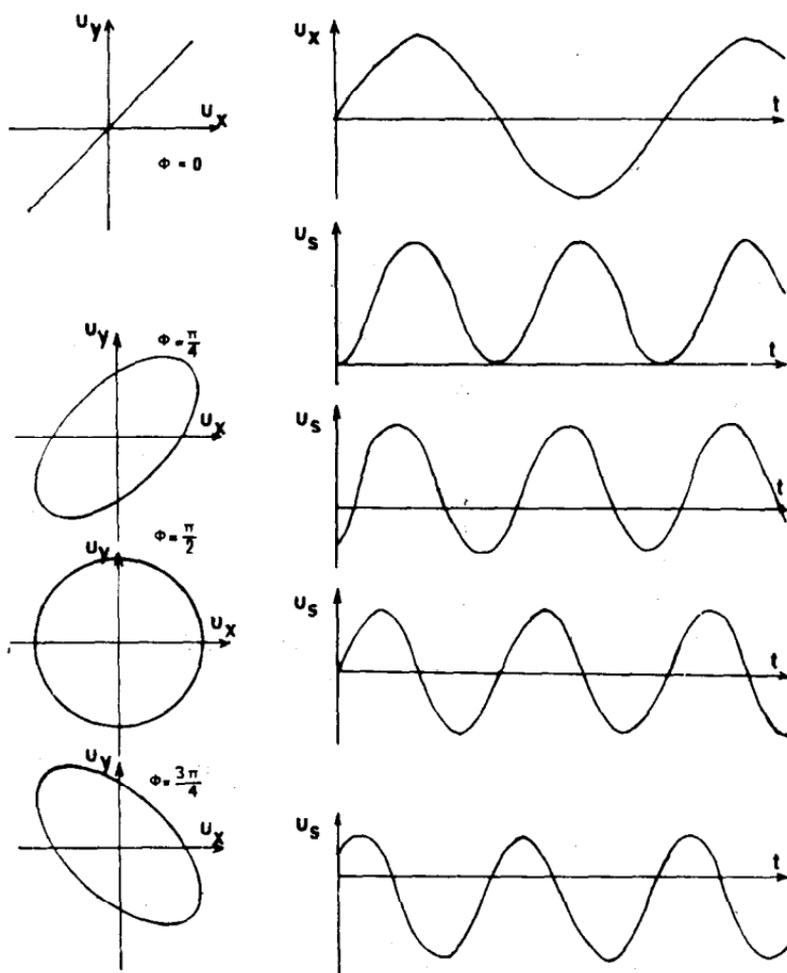


Fig. 4

connu (nous avons utilisé un amplificateur opérationnel TBA 221 (5 F) monté ici en amplificateur inverseur de gain - 10).

Le voltmètre à cadre mobile placé à la sortie (résistance  $100 \text{ K}\Omega/\text{volt}$ ) donne automatiquement la tension de sortie moyenne.

Avec les valeurs utilisées, la puissance dissipée dans la charge, exprimée en Watts, est numériquement égale à la tension moyenne lue sur le voltmètre.

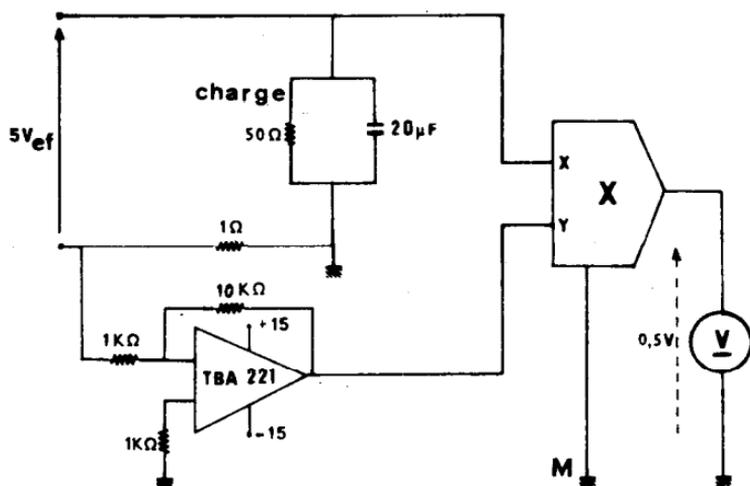


Fig. 5

## B. OSCILLATEUR A RESISTANCE NEGATIVE.

Ce montage utilise essentiellement la caractéristique  $U = f(I)$  d'un dipôle réalisé simplement à l'aide d'un amplificateur opérationnel et de trois résistances (Note 2).

Selon que l'on considère ce dipôle, *a priori* comme un générateur (fig. 6) ou un récepteur (fig. 7), on dit qu'il délivre une tension proportionnelle au courant débité, ou qu'il se caractérise par une résistance « négative ».

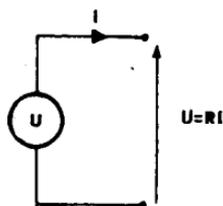


Fig. 6

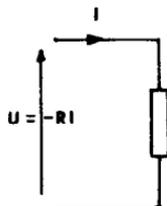


Fig. 7

### 1. Montage.

Soit un circuit R, L, C série constitué d'une bobine Leybold de 1000 spires par exemple ( $L' = 40$  mH,  $r = 10$  Ω aux basses fréquences), d'un condensateur de capacité  $1$  μF (très supérieure à la capacité répartie de la bobine), et du dipôle à résistance négative décrit dans la note 2.

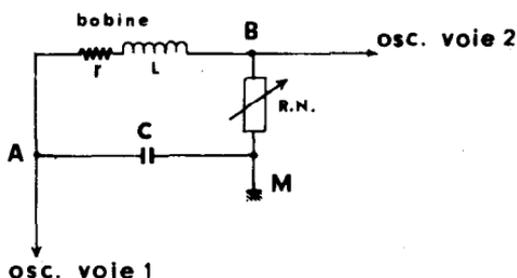


Fig. 8

La résistance négative  $-R$  est d'abord réglée à  $-5 \Omega$ .

L'observation à l'oscilloscope se fait entre le point A et la masse.

Aucune tension cohérente n'y est décelée tant que  $R < r$ , c'est-à-dire tant que la résistance totale du circuit est positive. Celle-ci amortit en effet toute oscillation qui pourrait prendre naissance à partir de la tension de bruit générée par les résistances.

Cependant, lorsque  $R \simeq r$  (on fait varier  $R$  par sauts de  $1 \Omega$  ou  $0,1 \Omega$ ), une oscillation prend naissance dont on perçoit très bien la croissance — et même la loi de croissance, exponentielle, sur un oscilloscope rémanent.

## 2. Observations.

a) C'est cette phase du phénomène qui correspond à la solution de l'équation différentielle  $\alpha Y'' + \beta Y' + \gamma Y = 0$  lorsque  $\beta \simeq 0$  : une solution sinusoïdale, d'amplitude indéterminée et de période  $T = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} = 2\pi \sqrt{LC}$ .

En fait, la croissance de l'amplitude des oscillations est limitée par la non linéarité de la caractéristique  $U = f(I)$  de la résistance négative (fig. 9).

Ceci est parfaitement visible en observant la tension entre B et masse (oscillations parfaitement sinusoïdales pendant la phase de croissance, présentant de la distorsion dès que l'amplitude se stabilise).

b) La fréquence des oscillations se règle par la valeur de C. Comme la résistance équivalente  $r$  de la bobine augmente avec la fréquence  $f$ , la valeur de  $R$  croît lorsque C diminue, et

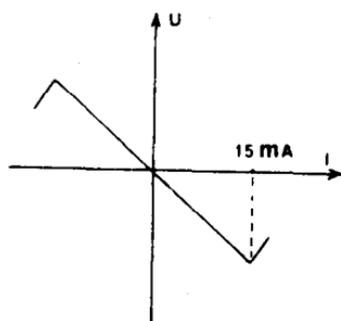


Fig. 9

sa mesure peut constituer une mesure de la variation de  $r$  avec  $f$ , tandis que la mesure de  $f$  entraîne celle de  $L$  par la relation  $LC\omega^2 = 1$ .

### C. PROPAGATION D'ONDES TRANSITOIRES DANS UNE LIGNE CO-AXIALE.

Réalisation d'impulsions, dérivation.

L'expérience est réalisée à partir de câble coaxial standard (coût approximatif : 150 F les 100 m); elle nécessite aussi l'emploi d'un générateur pouvant fournir des signaux carrés ou sinusoïdaux à 100 KHz.

On sait que les ondes transversales ( $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  dans les plans d'onde) peuvent se propager dans les lignes bifilaires, et que la vitesse de propagation  $v$  est donnée, si  $\epsilon$  est la constante diélectrique de l'isolant, par  $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$ .

La transversalité de ces ondes permet d'ailleurs de remplacer la description  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  par celle plus familière dans les états quasi stationnaires de  $U$  et  $I$ .

La transversalité de ces ondes permet d'ailleurs de remplacer

la description  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  par celle plus familière dans les états quasi stationnaires de  $U$  et  $I$ .

#### 1. Propagation d'une onde dans un câble coaxial sans pertes.

La vitesse  $v$  étant indépendante de la fréquence, tout signal doit se propager sans déformation dans une ligne sans pertes. (Les différentes composantes de la série de Fourier s'y propagent de la même manière). La figure 10 fixe nos conventions pour le repérage de  $U$  et  $I$  dans un plan.

Pour une onde se propageant vers la droite, on a  $U = Z_c I$ ,  $Z_c$  impédance caractéristique de la ligne  $= \sqrt{\frac{L}{C}}$ ; ici  $Z_c = 50 \Omega$ .

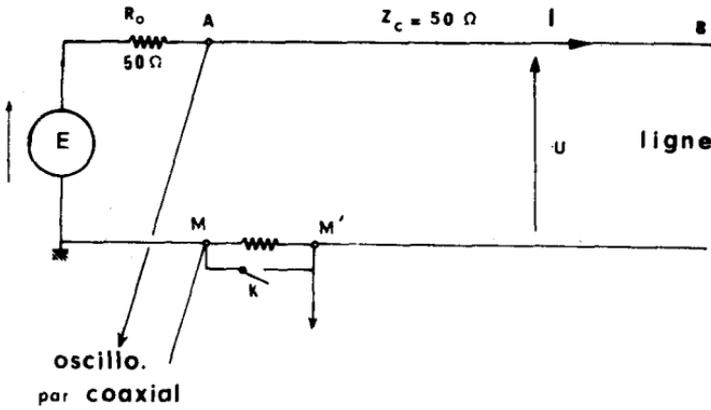


Fig. 10

Le générateur a également une impédance interne de  $50 \Omega$ . Si, à l'instant  $t = 0$  la f.e.m. du générateur s'établit à la valeur  $E$ , pendant le trajet  $AB$  du front d'onde, la tension entre  $A$  et  $M$  vaut  $U_{AM} = \frac{E}{2}$  (la ligne se comporte comme une résistance de  $50 \Omega$ ).

2. Réflexion à une extrémité.

Si la ligne est fermée sur une impédance terminale  $Z_T$ , on peut écrire en posant :  $I_i$  courant incident compté positivement de gauche à droite,  $I_r$  courant réfléchi compté positivement de droite à gauche :

$$U = Z_0 (I_i + I_r) \quad I = I_i - I_r$$

$$q = \frac{I_r}{I_i} = \frac{Z_T - Z_0}{Z_T + Z_0}, \quad (\text{Note 3})$$

a) Cas d'une ligne court-circuitée en  $B$  :

$$q = -1$$

A mesure que l'onde se réfléchit de  $B$  vers  $A$ , le courant double dans la ligne, ( $I = I_i - (-I_i) = 2I_i = \frac{E}{R_0}$ ), tandis que la tension s'annule. Au bout d'un temps  $\tau = \frac{2l}{v}$  cette situation arrive en  $A$ . Elle est alors définitive car l'impédance du générateur étant égale à  $Z_0$ , il n'y a pas de nouvelle réflexion.

Si le générateur délivre à vide un signal  $E(t)$ , on observe en A, sur un oscilloscope une tension  $\frac{E(t) - E(t - \tau)}{2}$ .

Les diagrammes de la figure 11 illustrent ce résultat.

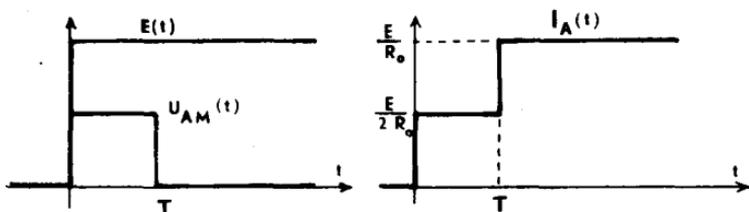


Fig. 11

b) Cas d'une ligne ouverte :

$$\rho = 1$$

Le courant réfléchi est égal au courant incident. Au bout d'un temps  $\tau$ , le courant en A est nul :  $I_A(t) = \frac{E(t) - E(t - \tau)}{2R_0}$

La tension réfléchie s'ajoute à la tension incidente :

$$V_{AM}(t) = \frac{E(t) + E(t - \tau)}{2}$$

Une petite résistance insérée entre M et M' permet de visualiser l'onde de courant.

c) Cas d'une résistance quelconque :

Cette étude doit être faite. Elle permet de trouver l'impédance caractéristique du câble (valeur de la résistance qui annule les réflexions, soit, ici :  $50 \Omega$ ).

### 3. Observation pratique.

On rend le phénomène récurrent pour une observation commode à l'oscilloscope, en prenant par exemple des signaux carrés à la fréquence de 100 KHz. La constante diélectrique du polyéthylène qui constitue l'isolant du câble utilisé vaut

$$\epsilon_r = 2,25 \quad \text{donc} \quad v = \frac{3 \times 10^8}{1,5} = 2 \times 10^8 \text{ m/s.}$$

$$\text{Pour } l = 100 \text{ m} \quad \tau = \frac{2l}{v} = 10^{-6} \text{ s} \quad \text{soit } 1 \mu\text{s.}$$

La mesure de la largeur des impulsions obtenues (fig. 12) constitue d'ailleurs une bonne mesure de la vitesse des ondes électromagnétiques dans le câble.

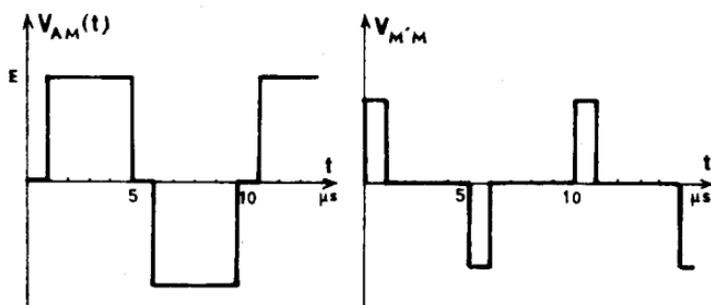


Fig. 12

#### 4. Application à la dérivation d'une fonction.

La tension  $V_{AM}$  lorsque le câble est court-circuité, ou la tension  $V_{M'M}$  lorsque le câble est ouvert sont de la forme

$$k (E(t) - E(t - \tau)).$$

Si  $\tau$  est faible devant la période de  $E(t)$  cette quantité s'écrit encore  $k E'(t) \times \tau$ .

L'observation en Lissajous de  $V_{AM}(t)$  et  $V_{M'M}(t)$  dans le cas où  $E(t)$  est une sinusoïde de 10<sup>4</sup> Hz et où le câble est ouvert

fait bien apparaître un déphasage de  $\frac{\pi}{2}$ .

NOTE 1

#### PRINCIPE D'UN MULTIPLIEUR

Le problème consiste à réaliser à partir de deux tensions  $U_1$  et  $U_2$ , une tension  $U_s = k \cdot U_1 \cdot U_2$ .

On peut réaliser ceci de plusieurs manières, nous en citons trois :

##### 1. Utilisation de l'effet Hall.

On applique une des tensions,  $U_1$ , aux bornes d'un petit bobinage, elle crée une induction magnétique  $B = \alpha U_1$ . Un courant  $I$  proportionnel à  $U_2$  est alors envoyé dans une sonde semi-conductrice convenablement placée dans le champ magnétique.

La tension de Hall,  $U_H = \frac{R_H}{d} BI$  est bien de la forme  
 $U_H = k \cdot U_1 \cdot U_2$ .

## 2. Emploi de générateurs de fonctions.

Un amplificateur opérationnel (\*) inséré dans un montage simple permet de réaliser l'élévation au carré d'une tension. Comme on sait, par ailleurs, réaliser la somme ou la différence de deux tensions, on réalise à partir de  $U_1$  et  $U_2$  les opérations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} a &= U_1 + U_2 & a^2 &= U_1^2 + U_2^2 + 2 U_1 U_2 \\ b &= U_1 - U_2 & b^2 &= U_1^2 + U_2^2 - 2 U_1 U_2 \end{aligned} \right\} a^2 - b^2 = 4 U_1 U_2$$

## 3. Mise en œuvre de la variation de transconductance des transistors.

La transconductance — ou pente — d'un transistor bipolaire  $\left( S = \frac{i_c}{v_{be}} \right)$  utilisé en courants faibles est proportionnelle au courant moyen de collecteur  $I_c$ . La tension variable de sortie  $U_s = -S R_c v_{be}$  est donc de la forme  $U_s = \alpha I_c v_{be}$ . On réalise donc un courant  $I_c$  proportionnel à l'une des tensions,  $U_2$ , tandis que  $U_1$  est appliqué aux bornes d'entrée d'un amplificateur différentiel à transistors, polarisés par  $I_c$ . La tension de sortie répond au problème.

C'est un multiplieur de ce type que nous avons utilisé.

Multiplieur/Diviseur Modèle 4094/15 C + support.

Impédance d'entrée : 20 K $\Omega$ .

Impédance de sortie : 7,5 K $\Omega$ .

Excursion d'entrées X et Y :  $\pm 10$  V.

Société S.F.P.T.A. — 13, rue Tiquetonne — 75009 Paris.

## NOTE 2

Tout amplificateur opérationnel d'usage général convient pour la réalisation d'une résistance négative. Nous avons utilisé le circuit intégré TAA 521 (coût : 5 F).

## Principe.

Un amplificateur opérationnel parfait comporté deux entrées  $e^+$  et  $e^-$ , n'absorbant aucun courant (impédance d'entrée infinie), et telle que la tension de sortie  $V_s$  vérifie :

$$V_s = A (e^+ - e^-) \text{ ceci suppose une impédance de sortie nulle.}$$

(\*) N.D.L.R. : Au sujet des amplificateurs opérationnels, voir B.U.P. n° 556, page 1025 et page 1043.

En outre,  $V_s$  étant limité ( $\pm 10$  V), et  $A$  très grand ( $\approx 10^6$ ), on peut toujours poser  $e^+ \approx e^-$  quand le dispositif n'est pas saturé.

Sur le montage de la figure 13, on a donc  $U = e^+ \approx e^-$ .

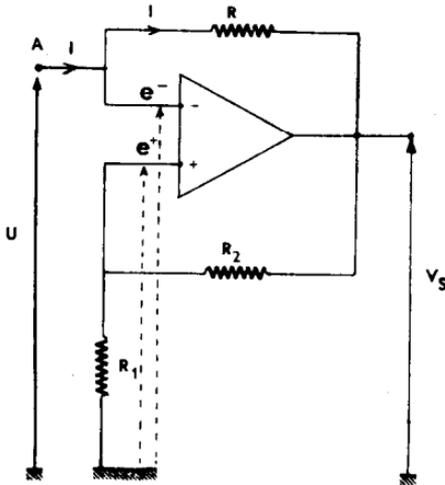


Fig. 13

$$\text{Or } e^+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s; \quad e^- = RI + V_s.$$

$$\text{Soit } U = RI + \frac{R_1 + R_2}{R_1} U; \quad \text{d'où } U = -\frac{R_1}{R_2} RI.$$

En prenant  $R_1 = R_2 = 1 \text{ K}\Omega$ , on obtient donc entre le point A et la masse l'équivalent d'une résistance négative de valeur  $-R$ . Le relevé de la caractéristique  $U = f(I)$  doit être fait en plaçant en série une résistance de charge  $R_L$  de valeur supérieure à  $R$  (se procurer auprès du détaillant les supports et le schéma de brochage. Les tensions d'alimentation (+ 15 V, - 15 V) ne sont pas critiques et peuvent être réalisées avec des piles ou des accus).

#### NOTE 3

Les démonstrations de cette proposition abondent dans les ouvrages traitant des lignes. Il est intéressant de voir que nous retrouvons un résultat analogue sur un exemple simple.

Soit un générateur de force électromotrice  $E$ , de résistance interne  $R_C$ . Il débite dans une résistance  $R_T$  (fig. 14).

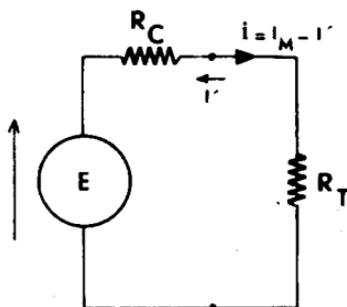


Fig. 14

Le courant  $i$  s'établit à la valeur  $i = \frac{E}{R_C + R_T}$ . Or, pour que la puissance dissipée dans  $R_T$  soit maximale, il faut que  $R_{TM} = R_C$ .

Le courant correspondant vaut alors  $I_M = \frac{E}{2R_C}$ .

Dans le cas général, on peut considérer que  $i$  est dû à la superposition de ce courant  $I_M$  et d'un courant « réfléchi »  $I'$  tel que  $I' = I_M - i$ ,

$$\text{soit } I' = \frac{E}{2R_C} \frac{R_T - R_C}{R_T + R_C} \text{ ou } \frac{I'}{I_M} = q = \frac{R_T - R_C}{R_T + R_C}.$$

R. MOREAU,

*Physique Agrégation*

*Université de Bordeaux I (Talence).*