Diffusion et conduction thermique en régime permanent : Analogies électrostatiques

par Jean-Marie DONNINI,
Université de Provence
3, place Victor-Hugo, 13331 Marseille Cedex 3.

INTRODUCTION.

Traditionnellement, une importance particulière est apportée dans l'enseignement de la physique à la mécanique, l'optique et l'électrostatique. Les raisons de ce choix sont partiellement d'ordre historiques mais elles sont aussi dues au caractère fondamental de ces parties de la physique. Il est vrai qu'heureusement dans les problèmes « physiques », la thermodynamique est de plus en plus présente rapprochant souvent les modèles de la réalité expérimentale.

Il n'en reste pas moins que, généralement, c'est un enseignement détaillé de l'électrostatique qui est donné et que l'étudiant possède la connaissance de divers concepts et de techniques mathématiques développés en ce domaine.

Nous avons choisi ici de montrer comment on peut les utiliser pour étudier simplement des phénomènes de diffusion et de conduction thermique souvent bien délaissés.

Au-delà de l'intérêt pratique, d'un point de vue didactique, il est bon de reconnaître dans les lois qui régissent des phénomènes différents, ce qu'il y a de commun et de général et, bien sûr, d'en tirer profit.

Rappelons d'abord les lois fondamentales de l'électrostatique sous une forme utile pour la suite.

I. LES LOIS FONDAMENTALES DE L'ELECTROSTATIQUE ET L'OUTIL MATHEMATIQUE.

La source de la perturbation électrostatique dans le vide est un scalaire : la densité de charge $\rho(r)$ au point r ; la perturbation de l'espace (qui en est la conséquence) est le champ électrique $\vec{E}$ dont le sens physique provient de la loi de COULOMB.

Dans le cas de distributions continues, l'effet ($\vec{E}$) est relié à la cause [$\varrho(r)$] par le théorème de GAUSS :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}. \qquad (1)$$

unités S.I.

D'autre part, le champ $\vec{E}$ dérive du potentiel scalaire U et :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, U. \qquad (2)$$

Nous écrirons (1) et (2) sous la forme :

$$\operatorname{div} \vec{D} = \varrho \qquad (3)$$

$$\vec{D} = -\varepsilon_0 \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, U \qquad (4)$$

en introduisant le déplacement électrique dans le vide (la permittivité apparaît ainsi dans la relation $\vec{D}$, U).

Une conséquence de (3) et (4) devient l'équation de LAPLACE-POISSON :

$$\Delta U + \frac{\varrho}{\varepsilon_0} = 0. \qquad (5)$$

Rappelons que $\vec{D}$ et U peuvent être déterminés dans le vide par les intégrales :

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\varrho}{r}\, d\tau \qquad (6)$$

$$\vec{D} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{r}}{r^3}\, \varrho\, d\tau. \qquad (7)$$

Ceci étant, revoyons quelques-unes des méthodes communément employées en électrostatique ; trois d'entre elles sont d'un intérêt particulier :

(1) L'emploi du théorème de GAUSS, qui permet souvent une détermination de $\vec{D}$ lorsque la distribution possède une certaine symétrie.

(2) L'intégration directe des relations (6) et (7).

(3) La méthode dite des images électriques particulièrement intéressante lorsqu'on cherche des analogies ou la « simplification » d'un problème. La méthode est directement issue des propriétés fondamentales de solutions de l'équation de LAPLACE : les conditions aux limites déterminent la fonction potentiel à une

constante additive près. Il s'agit soit des conditions de DIRICHLET (valeurs des potentiels, fixées sur des surfaces fermées) ou de celles de NEUMANN (où $\vec{D}$ est imposé sur des surfaces fermées).

Voyons maintenant les lois de diffusion et de la thermoconduction en régime permanent.

II. LES LOIS DE LA THERMOCONDUCTION ET DE LA DIFFUSION EN REGIME PERMANENT.

1) Thermoconduction.

Si l'on s'intéresse strictement à la conduction thermique (excluant tout autre phénomène), la « source » physique peut être considérée comme une distribution volumique de puissance calorifique ϱ_Q dans le milieu ; suivant ce point de vue, l'effet est caractérisé par le flux de chaleur $\vec{j}_Q$ ($\vec{j}_Q \cdot \vec{ds}$ donnant la puissance thermique s'écoulant à travers $\vec{ds}$).

Dans le cas de la conduction thermique *pure* en régime permanent, la conservation de l'énergie (donc purement sous forme de chaleur) s'écrit :

$$\operatorname{div} \vec{j}_Q = \varrho_Q \tag{8}$$

et $\vec{j}_Q$ est relié à la Température T du milieu par la loi de FOURIER :

$$\vec{j}_Q = -k \, \overrightarrow{\operatorname{grad}} \, T \tag{9}$$

où k est la conductivité du milieu supposé isotrope.

2) Diffusion.

Nous décrivons la diffusion en régime permanent par les quantités suivantes :

— la densité ϱ_n des particules créées par unité de volume et de temps,

— la densité de flux $\vec{j}_n$ de ces particules ($\vec{j}_n \cdot \vec{ds}$ donnant le nombre de particules s'écoulant à travers ds par unité de temps).

Le bilan concernant le nombre n de particules par unité de volume en régime permanent est alors exprimé par la loi de conservation :

$$\operatorname{div} \vec{j}_n = \varrho_n. \tag{10}$$

Nous supposons, d'autre part, que la diffusion se fait suivant la loi de FICK :

$$\vec{j}_n = -D\ \overrightarrow{\text{grad}}\ n \qquad (11)$$

où : n est le nombre de particules par unité de volume,

D est la constante de diffusion du milieu.

III. LES ANALOGIES.

Il suffit de réécrire les relations fondamentales vues précédemment, soit :

Electrostatique : $\text{div}\ \vec{D} = \varrho$ et $\vec{D} = -\varepsilon_0\ \overrightarrow{\text{grad}}\ U$

Conduction : $\text{div}\ \vec{j}_Q = \varrho_Q$ et $\vec{j}_Q = -D\ \overrightarrow{\text{grad}}\ T$

Diffusion : $\text{div}\ \vec{j}_n = \varrho_n$ et $\vec{j}_n = -k\ \overrightarrow{\text{grad}}\ n$.

Il apparaît pour chaque paire de relations dans les trois cas envisagés une évidente similitude.

Dans chaque cas, un scalaire (ϱ, ϱ_Q ou ϱ_n) est considéré comme une source et un vecteur ($\vec{D}$, $\vec{j}_Q$, $\vec{j}_n$) comme l'effet ; le milieu est caractérisé par un scalaire (ε_0, k ou D) qui intervient dans la relation entre le vecteur et un potentiel scalaire (U, T ou n). Les analogies entre ces grandeurs permettent à leur tour d'établir d'autres analogies entre des quantités qui en dérivent, ce qui est résumé sur le tableau suivant :

TABLEAU DES ANALOGIES

Electrostatique	Thermoconduction	Diffusion
$\vec{D}$: déplacement électrique	$\vec{j}_Q$: densité de flux de chaleur	$\vec{j}_n$: densité de flux de particules
ϱ : densité de charge	ϱ_Q : puissance thermique volumique	ϱ_n : nombre de particules crées par unité de volume et par unité de temps
U : potentiel électrostatique	T : température	n : densité volumique des particules créées
ε_0 : permittivité du vide	k : conductivité thermique du milieu	D : coefficient de diffusion
Q : charge	P_Q : puissance thermique	N_c : nombre de particules créées par unité de temps

On pourra donc mettre tout cela à profit pour résoudre un problème de conduction ou de diffusion qui présente les mêmes données formelles que le problème correspondant d'électrostatique : il suffira de faire la transposition convenable des variables dans la solution de ce dernier.

Il est bon de noter tout l'intérêt que l'on doit porter sur l'examen des données qui déterminent le problème avant de passer à la solution de son analogue (par exemple si une constante additive n'a pas de signification pour ce qui est de la fonction potentiel U, il en va tout autrement en ce qui concerne la grandeur correspondante T (la Température) dans le problème de conduction).

IV. EXEMPLES.

Pour illustrer la méthode issue des analogies présentées précédemment, traitons deux exercices.

1) Conduction thermique.

Soit un milieu de conductivité k limité par deux surfaces coaxiales Σ_1 et Σ_2 de rayons R_1 et R_2 ($R/l \ll 1$) (fig. 1).

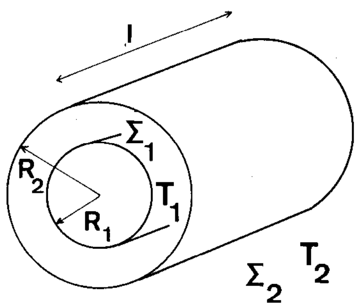

Fig. 1

Envisageons à l'intérieur de Σ_1 une source uniforme de puissance thermique P_Q/l par unité de longueur ; Σ_1 et Σ_2 sont respectivement aux températures T_1 et T_2.

Le tableau des analogies montre que le problème correspondant est, en électrostatique, celui d'une distribution uniforme de charge Q/l par unité de longueur à l'intérieur de Σ_1 où le potentiel prend la valeur U_1 alors qu'il vaut U_2 sur Σ_2.

Si on veut exprimer P_Q et $\vec{j_Q}$ à l'aide de T_1 et T_2 et des paramètres géométriques, il suffit de déterminer Q et $\vec{D}$ du problème électrostatique en fonction de U_1, U_2 et des paramètres géométriques.

On a, dans ce cas :

$$Q = (U_1 - U_2) \cdot 2\pi\varepsilon_0 \frac{l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

et :

$$D(r) = \frac{\varepsilon_0 (U_1 - U_2)}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot \frac{1}{r}.$$

La transposition des variables donne :

$$P_Q = 2\pi kl \frac{(T_1 - T_2)}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

$$j_Q = \frac{k(T_1 - T_2)}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot \frac{1}{r}.$$

2) **Diffusion** (*).

Considérons maintenant une sphère de rayon R constituée d'un matériau radioactif où, par exemple, ϱ_n neutrons sont produits par unité de temps et de volume ; le milieu a la constante de diffusion D et nous supposons que, très loin de la source, la densité n_∞ de neutron par unité de volume est nulle. Déterminons le nombre de neutrons n_0 par unité de volume au centre de la sphère fig. 2).

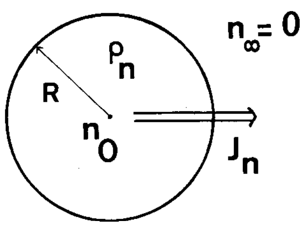

Fig. 2

(*) La méthode pouvait être mise à profit dans la composition de Physique d'Agrégation des Sciences physiques, option Physique 1975, V.

Le tableau des analogies montre que le problème électrostatique est formellement celui d'une distribution de charge ϱ (analogue de ϱ_n) dans le vide (ε_0 analogue de D), l'origine des potentiels étant prise à l'infini $n_\infty = 0$ impose $U_\infty = 0$).

Nous devons chercher la grandeur correspondante à n_0 soit V_0.

La solution s'obtient facilement :

$$U_0 = \varrho \frac{R^2}{\varepsilon_0}.$$

Soit, en effectuant la transposition des variables :

$$n_0 = \frac{\varrho_n R^2}{\varepsilon_0}.$$

CONCLUSION.

Pour conclure, faisons quelques remarques. Tout d'abord, nous avons particularisé le modèle électrostatique pour décrire la diffusion et la conduction ; un modèle électrocinétique aurait pu être évoqué (il est d'ailleurs à la base de la modélisation expérimentale commode des dispositifs électrostatiques qui est mise à profit dans la rhéographie).

Les raisons de notre choix supposent que c'est dans le cas de l'électrostatique que les techniques et les méthodes sont le mieux assimilées.

Enfin, il est bon de noter que, si les analogies exposées précédemment peuvent être intéressantes pour des applications pratiques et si elles sont utiles pour développer la vision de la généralité dans des structures mathématiques qui décrivent des phénomènes divers, l'utilisation de ces analogies ne doit pas cacher la réalité physique de problèmes différents, c'est-à-dire qu'une analogie n'est pas une identité.

BIBLIOGRAPHIE

— J.-D. JACKSON. — « *Classical Electrodynamics* ». John Wiley et Sons, New York, 1962.

— DURAND. — *Electrostatique.* Masson.

— BRUHAT. — *Electricité.* 7e édition. Masson, 1959.

— F. REIF. — « *Fundamentals of Statistical and thermal Physics* ». Mc Graw-Hill Kogakusha.

— J. P. HOLMAN. — « *Heat Transfer* » Mc Graw-Hill Kogakusha.