82e Année - N° 709 Publication mensuelle Décembre 1988

Bulletin de l'Union des Physiciens

Association de professeurs de Physique et de Chimie

# Les grandeurs physiques axiales

par Jean SIVARDIÈRE,
Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble.

**Résumé.**

En raison de difficultés mathématiques qui sont examinées dans cet article, il n'est pas possible d'introduire sans ambiguïté les grandeurs physiques axiales en se référant à la notion de produit vectoriel. Nous proposons donc de définir les grandeurs axiales à partir de considérations physiques, et de préciser en conséquence la définition et les propriétés de symétrie du produit vectoriel. Divers problèmes relatifs aux grandeurs axiales sont également discutés.

## INTRODUCTION.

Dans la plupart des ouvrages de physique, la distinction entre grandeurs polaires (ou grandeurs vraies) et grandeurs axiales (ou pseudo-grandeurs) est introduite mathématiquement : un vecteur axial est dit « de même nature qu'un produit vectoriel de deux vecteurs polaires », et un scalaire axial « de même nature qu'un produit mixte de trois vecteurs polaires » ou encore que le produit scalaire d'un vecteur polaire par un vecteur axial.

Ce point de vue se heurte à plusieurs difficultés :

— deux définitions, non équivalentes, du produit vectoriel se rencontrent dans la littérature. Laquelle faut-il privilégier ?

— les définitions du produit vectoriel sont incomplètes en ce sens qu'elles n'en précisent pas toutes les propriétés de symétrie.

Après avoir rappelé la convention d'orientation des angles, qui joue un rôle fondamental, nous examinons ces difficultés et proposons d'adopter un point de vue plus physique pour introduire les grandeurs axiales et définir de manière précise la notion de produit vectoriel et ses propriétés de transformation dans une opération géométrique.

## LA CONVENTION D'ORIENTATION DES ANGLES.

Pour pouvoir décrire la nature avec précision, le physicien a besoin d'établir une distinction entre la droite et la gauche ou — ce qui revient au même — orienter les angles, c'est-à-dire de différencier les deux sens possibles de rotation d'un point sur un cercle. Cette distinction est indispensable pour pouvoir préciser le sens d'enroulement des lignes de champ magnétique autour d'un fil parcouru par un courant électrique, le sens de rotation du plan de polarisation de la lumière à la traversée d'un liquide ou d'un solide, le sens de rotation d'un cyclone ou l'orientation d'un trièdre ou d'un enroulement hélicoïdal.

La convention généralement adoptée pour orienter les angles prend plusieurs formes équivalentes :

1° Soit $\Delta$ un axe orienté. Le sens positif de rotation autour de $\Delta$ (et par suite, le sens trigonométrique dans un plan perpendiculaire à $\Delta$) est celui de la rotation d'angle $\vartheta$ ($\vartheta \leqslant \pi$) qui amène le bras droit d'un observateur, traversé par $\Delta$ des pieds vers la tête, sur son bras gauche en passant devant lui. Ainsi, par rapport au référentiel de COPERNIC, la Terre tourne dans le sens positif autour de son axe orienté du pôle Sud vers le pôle Nord. De même, les doigts recourbés d'une main droite s'enroulent positivement autour du pouce tendu et orienté vers l'extérieur de la main.

2° Les « 3 doigts » (dans l'ordre : pouce, index et majeur) d'une main droite forment un trièdre direct.

On peut citer également les règles, équivalentes aux précédentes, du bonhomme d'AMPÈRE et du tire-bouchon de MAXWELL.

## LES DEFINITIONS DU PRODUIT VECTORIEL.

Le produit vectoriel $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ des 2 vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est un vecteur perpendiculaire au plan $\vec{A}$, $\vec{B}$. Son module est égal à l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{A}$ et $\vec{B}$. Reste à préciser son sens.

### Définition n° 1 :

Le sens de $\vec{C}$ est tel que le trièdre $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ est de même orientation que le trièdre de référence.

**Définition n° 2 :**

Le sens de $\vec{C}$ est tel que le trièdre $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ est direct, comme celui formé par les 3 doigts d'une main droite dans la convention habituelle d'orientation des angles.

La définition n° 1 est adoptée dans divers cours de mathématiques et dans le cours de mécanique de BRUHAT, la définition n° 2 est adoptée par exemple dans le cours de physique de BERKELEY ou dans les compléments de mathématiques de ANGOT.

La définition n° 1 fait intervenir explicitement le trièdre de référence : si on utilise un nouveau trièdre de référence, d'orientation opposée à celle du précédent, il faut changer le signe de $\vec{C}$. Elle est par contre indépendante de la convention d'orientation des angles : le fait que deux trièdres soient de même orientation est en effet une propriété intrinsèque de ces trièdres.

La définition n° 2 ne fait pas intervenir le trièdre de référence. Si par contre on renverse la convention d'orientation des angles, tous les trièdres changent d'orientation : il faut donc changer le signe de $\vec{C}$ pour que le trièdre $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ reste direct.

Bien entendu, quelle que soit la convention d'orientation des angles, les deux définitions s'identifient si on convient de n'utiliser que des trièdres de référence directs.

## LES COORDONNEES DU PRODUIT VECTORIEL.

Si on utilise la convention habituelle d'orientation des angles et si le trièdre de référence est direct, les coordonnées du produit vectoriel $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ sont données en fonction de celles de $\vec{A}$ et $\vec{B}$ par les formules classiques :

$$\begin{aligned} C_x &= A_y B_z - A_z B_y \\ C_y &= A_z B_x - A_x B_z \\ C_z &= A_x B_y - A_y B_x. \end{aligned} \qquad (1)$$

Remplaçons le trièdre direct $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ par le trièdre inverse $-\vec{i}$, $-\vec{j}$, $-\vec{k}$. Les coordonnées de $\vec{A}$ et de $\vec{B}$ changent de signe, celles du vecteur $\vec{C}$ donné par les formules (1) sont invariantes : ce vecteur $\vec{C}$ lui-même change donc de signe puisqu'il en est ainsi des vecteurs de base du repère. Par conséquent, les formules (1) donnent les coodonnées du produit vectoriel $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$, quelle que soit l'orientation du trièdre de référence, si on utilise la définition n° 1. Divers ouvrages, tels que le Cours de Physique de FEYNMAN (tome I), utilisent d'ailleurs ces formules comme définition — équivalente à la définition n° 1 — du produit vectoriel.

Si on utilise, au contraire, la définition n° 2, et la convention habituelle d'orientation des angles, les formules (1) précédentes ne sont valables qu'au signe près. Dans le cas général, $c$ désignant la chiralité du repère utilisé ($c = \pm 1$ suivant que le repère est direct ou inverse), les coordonnées du produit $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ sont données par :

$$\begin{aligned} C_x &= c\,(A_y B_z - A_z B_y) \\ C_y &= c\,(A_z B_x - A_x B_z) \\ C_z &= c\,(A_x B_y - A_y - B_x). \end{aligned} \qquad (2)$$

**LES PROPRIETES DE SYMETRIE DU PRODUIT VECTORIEL.**

Les définitions n$^{os}$ 1 et 2 du produit vectoriel ne précisent pas comment un produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{B}$ se transforme dans une opération de symétrie S. Rien ne prouve, en particulier, que le vecteur $\vec{A} \wedge \vec{B}$ se transforme comme un vecteur ordinaire, polaire, qui, par exemple, change de signe dans une symétrie-point ou dans une symétrie par rapport à un plan qui lui est perpendiculaire : en effet, la définition de $\vec{A} \wedge \vec{B}$ fait intervenir une convention qui peut *a priori* lui attribuer des propriétés originales. Cette remarque amène à adopter la définition suivante de l'image $S(\vec{A} \wedge \vec{B})$ dans l'opération de symétrie S :

$$S(\vec{A} \wedge \vec{B}) = (S\vec{A}) \wedge (S\vec{B}).$$

$\vec{A}$ et $\vec{B}$ étant des vecteurs polaires, les images $S\vec{A}$ et $S\vec{B}$ sont en effet définies sans ambiguïté. Il en est donc de même de $S(\vec{A} \wedge \vec{B})$.

Considérons alors un trièdre direct de référence $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ et leur produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{B}$. Effectuons une symétrie S par rapport à l'origine et cherchons $S(\vec{A} \wedge \vec{B})$. $S(\vec{A}) = -\vec{A}$; $S\vec{B} = -\vec{B}$, d'où : $S(\vec{A} \wedge \vec{B}) = -\vec{A} \wedge \vec{B}$ si nous utilisons la définition n° 1 du produit vectoriel *et* si nous considérons que S s'applique non seulement aux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ mais aussi aux vecteurs de base $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, si bien que le trièdre de référence est devenu inverse (fig. 1). Le résultat est iden-

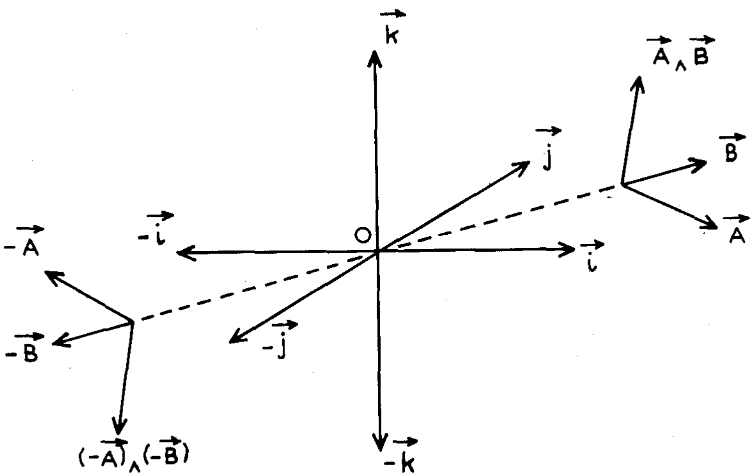


Fig. 1. — Symétrie-point d'un produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{B}$ si on symétrise aussi le trièdre de référence.

tique si nous utilisons la définition n° 2 *et* si nous considérons que S s'applique non seulement aux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ mais aussi à la main droite qui, dans la convention habituelle d'orientation des angles, sert à définir un trièdre direct.

A l'inverse, $S(\vec{A} \wedge \vec{B}) = +\vec{A} \wedge \vec{B}$, si nous utilisons la définition n° 1 en considérant que S n'agit pas sur le trièdre de référence, ou la définition n° 2 en considérant que S n'agit pas sur la main droite qui sert de référence. Nous dirons alors que $\vec{A} \wedge \vec{B}$ est un vecteur « extraordinaire », ou axial, puisque, contrairement à un vecteur ordinaire, il est invariant dans une symétrie-point (les conclusions seraient analogues si S était une symétrie par rapport à un plan parallèle à $\vec{A}$ et $\vec{B}$).

Plus généralement, si S est une rotation propre (de déterminant + 1), le produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{B}$ se comporte comme un vecteur polaire, que S s'applique ou non à l'observateur. Dans une telle rotation en effet, un trièdre de référence ne change pas d'orintation et une main droite reste une main droite. Par contre, si S est une rotation impropre (de déterminant —1), $\vec{A} \wedge \vec{B}$ se comporte comme un vecteur polaire si l'observateur est affecté par S, et comme un vecteur axial dans le cas contraire. Ces propriétés de symétrie ne dépendent pas de la définition (n° 1 ou n° 2) utilisée pour définir $\vec{A} \wedge \vec{B}$.

En définitive, nous voyons que la définition et les propriétés de symétrie d'un produit vectoriel, c'est-à-dire son caractère polaire ou axial, sont doublement arbitraires : on peut adopter la définition n° 1 ou la définition n° 2, et on peut considérer, ou non, qu'une opération de symétrie s'applique non seulement aux vecteurs de l'espace, mais aussi à l'observateur (trièdre de référence ou main droite).

Dans ces conditions on ne peut, sans ambiguïté, définir un vecteur axial comme étant « de même nature qu'un produit vectoriel ». Il est nécessaire de définir les grandeurs axiales d'un point de vue physique, sans référence à la notion de produit vectoriel. Les vecteurs polaires et les vecteurs axiaux étant de natures physiques différentes et possédant de ce fait des propriétés de symétrie différentes, on devra ensuite pouvoir les représenter par des êtres mathématiques différents : on adoptera donc une définition des produits vectoriels qui leur permettent de représenter les vecteurs axiaux, les vecteurs ordinaires représentant quant à eux les vecteurs polaires.

## INTRODUCTION PHYSIQUE DES GRANDEURS AXIALES.

De nombreuses grandeurs — dites polaires ou vraies — sont définies sans ambiguïté par la nature : en particulier, leur signe ne dépend d'aucune convention, ou d'aucune référence à un repère. C'est le cas de la longueur, du temps, de la masse, de l'énergie (scalaires) ; d'une translation, d'une vitesse, d'une accélération, d'une force (vecteurs).

Il est cependant nécessaire d'introduire d'autres grandeurs dites grandeurs axiales ou pseudo-grandeurs — dont le signe ne peut être fixé de manière absolue, mais seulement de manière arbitraire, par référence à une convention « humaine » d'orientation des angles. Ces grandeurs, dont il n'est pas possible de donner une définition intrinsèque, peuvent avoir un caractère scalaire (une seule composante) ou vectoriel (trois composantes).

### Scalaires axiaux :

On peut citer tout d'abord l'angle algébrique $\vartheta$ entre 2 vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ (et ses lignes trigonométriques impaires : Sin $\vartheta$, tg $\vartheta$), la vitesse angulaire $d\vartheta/dt$, l'accélération angulaire $d^2\vartheta/dt^2$. On remarque que pour attribuer un caractère algébrique à $\vartheta$, il faut préciser un axe (orienté arbitrairement) de rotation $\vec{u}$ perpendiculaire au plan $\vec{A}, \vec{B}$ ; l'image d'un angle $\vartheta$ (ensemble des vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{u}$) dans un miroir est l'angle $-\vartheta$ (fig. 2).

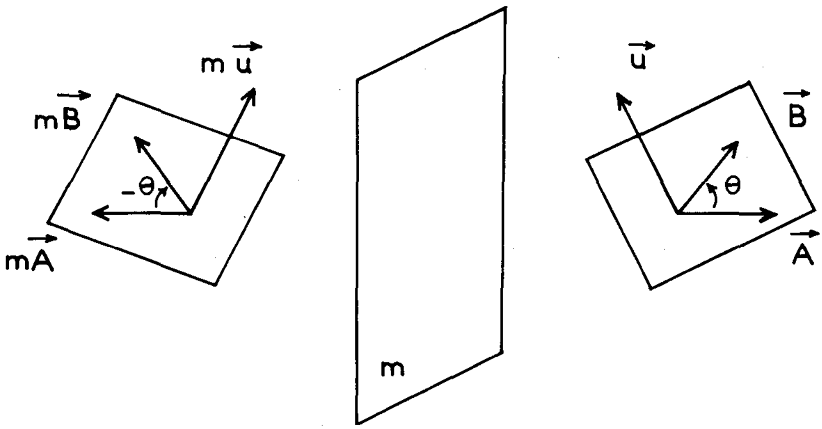


Fig. 2. — Image d'un angle $\vartheta$ dans un miroir *m*.

Par ailleurs, la nature présente des couples d'objets énantiomorphes, c'est-à-dire images l'un de l'autre dans un miroir mais non superposables par une rotation ou une translation (de tels objets ne possèdent ni centre ni plan de symétrie) :

— main (oreille) droite et main (oreille) gauche ; paire de gants ;

— vis, escalier, tire-bouchon ou hélice à droite et à gauche ;

— trièdre direct et trièdre inverse ;

— molécule droite et molécule gauche (stéréo-isomères) ;

— quartz droit et quartz gauche, ou cristaux dextrogyres et lévogyres d'acide tartrique (PASTEUR) ;

— tétraèdre irrégulier (ou toupie conique en rotation, ou ruban de MOEBIUS) et son image dans un miroir.

Il est alors naturel de définir la *chiralité*, grandeur discrète, bivaluée, permettant de distinguer les objets droits et les objets gauches. Pour cela, on associe arbitrairement à chaque objet un trièdre. Par exemple, à une main, on associe le trièdre formé par les « 3 doigts » ; à un tétraèdre OABC, on associe le trièdre formé par les 3 vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ ; à une hélice d'axe $\Delta$, orienté par le vecteur $\vec{u}$ d'origine O, on associe le trièdre $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, $\vec{u}$ ; $M_1$ et $M_2$ sont deux points de l'hélice se projetant sur $\Delta$ en $H_1$ et $H_2$ de telle sorte que $\overrightarrow{H_1H_2} \cdot \vec{u} = \vec{\delta} \cdot \vec{u} \geqslant 0$.

Si le trièdre ainsi défini est direct, on dit que l'objet est droit et de chiralité + 1 ; l'objet image est gauche, on dit qu'il est de chiralité — 1, puisque l'image d'un trièdre direct dans un miroir est un trièdre inverse.

Sont également des scalaires axiaux, comme l'angle algébrique ou la chiralité d'un objet, l'aire algébrique délimitée par un contour plan, fermé et orienté, l'aire A balayée par un vecteur d'origine fixe tournant dans un plan et ses dérivées $dA/dt$ et $d^2A/dt^2$ (vitesse et accélération aréolaires), le volume orienté d'un parallélépipède OABC (égal à son volume géométrique multiplié par la chiralité du trièdre $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$), le pas algébrique d'une hélice, le rayon de courbure algébrique d'une courbe plane, la torsion algébrique d'une courbe gauche.

**Vecteurs axiaux :**

Considérons une rotation d'angle $\vartheta$ d'un point M sur un cercle de centre O. Pour la décrire, on peut introduire le vecteur $\vec{\vartheta} = \vartheta\,\vec{u}$, $\vec{u}$ étant un vecteur porté par l'axe du cercle et tel que la rotation se fasse positivement autour de $\vec{u}$ (fig. 3 *a*). On voit que

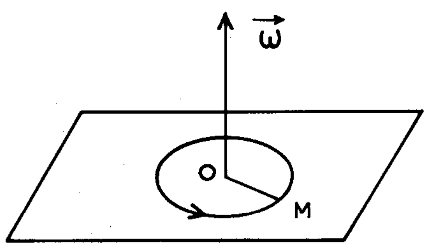


Fig. 3. — *a*) Vecteur rotation $\vec{\omega}$.

le sens de $\vec{u}$ est fixé par la règle du tire-bouchon (en général, au contraire, on oriente arbitrairement $\vec{u}$, et on peut alors attribuer un signe à l'angle $\vartheta$). Si M est animé d'un mouvement de vitesse angulaire $\omega = d\vartheta/dt$, on introduit de même le vecteur vitesse angulaire instantanée ou vecteur de rotation $\vec{\omega} = d\vec{\vartheta}/dt$ et le vecteur accélération angulaire $d\vec{\omega}/dt$. Ainsi, le vecteur rotation $\vec{\omega}$ de la Terre, porté par l'axe polaire et orienté du pôle Sud vers le pôle Nord, est tel que la Terre tourne autour de $\vec{\omega}$ dans le sens positif.

Considérons de même le mouvement plan d'un point M, et cherchons à visualiser par un vecteur $\vec{A}$ l'aire A balayée par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ entre les instants $t = 0$ et $t$. Un tel vecteur sera perpendiculaire au plan, de module A et de sens tel que la rotation de $\overrightarrow{OM}$ se fasse autour de lui dans le sens positif (fig. 3 *b*). De ce vecteur, on déduit les vecteurs vitesse et accélération aréolaires $d\vec{A}/dt$ et $d^2\vec{A}/dt^2$.

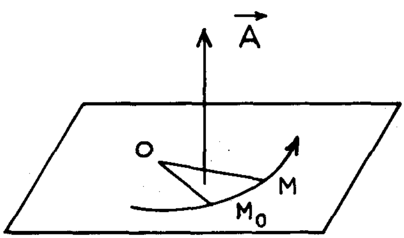


Fig. 3. — *b*) Vecteur aire balayée $\vec{A}$.

Considérons plus généralement l'aire A délimitée par un contour plan, fermé et orienté. On peut la visualiser par un vecteur $\vec{A}$ perpendiculaire au plan du contour, de module A et orienté de telle sorte que le parcours se fasse autour de $\vec{A}$ dans le sens positif.

**LES PROPRIETES DE SYMETRIE DES GRANDEURS AXIALES.**

Nous avons défini les grandeurs axiales comme des grandeurs physiques dont le signe dépend de la convention d'orientation des angles. Mais nous pouvons remarquer que toutes ces grandeurs qui, d'une manière ou d'une autre, se ramènent à la description d'une rotation, possèdent des propriétés de symétrie très particulières qui les distinguent des grandeurs polaires ordinaires.

Comme nous l'avons vu, la grandeur chiralité change de signe quand on passe d'un objet, droit ou gauche, à son image dans un miroir : l'image d'un trièdre direct est en effet un trièdre inverse (dans ce point de vue, la même convention d'orientation est utilisée pour décrire un objet et son image : on ne « symétrise » pas la convention). Soit de même $\vec{\omega}'$ l'image de $\vec{\omega}$ dans un miroir (voir HULIN, B.U.P. n° 572) : $\vec{\omega}'$ est parallèle à $\vec{\omega}$ si le miroir est perpendiculaire à $\vec{\omega}$, et antiparallèle à $\vec{\omega}$ si le miroir est parallèle à $\vec{\omega}$.

Remarquons en particulier que la définition de $\vec{\omega}$ dissymétrise arbitrairement les deux faces du plan $m$ du mouvement. Or, ce plan est un plan de symétrie du mouvement : $\vec{\omega}$, qui caractérise le mouvement et doit être invariant dans $m$, ne peut donc être un vecteur polaire. On doit donc avoir : $m\vec{\omega} = \vec{\omega}$ pour que le principe de CURIE soit satisfait (dans cette formule, $m$ désigne maintenant l'opération de symétrie par rapport au plan du mouvement).

Considérons de même le vecteur $\vec{A}$ représentant l'aire délimitée par un contour fermé orienté d'un plan $m$. Le contour est invariant dans le miroir $m$ ; on doit avoir : $m\vec{A} = \vec{A}$. Supposons au contraire le contour non orienté et cherchons à orienter l'aire qu'il délimite. On peut, dans ce but, distinguer arbitrairement (indépendamment de la convention d'orientation des angles) une face d'entrée (—) et une face de sortie (+) et définir un vecteur surface $\vec{S}$ orienté de la face — vers la face +. Un tel vecteur est nécessairement polaire car les deux faces du plan ont été dissymétrisées : $m\vec{S} = -\vec{S}$ car dans une symétrie par rapport au plan $m$, les deux faces + et — (qu'on peut supposer peintes de deux couleurs différentes) sont échangées (fig. 4).

Résumons la discussion précédente.

1° Les grandeurs physiques axiales sont des grandeurs qui font intervenir, directement ou indirectement, une rotation. (Les grandeurs polaires sont au contraire de même nature qu'une translation).

2° Par suite, leur signe ne peut être défini intrinsèquement ; il ne peut être fixé qu'arbitrairement, à partir de la convention d'orientation des angles.

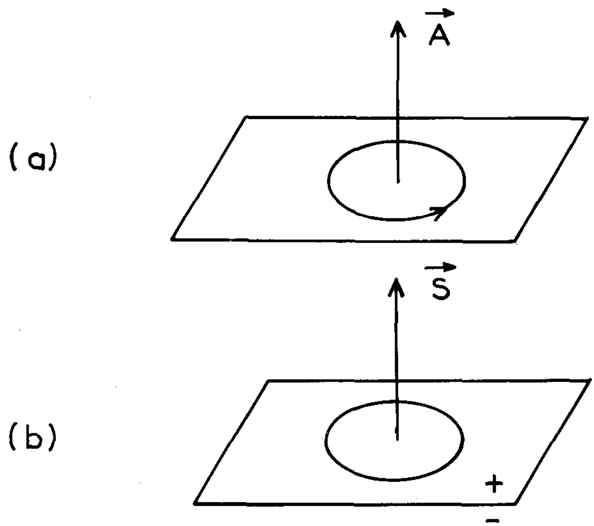


Fig. 4. — *a*) Vecteur surface axial $\vec{A}$

*b*) Vecteur surface polaire $\vec{S}$.

3° La définition de ces grandeurs leur impose des propriétés de symétrie originales. Dans une symétrie impropre (symétrie par rapport à un point ou un plan, rotation-inversion), leur comportement se distingue de celui des grandeurs polaires.

## REPRESENTATION MATHEMATIQUE DES GRANDEURS AXIALES.

Reprenons le mouvement plan d'un point M et envisageons un déplacement $\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{dM}$ pendant le temps $dt$. L'aire balayée est représentée par le vecteur $\overrightarrow{dA}$ dont le module $dA$ est égal à $1/2 \; |\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dM}|$, et qui est parallèle à $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dM}$. Cette remarque suggère de représenter un vecteur axial par un produit vectoriel. Encore faut-il bien choisir la définition du produit vectoriel et ses propriétés de symétrie, pour en assurer le caractère axial.

1) Le vecteur $\overrightarrow{dA}$ a été défini géométriquement sans faire intervenir le trièdre de référence. Ceci amène à rejeter la définition n° 1 du produit vectoriel : la distinction entre vecteurs

axiaux et polaires, ayant des comportements différents quand on change la chiralité du repère, n'a pas de sens physique.

2) La rotation autour de $\overrightarrow{dA}$ qui amène $\overrightarrow{OM}$ sur $\overrightarrow{OM}'$ est positive par définition de $\overrightarrow{dA}$. Le vecteur $\overrightarrow{dA}$ change donc de signe si on inverse la convention d'orientation des angles. On utilisera donc la définition n° 2.

3) $\overrightarrow{dA}$ est invariant dans une symétrie par rapport au plan du mouvement. Pour qu'il en soit ainsi du produit vectoriel $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dM}$, il faut admettre que, dans une opération de symétrie S, on a :

$$S(\vec{A} \wedge \vec{B}) = (S\vec{A}) \wedge (S\vec{B})$$

en précisant que dans cette opération, on ne symétrise pas l'observateur, c'est-à-dire la convention d'orientation des angles, qui joue un rôle dans la définition n° 2. Alors $\vec{A} \wedge \vec{B}$ est invariant dans la symétrie par rapport au plan des deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ qui le définissent.

Dans ces conditions, on peut écrire :

$$\overrightarrow{dA} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dM}$$

$$\frac{\overrightarrow{dA}}{dt} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \vec{v}$$

et si $\vec{l} = m \vec{r} \wedge \vec{v}$ est le moment cinétique du mobile M de masse $m$, on a :

$$\vec{l} = 2m \frac{\overrightarrow{dA}}{dt} = m r^2 \frac{\overrightarrow{d\vartheta}}{dt} = m r^2 \vec{\omega}.$$

## GRANDEURS AXIALES ET TENSEURS ANTISYMETRIQUES.

Considérons deux vecteurs polaires $\vec{A}$ et $\vec{B}$, de coordonnées respectives $A_i$ et $B_j$ dans un repère orthonormé direct $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, et formons leur produit direct, qui est le tenseur d'ordre 2 :

$$\vec{A} \otimes \vec{B} = \begin{pmatrix} A_x B_x & A_x B_y & A_x B_z \\ A_y B_x & A_y B_y & A_y B_z \\ A_z B_x & A_z B_y & A_z B_z \end{pmatrix}$$

puis le tenseur antisymétrique $\vec{A} \otimes \vec{B} - \vec{B} \otimes \vec{A}$. Ce dernier peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & C_z & -C_y \\ -C_z & 0 & C_x \\ C_y & -C_x & C_x \end{pmatrix}$$

Les quantités $C_x$, $C_y$ et $C_z$ sont reliées aux coordonnées de $\vec{A}$ et $\vec{B}$ précisément par les relations (1), et peuvent être considérées comme les coordonnées d'un vecteur $\vec{C}$ qui n'est autre que le produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{B}$ selon la définition n° 1.

Plus généralement, un tenseur antisymétrique d'ordre 2 dépend de 3 paramètres et peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & V_z & -V_y \\ -V_z & 0 & V_x \\ V_y & -V_x & 0 \end{pmatrix}$$

Les 3 quantités $V_x$, $V_y$ et $V_z$ peuvent être considérées comme les coordonnées d'un « vecteur » $\vec{V}$. Cependant, dans un changement de repère, $\vec{V}$ se transforme non comme un vecteur ordinaire, mais comme le tenseur d'ordre 2 qu'il représente : son signe change avec l'orientation du repère.

La représentation précédente d'un tenseur antisymétrique d'ordre 2 n'est d'ailleurs possible que dans l'espace $R_3$ à 3 dimensions. Dans l'espace $R_n$ à $n$ dimensions, un tel tenseur possède $\dfrac{n(n-1)}{2}$ composantes indépendantes ; ce nombre n'est égal à $n$ que pour $n = 3$. Dans un langage équivalent, on peut dire que $R_n$ et son espace dual $R^*_n$ (espace vectoriel formé par les plans de $R_n$) sont de même dimension si, et seulement si, $n = 3$. Dans $R_3$ effectivement, il existe une seule direction orthogonale à un plan et le problème est de l'orienter pour définir un « vecteur ». Comme nous l'avons vu, on peut y parvenir en considérant 2 vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ de ce plan et leur produit vectoriel : les mathématiciens privilégient la définition n° 1 ; les physiciens ont intérêt à utiliser la définition n° 2, plus concrète.

Enfin, de même qu'un vecteur axial est associé à un tenseur antisymétrique d'ordre 2, un scalaire axial est associé à un tenseur d'ordre 3 antisymétrique par rapport aux 3 couples d'indices. Un tel tenseur possède en effet une seule composante indépendante qui change de signe avec l'orientation du repère.

*En résumé,* la définition (n° 2) des grandeurs axiales que nous avons retenue à partir de considérations physiques (influence de la convention d'orientation des angles) n'est pas celle (n° 1) qui est généralement utilisée en mathématiques, où on s'intéresse au comportement des vecteurs dans un changement de repère et où un vecteur est dit axial s'il change de signe avec l'orientation du repère. Cependant, comme nous l'avons vérifié à propos du produit vectoriel, les propriétés de symétrie des vecteurs axiaux « physiques » et « mathématiques » sont identiques.

Nous complétons cet exposé en étudiant les problèmes suivants :

— les grandeurs électromagnétiques sont-elles polaires ou axiales ?

— la distinction établie entre grandeurs polaires et axiales peut-elle être exploitée en analyse dimensionnelle ? Cette distinction peut-elle être illustrée géométriquement ?

— peut-on mesurer les grandeurs axiales ?

— enfin, pourquoi une convention est-elle nécessaire pour distinguer la droite de la gauche ?

## CARACTERE AXIAL DES GRANDEURS ELECTROMAGNETIQUES.

Doit-on considérer la charge électrique $q$, la masse magnétique $n$, le champ électrique $\vec{E}$, le champ magnétique $\vec{B}$, le moment magnétique $\vec{\mu}$ d'une charge en rotation ou d'un aimant..., comme des grandeurs polaires ou axiales ?

L'analogie entre les interactions entre deux masses et deux charges (lois de NEWTON et de COULOMB) suggère l'*hypothèse* que, comme la masse, la charge est un scalaire vrai (et par suite le champ électrique $\vec{E}$ et la densité de courant $\vec{j}$ sont des vecteurs polaires). Certes, le signe d'une charge électrique est arbitraire mais la convention qui fixe, par exemple, le signe de la charge du proton n'a rien à voir avec la convention d'orientation des angles.

Adoptant l'hypothèse habituelle précédente, on en déduit que le moment magnétique $\vec{\mu}$ d'une particule de charge $q$, de masse $m$ et de moment orbital $\vec{l}$ ($\vec{\mu} = q/2m\ \vec{l}$) est un vecteur axial : la convention qui fixe le signe d'une masse magnétique est liée à la convention d'orientation des angles (fig. 5). Par suite, toutes les grandeurs magnétiques ont un caractère axial.

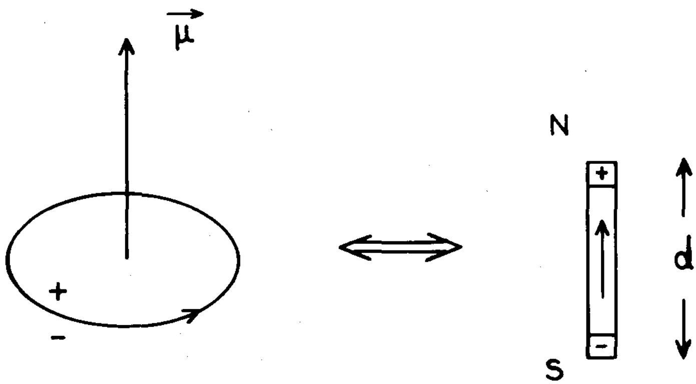


Fig. 5. — Masses magnétiques $+n$ et $-n$ associées à une spire de courant de moment magnétique $\vec{\mu}$ ($n\,d = \mu$).

Si on fait au contraire l'hypothèse que la charge électrique est un scalaire axial, des grandeurs électriques sont axiales et les grandeurs magnétiques sont polaires. L'expérience confirme ce point de vue. Ainsi, dans l'expérience d'ŒRSTED (fig. 6), le plan $\pi$ (vertical) contenant le courant $\vec{j}$ et le point M où on observe

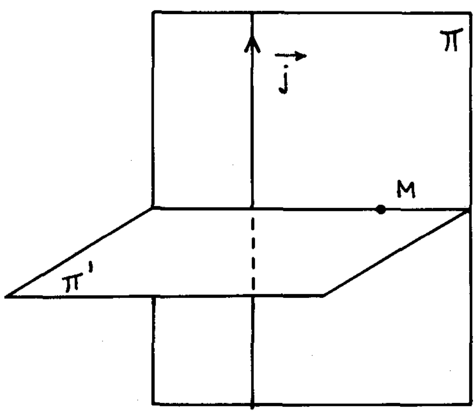


Fig. 6. — Expérience d'ŒRSTED.

le champ magnétique $\vec{B}$ est un plan de symétrie si on admet que $\vec{j}$ est polaire. Or une aiguille aimantée de moment $\vec{\mu}$ pouvant s'orienter librement autour de M se place perpendiculairement à $\pi$ sous l'influence de $\vec{B}$ : donc $\vec{B}$, perpendiculaire à un plan de symétrie, est axial d'après le principe de CURIE ; son sens doit être fixé arbitrairement. Si on admet que $\vec{j}$ est axial, le plan $\pi'$ perpendiculaire à $\vec{j}$ et passant par M est un plan de symétrie, donc $\vec{B}$, contenu dans ce plan, est polaire. L'expérience d'ŒRSTED ne prouve pas que $\vec{B}$ est axial, mais que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ont des caractères différents.

On remarque que le moment magnétique $\vec{\mu}$ d'une spire de courant plane est bien invariant si on le symétrise par rapport au plan de la spire qui en est responsable. D'autre part, l'image d'une telle spire dans un miroir perpendiculaire à son plan est une suite de moment magnétique $-\vec{\mu}$ : par suite, contrairement à la charge électrique, la masse magnétique change de signe quand on la regarde dans un miroir, objet et image ont des signes opposés.

On remarque enfin que dans l'expérience d'ŒRSTED, si l'aimant $\vec{\mu}$ est une spire de courant, cette spire se place dans le plan de symétrie $\pi$, ce qui est bien conforme au principe de CURIE.

## GRANDEURS AXIALES ET ANALYSE DIMENSIONNELLE.

Une relation entre grandeurs physiques doit être indépendante du choix des unités. Cette remarque est à la base de l'analyse dimensionnelle qui permet aussi bien des vérifications (homogénéité des formules) que des prévisions. La distinction entre grandeurs polaires et axiales permet des considérations plus fines.

En effet, une relation physique doit être indépendante de la convention d'orientation des angles (comme de toute autre convention : orientation d'une surface fermée, ou choix arbitraire du signe d'une charge électrique de référence). Par suite, les deux membres de la relation doivent avoir le même caractère polaire ou axial. Ainsi, la relation $\vec{\omega} = -q/2m\,\vec{B}$ donnant le vecteur rotation d'une charge $q$ dans un champ $\vec{B}$ (mouvement cyclotron) est homogène de même que la relation $\vec{P} = \dfrac{1}{\mu_0}(\vec{E} \wedge \vec{B})$ donnant le vecteur de POYNTING d'une onde électromagnétique.

De même, dans l'expression de la force de LORENTZ $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$, les forces électrostatique et magnétique sont toutes deux polaires. Et, bien entendu, les quatre équations de MAXWELL sont homogènes.

Considérons le flux d'un champ électrique $\vec{E}$ à travers un élément de surface $\overrightarrow{dS}$. D'après le théorème de GAUSS, le flux de $\vec{E}$ est un vrai scalaire. Par suite, le vecteur $\overrightarrow{dS}$ est polaire : l'orientation de la surface qu'il représente n'est pas liée à la convention de l'orientation des angles. Effectivement, on ne considère que le flux de $\vec{E}$ à travers une surface fermée, orientée arbitrairement de l'intérieur vers l'extérieur. La même remarque s'applique au flux du champ des vitesses d'un fluide à travers un élément de surface ou une surface fermée.

De même, d'après la loi de LENZ $e = -d\phi/dt$, le flux de $\vec{B}$ est un vrai scalaire puisque la définition du signe de $e$ ne fait pas intervenir la convention d'orientation des angles. Or $\vec{B}$ est axial donc l'élément de surface $\overrightarrow{dS}$ est axial : l'orientation de la surface est nécessairement liée à la convention d'orientation de l'espace. Effectivement, on ne considère que le flux à travers une surface s'appuyant sur un circuit fermé orienté, cette surface étant orientée d'après la règle du tire-bouchon de MAXWELL.

## ILLUSTRATION GEOMETRIQUE DE LA DIFFERENCE ENTRE VECTEURS POLAIRES ET AXIAUX.

Divers systèmes physiques possédant un plan de symétrie $m$ sont caractérisés à la fois par un vecteur polaire $\vec{V}$ et un vecteur axial $\widetilde{V}$ : $\vec{V}$ est parallèle à $m$, $\widetilde{V}$ lui est perpendiculaire.

1) Considérons la Terre en rotation : $m$ est le plan de l'équateur. Son vecteur rotation $\vec{\omega}$ et son moment magnétique $\vec{\mu}$ sont perpendiculaires à $m$. En un point de l'équateur, le champ de gravitation $\vec{g}$ est dans $m$, le champ magnétique $\vec{B}$ est perpendiculaire à $m$. Ceci n'est vrai que dans le modèle dipolaire du magnétisme terrestre, les pôles géographiques et magnétiques étant de plus supposés confondus.

2) Soit un fil rectiligne parcouru par une densité de courant $\vec{j}$. En un point M d'un plan $m$ contenant $\vec{j}$, les charges en

mouvement créent un champ $\vec{E}$ contenu dans $m$ et un champ $\vec{B}$ perpendiculaire à $m$ (fig. 7 *a*). La même remarque s'applique à une nappe plane de courant.

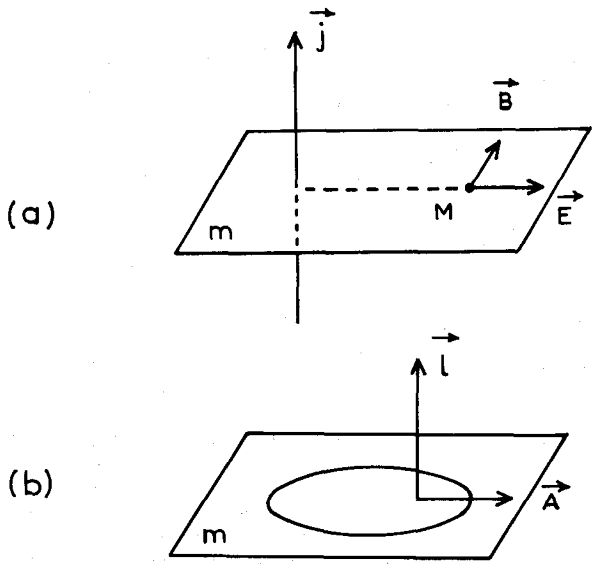


Fig. 7. — *a*) Champs d'un fil rectiligne.
*b*) Rotation de la Terre autour du Soleil.

3) Considérons le mouvement de la Terre autour du Soleil, dans le plan $m$ de l'écliptique (fig. 7 *b*). Le moment cinétique $\vec{l}$ de la Terre est perpendiculaire à $m$, le vecteur de LAPLACE $\vec{A}$ est dans $m$ (ce vecteur est dirigé du Soleil vers le périhélie et a pour module l'excentricité de l'orbite ; c'est, comme $\vec{l}$, une constante du mouvement).

## PEUT-ON MESURER LES GRANDEURS AXIALES ?

Les grandeurs vraies sont des observables physiques : elles peuvent être mesurées sans ambiguïté. Par contre, les grandeurs axiales ne sont pas mesurables, mais seulement calculables à partir d'autres grandeurs, puisque leur signe est fixé arbitrairement par une convention. Ce ne sont pas des observables physiques, mais de simples intermédiaires de calcul. Voyons-en quelques exemples :

1) Le moment magnétique $\vec{\mu}$ associé à une spire de courant ou à une orbite électronique, a un signe arbitraire comme le vecteur de rotation $\vec{\omega}$ de la terre. La seule réalité physique est le sens de rotation de la charge. Si un tel aimant est soumis au champ $\vec{B}$ d'un fil rectiligne, la réalité physique n'est pas le signe de $\vec{B}$ mais l'orientation de la spire contenant le fil.

2) Dans le mouvement de la Terre autour du Soleil, le moment orbital $\vec{l}$ de la terre a un sens arbitraire : sa définition dissymétrise arbitrairement les deux faces du plan de l'écliptique, plan de symétrie du système, alors qu'elles sont physiquement équivalentes. Seul le module de $\vec{l}$, proportionnel à la constante des aires, a un sens physique. Le sens du vecteur de LAPLACE a, au contraire un sens physique précis, puisque le périhélie et l'aphélie de l'orbite ne sont pas équivalents.

3) Soit le champ de vitesse $\vec{v}$ d'un fluide stationnaire incompressible. En tout point du fluide, on peut définir le rotationnel de la vitesse : $\overrightarrow{\mathrm{rot}\, v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$. L'opérateur $\vec{\nabla}$ étant polaire, $\overrightarrow{\mathrm{rot}\, v}$ est axial (par exemple sa composante $z$, par définition, vaut $\partial v_x/\partial y - \partial v_y/\partial x$ et non $\partial v_y/\partial x - \partial v_x/\partial y$). Le vecteur tourbillon du fluide (vecteur de rotation locale) est $\vec{\omega} = 1/2\ \overrightarrow{\mathrm{rot}\, v}$, c'est aussi un vecteur dont seul le module est mesurable.

Remarquons enfin que le potentiel électrostatique V ($\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ V$) est un scalaire vrai : le signe d'une différence de potentiel n'est pas conventionnel mais traduit une réalité physique. $\vec{B}$, axial, n'est pas observable, de même que le potentiel scalaire magnétique $V^*$ ($\vec{B} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ V^*$). Par contre, le potentiel vecteur magnétique $\vec{A}$ ($\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}\ A}$) est polaire, c'est donc une observable physique — ce que confirme l'expérience de AHARANOV et BOHM — (voir le Cours de Physique de FEYMAN, tome II).

## PEUT-ON DISTINGUER LA DROITE DE LA GAUCHE ?

Nous l'avons vu, une *convention* est nécessaire pour pouvoir distinguer la droite de la gauche. En effet la nature est, à l'échelle macroscopique, ambidextre : aucun phénomène physique macroscopique ne peut servir de référence pour définir de manière absolue la droite et la gauche. Plus généralement, si l'on excepte les phénomènes faisant intervenir les forces nucléaires faibles, il y a *conservation de la parité :* l'image dans un miroir de toute expérience est une expérience compatible avec les lois de la physique et peut être observée dans la réalité. Prenons quelques exemples :

1) La plupart des hommes ont le cœur à gauche. Mais un homme ayant le cœur à droite est viable, de même qu'un gaucher. Plus généralement, si un objet droit (cristal, molécule, machine) existe, l'objet gauche énantiomorphe existe : PASTEUR l'a prouvé pour les cristaux d'acide tartrique ; on sait fabriquer des violons pour gauchers, ou des vis à gauche.

2) Si on passe un film en inversant les deux bords de la pellicule, on s'en aperçoit rarement instantanément. Certes, les voitures et les bicyclettes roulent alors à gauche sur l'écran — comme en Angleterre — les personnages écrivent de droite à gauche — comme en arabe ou en hébreu. Les habitudes, les conventions sont changées, mais les lois de la physique ne sont pas violées (ce qui serait le cas si on avait inversé le début et la fin de la pellicule). Autrement dit, on ne peut savoir si les deux bords de la pellicule ont été inversés en se référant uniquement aux lois de la physique.

3) Considérons l'image dans un miroir de l'expérience d'ŒRSTED. On peut peindre en noir le pôle Nord de l'aiguille aimantée et en blanc le pôle Sud : alors l'expérience image semble ne pas être réalisable. En fait, comme on l'a vu, le moment magnétique $\vec{\mu}$ de l'aiguille n'est pas polaire (comme le vecteur blanc-noir) mais axial (fig. 8), ou encore la masse magnétique est un scalaire axial : si on en tient compte, l'expérience image est réalisable.

Considérons maintenant l'expérience de Mme WU (1957), suggérée par les idées théoriques de LEE et YANG. Des noyaux de $^{60}Co$ sont polarisés par un champ $\vec{B}$ ; lors de leur désintégration sous l'effet des interactions faibles, ils émettent davantage d'électrons dans la direction opposée à $\vec{B}$. Soit $\vec{\mu}$ le moment magnétique d'un noyau, parallèle à $\vec{B}$, et $\vec{\delta}$ la direction privilégiée d'émission des électrons. L'expérience est caractérisée par un vecteur polaire $\vec{\delta}$ et un vecteur axial $\vec{\mu}$, donc par le pseudo-scalaire $\vec{\delta} \cdot \vec{\mu}$, qui est négatif. L'expérience image n'est pas réalisable (fig. 9), car le pseudo-scalaire correspondant serait positif (plus généralement, la parité n'est pas conservée dès qu'une expérience est

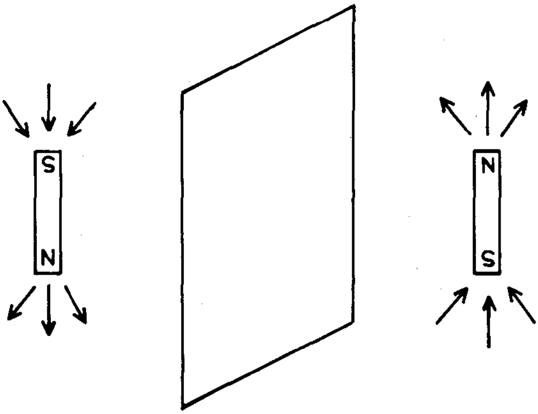


Fig. 8. — Image d'un aimant dans un miroir.

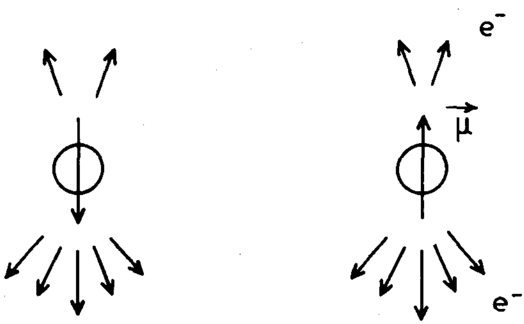


Fig. 9. — Expérience de Mme Wu et son image (non physique) dans un miroir.

caractérisée par un pseudo-scalaire ; dans l'expérience d'ŒRSTED, $\vec{j} \cdot \vec{\mu}$ est un pseudo-scalaire mais il est nul car l'aiguille $\vec{\mu}$ s'oriente perpendiculairement au courant $\vec{j}$).

La non-conservation de la parité par les interactions faibles est à relier à la découverte de GOLDHABER (1958) : l'hélicité du neutrino (produit scalaire de son moment magnétique de spin par sa quantité de mouvement) est toujours négative. Il n'existe pas de neutrino d'hélicité positive (l'objet énantiomorphe du neutrino est l'anti-neutrino, d'hélicité positive). Ainsi, dans la désintégration du neutron :

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$$

l'hélicité de l'électron émis est toujours négative, celle de l'anti-neutrino toujours positive ; l'expérience image n'est jamais observée, ce qui permet de donner aux notions de droite et de gauche une signification absolue. Mais il existe des réactions ne faisant pas intervenir le neutrino et ne conservant pas la parité, par exemple la cascade :

$$\pi^- + p \rightarrow \Lambda^o + K^o$$

$$\Lambda^o \rightarrow \pi^- + p$$

caractérisée par un pseudo-scalaire, le produit mixte des quantités de mouvement $(\vec{p}_{\Lambda^o}, \vec{p}_{K^o}\, \vec{p}_{\pi^-})$ du $\Lambda^o$, du $K^o$ et du $\pi^-$ final (fig. 10).

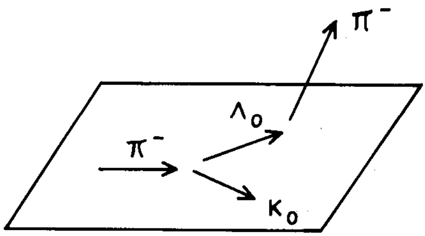


Fig. 10. — Cascade $\pi^- + p \rightarrow \Lambda_0 + K_0$, $\Lambda_0 \rightarrow \pi^- + p$.

## REFERENCES

Les propriétés mathématiques du produit vectoriel sont discutées dans les articles suivants :

— A. V. MASKET, Am. J. Phys. *34*, 164 (1966).

— H. GELMAN, Am. J. Phys. *38*, 599 (1970).

— R. J. QUIGLEY, Am. J. Phys. *41*, 428 (1973).

Un point de vue physique sur les grandeurs axiales a été développé par :

— M. BAYET et P. GAUTHIER, B.U.P. n° 530 (mai 1962).

— M. HULIN, B.U.P. n° 572 (mars 1975).

— H. POULET et J. P. MATHIEU, *Spectres de vibrations et symétrie des cristaux,* chap. 1, Gordon and Breach (1970).

Le principe de Curie est commenté dans :

— J. SIVARDIÈRE, Eur. J. Phys. *5*, 46 (1984).

— J. SIVARDIÈRE, B.U.P. n° 702, mars 1988, p. 295.

La parité en physique est discutée de manière attrayante dans :

— M. GARDNER, *The ambidextrous universe,* Scribner, New-York (1979).

— R. FEYNMAN, *La nature des lois physiques,* Ed. du Seuil.