Satellite héliosynchrone

par Pierre BONNET,
Lycée A.-Chatelet, 59500 Douai.

Après avoir établi l'expression du potentiel quadrupolaire du géoïde, nous exprimerons l'expression du champ orthoradial. On évaluera ensuite les perturbations que subit l'orbite d'un satellite. Enfin, on envisagera le cas d'un satellite héliosynchrone tel que « SPOT » dont chacun a pu entendre parler en 1986 grâce aux trompettes médiatiques. C'est la curiosité de mes élèves pour « SPOT » qui a inspiré ce travail, certains collègues pourront peut-être en tirer profit.

I. POTENTIEL GRAVITATIONNEL LOIN D'UNE DISTRIBUTION.

Une distribution limitée à un volume $\mathcal{D}$ est caractérisée par sa masse volumique $\varrho = \dfrac{dm}{dt}$. On recherche le potentiel de gravitation V au point A, à l'extérieur de la distribution. Rappelons que V est défini par $\vec{G}(A) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V(A)$ où $\vec{G}(A)$ est le vecteur champ de gravitation.

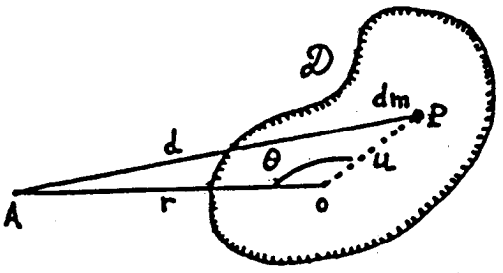

Fig. 1

Ainsi l'élément de masse dm placé en P crée en A le potentiel :

$$dV = -\frac{\mathcal{G}\, dm}{d}$$

avec d = distance PA.

De $|\overrightarrow{PA}|^2 = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP})^2$, on tire $d^2 = r^2 + u^2 - 2\,u\,r\cos\vartheta$, c'est-à-dire que :

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{u^2}{r^2} - 2\frac{u}{r}\cos\vartheta\right)^{-1/2} = \frac{1}{r}(1+x)^{-1/2}.$$

Le développement au 2e ordre de $(1+x)^{-1/2}$ vaut :

$$1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \ldots$$

Donc, si nous considérons que r est beaucoup plus grand que toutes les valeurs possibles de u, on aura :

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{r^2} - \frac{2\,u}{r}\cos\vartheta\right) + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots - \frac{3}{8}\left(\frac{u^2}{r^2} - \frac{2\,u}{r}\cos\vartheta\right)^2 + \ldots\right]$$

Il reste à ordonner par rapport à $\dfrac{u}{r}$ en ne gardant que les termes du 2e ordre :

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r}\left[1 + \frac{u}{r}\cos\vartheta - \frac{u^2}{2\,r^2}(1 - 3\cos^2\vartheta) + \ldots\right].$$

Ainsi le potentiel de la distribution est alors :

$$V = \int_{\mathfrak{D}} dV = -\mathcal{G}\int\frac{dm}{d}$$

$$V = -\frac{\mathcal{G}}{r}\left[\int dm + \frac{1}{r}\int u\cos\vartheta\; dm - \frac{1}{2\,r^2}\ldots\right.$$
$$\left. \ldots\int u^2(1 - 3\cos^2\vartheta)\,dm + \ldots\right]$$

Toutes ces intégrales sont étendues à la distribution. Donnons-en des significations plus concrètes.

$\int dm = M =$ masse totale contenue dans la distribution.

$\int u\cos\vartheta\, dm$ peut être écrit :

$$\int\left(\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}}{r}\right)dm = \frac{\overrightarrow{OA}}{r}\int\overrightarrow{OP}\,dm = \frac{\overrightarrow{OA}}{r}\cdot M\,\overrightarrow{OG}$$

G désignant le centre d'inertie de la distribution. C'est-à-dire que si l'on convient de prendre l'origine en G, la 2e intégrale est nulle. Nous supposons, pour la suite, que O est toujours choisi de cette façon.

Pour interpréter la 3e intégrale, imaginons un système d'axes où OA serait l'axe *ox*. Les coordonnées de P seraient alors (x, y, z) avec $x = u\cos\vartheta$ et aussi $u^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Alors $I_{ox} = I_{OA}$ = moment d'inertie par rapport à *ox* vaut :

$$I_{OA} = \int(y^2 + z^2)\,dm = \int(u^2 - u^2\cos^2\vartheta)\,dm = \ldots$$

$$\int u^2\,dm - \int u^2\cos^2\vartheta\,dm.$$

Si on pose $I_o = \int u^2\,dm$ = « pseudo » moment d'inertie par rapport à l'origine, on voit que la 3e intégrale s'exprime par :

$$-\int u^2(1 - 3\cos^2\vartheta)\,dm = 2\,I_o - 3\,I_{OA}.$$

En conséquence, on écrira le potentiel au 2e ordre sous la forme :

$$\boxed{V = -\frac{\mathcal{G}M}{r}\left[1 + \frac{Q}{r^2}\right]}$$

$Q = \dfrac{2\,I_o - 3\,I_{OA}}{2M}$ qualifié de terme quadrupolaire ; terme très souvent négligé lorsqu'une étude approximative suffit. Ce qui est d'autant plus correct que A est éloigné de la distribution. Remarquons, pour terminer, que si la distribution présente une symétrie matérielle sphérique :

$$I_{OA} = I_{ox} = I_{oy} = I_{oz} = \frac{2}{5}MR^2$$

$$2\,I_o = I_{OA} + I_{oy} + I_{oz} = 3\cdot\frac{2}{5}MR^2.$$

On aura, dans ce cas, Q = 0. Ce qui est un résultat classique obtenu grâce au théorème de GAUSS par exemple.

II. CAS DU GEOIDE TERRESTRE.

D'après l'U.A.I. (union d'astronomie internationale), le géoïde est assimilé à un ellipsoïde de révolution autour de l'axe polaire et ayant les caractéristiques suivantes :

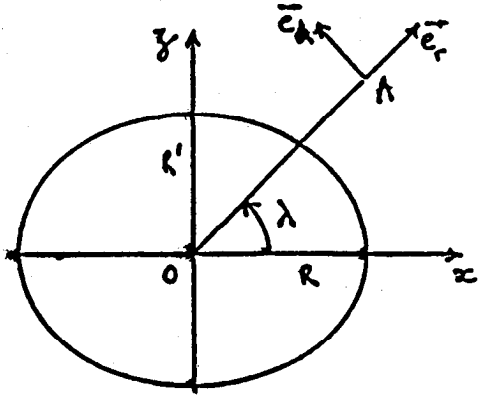

Fig. 2

— Rayon équatorial : R = 6 378,164 km.

— Rayon polaire : $R' = R(1-\varepsilon)$ avec $\varepsilon = \dfrac{1}{298{,}25}$ $(\approx 3{,}35\,10^{-3})$

(ce qui correspond à un aplatissement au pôle d'environ 25 km !)

La symétrie de révolution permet de repérer un point A, extérieur au géoïde, par deux coordonnées sphériques r et λ. Or, en supposant le géoïde homogène, son tenseur d'inertie en O, calculé dans la base du repère, (O, x, y, z) de la figure serait :

$$\{J_O\} = \begin{pmatrix} A & O & O \\ O & A & O \\ O & O & C \end{pmatrix}$$

avec $C = \dfrac{2}{5} MR^2$ et $\varepsilon' = \dfrac{C-A}{MR^2} = \dfrac{2\varepsilon}{5} = 1{,}34 \cdot 10^{-3}$

où A et C sont les moments d'inertie respectifs par rapport à Ox et Oz.

e_r = (cos λ ; O ; sin λ) désignant le vecteur unitaire de OA, on trouve alors le moment d'inertie par rapport à OA :

$$I_{OA} = \vec{e_r} \cdot \{J_O\} \vec{e_r} = A\cos^2\lambda + C\sin^2\lambda = A + (C - A)\sin^2\lambda.$$

Et puisque : $I_O = 2A + C$, on obtient le terme quadrupolaire :

$$Q = \frac{2I_O - 3I_{OA}}{2M} = \frac{(C - A)(1 - 3\sin^2\lambda)}{2M} = \frac{\varepsilon' R^2}{2}(1 - 3\sin^2\lambda)$$

Ainsi, outre la distance r, on trouve que le potentiel du géoïde est fonction de la latitude selon l'expression :

$$\boxed{V = -\frac{\mathcal{G}M}{r}\left[1 + \frac{\varepsilon' R^2}{2r^2}(1 - 3\sin^2\lambda)\right]}$$

En fait, de par la présence du noyau Ni — Fe (responsable du magnétisme terrestre), le géoïde n'est pas homogène. La présence de cette matière dense au voisinage du centre implique $C < 0{,}4\ MR^2$. Et c'est en fait, la mesure du potentiel par les satellites affectés aux tâches géodésiques, qui permet d'obtenir les valeurs de ε' et C. L'U.A.I. communique ainsi :

$$\varepsilon' = 1{,}08263 \cdot 10^{-3} \qquad C = 0{,}3306 \cdot MR^2.$$

Nous garderons, par la suite, le potentiel obtenu théoriquement en corrigeant ε' à l'aide du résultat expérimental.

Le champ gravitationnel $\vec{G} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$ possède 2 composantes non nulles :

$$\begin{cases} G_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} = -g_o\left[\dfrac{R^2}{r^2} + \dfrac{3}{2}\varepsilon'\dfrac{R^4}{r^4}(1 - 3\sin^2\lambda)\right] \\ G_\lambda = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \lambda} = -g_o\left[3\varepsilon'\dfrac{R^4}{r^4}\dfrac{\sin^2\lambda}{2}\right] \end{cases}$$

$g_o = \dfrac{\mathcal{G}M}{R^2} = 9{,}7982\ \text{m s}^{-2}$ = intensité « standard » du champ de gravitation au sol.

III. APPLICATION : SATELLITE HELIOSYNCHRONE.

1) Etude du cahier des charges.

Pour des besoins divers (liés en général à la photographie), il est important que les points de la terre survolés par un satellite,

le soient à chaque fois dans les mêmes conditions d'éclairement, c'est-à-dire à la même heure locale solaire.

D'autre part, la mise au point des objectifs embarqués, ainsi que le traitement de l'image sont facilités si l'orbite est circulaire car, à ce moment, la distance de visée est fixe.

Enfin, pour n'avoir qu'une faible traînée aérodynamique (due à l'atmosphère résiduelle) tout en ayant l'altitude la plus basse possible (pour avoir une bonne résolution des détails filmés), on est conduit à choisir une orbite dont l'altitude est d'environ 800 km.

Supposons ces conditions réalisées. A la date $t = 0$, la position du satellite sur son orbite est P, à la verticale du point M_o de la surface terrestre.

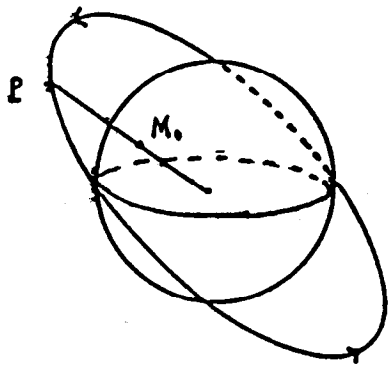

Fig. 3

Si T_o désigne la période du satellite, on peut écrire, dans l'hypothèse d'un mouvement circulaire :

$$\frac{r^3}{T_o^2} = \frac{g_o R^3}{4\pi^2}.$$

Pour $h \simeq 800$ km, on a ainsi $T_o \simeq 1{,}7$ heure. Par exemple, le satellite « SPOT » effectue $N = 369$ révolutions en $n = 26$ jours.

Donc, $T_o = \frac{26}{369} j$; $T_o \approx 1{,}692$ h $\approx 6\,093$ s. Ce qui entraîne $h = (7{,}210 - 6{,}378) \cdot 10^6$ m $= 832$ km.

Le choix de $T_o = \frac{n}{N}$ détermine celui de h qui doit être voisine de 800 km. De nombreuses solutions sont possibles pour

n et N *a priori*. La « couverture » du globe par le satellite permet de faire un choix. Montrons-le sur l'exemple de Spot.

En une journée, Spot effectue $\frac{369}{26} = 14{,}1923...$ révolutions. Cette fraction est proche de $\frac{142}{10} = \frac{71}{5}$. Cela signifie qu'au bout de 71 révolutions, Spot repasse au point P tandis que la terre a effectué presque 5 rotations complètes.

Le point P est donc cette fois à la verticale d'un point M_1 du même parallèle mais décalé d'une angle α.

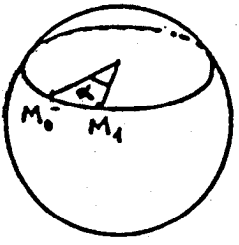

Fig. 4

$$\alpha = \underbrace{71 \cdot 2\pi \frac{26}{369}}_{\text{rotation de la terre en 71 } T_o} \underbrace{- 5 \cdot 2\pi}_{\text{rotation de la terre en 5 j}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{369}.$$

Soit pour la distance : $\widehat{M_0 M_1} = \alpha \cdot (R \cos\lambda) = 108 \cdot \cos\lambda$ en km.

Les « traces » de Spot sont donc décalées de 108 km maximum (valeur sur l'équateur) et espacées de 5 jours dans le temps. Le champ des caméras de Spot étant de 117 km, on constate que la couverture du globe est complète avec le choix 369 et 26.

On peut dire que la valeur de T_o est imposée par la volonté de pouvoir survoler tous les points du globe avec une fréquence de l'ordre de un passage par mois par exemple.

Mais les conditions d'éclairement à la verticale du satellite dépendent de la position du soleil au moment du passage. Représentons la course apparente du soleil dans le plan de l'écliptique.

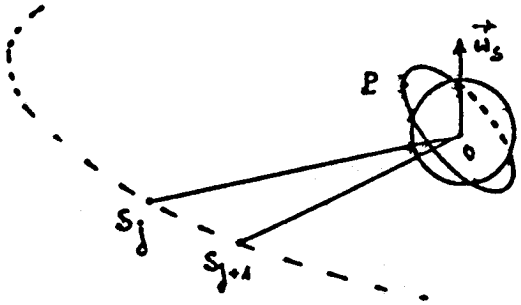

Fig. 5

On constate que lorsque P repasse à la verticale de M_o (au bout de n jours), le soleil est passé de la position j à la position $j + 1$. L'éclairement sera donc différent.

Il faudrait, pour satisfaire la condition d'éclairement, faire tourner le plan de l'orbite du satellite à la vitesse angulaire $\vec{\omega}_s$ du mouvement apparent du soleil :

$$\omega_s = \frac{1 \text{ tour}}{1 \text{ an}} \simeq \frac{2\pi}{365{,}25} \text{ rad par jour.}$$

Or, il se trouve que ceci peut se faire tout seul (c'est-à-dire sans l'aide de moteurs embarqués dans le satellite) grâce à l'aplatissement du géoïde qui rend le potentiel gravitationnel légèrement différent d'un potentiel sphérique.

Nous avons vu que cette propriété impliquait l'existence d'une composante orthoradiale $\vec{G}_\lambda$ du champ de gravitation. La composante radiale $\vec{G}_r$ est la composante principale qui confère les propriétés essentielles à la trajectoire (ellipticité, période,...). La composante orthoradiale, traitée comme une perturbation, va provoquer une évolution lente des paramètres. En particulier le plan de l'orbite va subir une précession, fonction de l'inclinaison sur l'équateur. Un choix convenable de cette inclinaison permettra d'ajuster sa valeur à $\vec{\omega}_s$.

2) Relations entre paramètres d'orbite et latitude.

Sur une même sphère, représentons le cercle équatorial et l'orbite supposée circulaire.

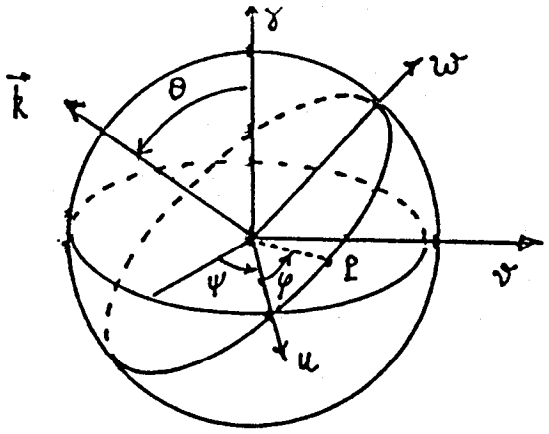

Fig. 6

Soit $o\,u$ la ligne des nœuds (intersection du plan équatorial et du plan de l'orbite), $\beta = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ base fixe dans l'hypothèse « sphérique ».

En effectuant une rotation d'angle θ autour de $o\,u$, on amène l'axe polaire $o\,z$ sur l'axe $o\,k$ parallèle au moment cinétique $\vec{\sigma}$ du satellite. θ est également l'inclinaison sur l'équateur. On passe ainsi de la base β à la base $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{k})$ que nous noterons $\mathfrak{B}$; base liée à l'orbite et également fixe dans l'hypothèse sphérique.

En effectuant une seconde rotation, d'angle φ autour de $o\,k$, on passe de la base $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{k})$ à $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ qui est la base des coordonnées cylindriques du satellite sur son orbite circulaire.

Nous allons utiliser la propriété géométrique suivante :

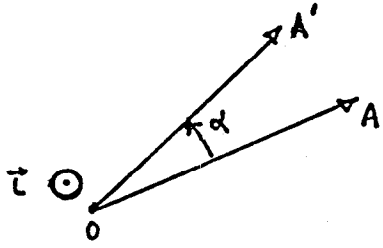

Fig. 7

Dans une rotation d'angle α autour d'un axe défini par $(o, \vec{i})$ un point A est transformée en A' tel que :

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} \cdot \cos\alpha + (\vec{i} \wedge \overrightarrow{OA}) \sin\alpha.$$

Appliquons cette propriété aux rotations précédentes :

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \vec{u} \cos\varphi + (\vec{k} \wedge \vec{u}) \sin\varphi \\ \vec{k} = \vec{z} \cos\vartheta + (\vec{u} \wedge \vec{z}) \sin\vartheta. \end{cases}$$

Soit, en combinant ces deux expressions :

$$\vec{e}_r = \vec{u} \cdot \cos\varphi + (\vec{z} \wedge \vec{u}) \cos\vartheta \sin\varphi + (\vec{u} \wedge \vec{z}) \wedge \vec{u} \sin\vartheta \sin\varphi$$

$$\vec{e}_r = \vec{u} \cos\varphi + \vec{v} \cos\vartheta \sin\varphi + [\vec{z}(\vec{u} \cdot \vec{u}) - \vec{u}(\vec{z} \cdot \vec{u})] \sin\vartheta \sin\varphi$$

$$\vec{e}_r = \vec{u} \cos\varphi + \vec{v} \cos\vartheta \sin\varphi + \vec{z} \sin\vartheta \sin\varphi.$$

Mais, puisque la latitude λ du point P est définie par $\vec{e}_r \cdot \vec{z} = \sin\lambda$:

$$\sin\lambda = \sin\vartheta \cdot \sin\varphi.$$

Même pour une orbite circulaire où $\varphi = \dfrac{2\pi}{T_o} = \omega_o$ est constant, la dépendance de λ au cours du temps n'est pas simple. Mais nous n'aurons pas à exprimer directement $\lambda(t)$; nous passerons à des valeurs moyennes sur une période.

3) Perturbation du moment cinétique $\vec{\sigma}$ apportée par $\vec{G}_\lambda$.

Soit $\vec{\sigma}$ le moment cinétique en O du satellite dans son mouvement par rapport au repère de CORIOLIS supposé galiléen. Le théorème du moment cinétique joint à la formule de dérivation composée donne :

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}}{dt}\right)_g = \left(\frac{d\vec{\sigma}}{dt}\right)_{\mathcal{B}} + \vec{\omega} \wedge \vec{\sigma} = \vec{\mathcal{M}}_o = \overrightarrow{OP} \wedge m\vec{G}_\lambda$$

$\vec{\omega}$ désigne la rotation de $\mathcal{B}$ dans le repère de CORIOLIS. On voit que si $\vec{G}_\lambda = \vec{0}$ (hypothèse sphérique) alors $\vec{\omega} = \vec{0}$ et $\vec{\sigma} = \overrightarrow{Cte}$ dans g. Sinon, on néglige les variations de $\vec{\sigma} \cdot \vec{k}$ et $\vec{\sigma} = m r^2 \vec{k}$ est supposé constant dans $\mathcal{B}$ uniquement. On considère la valeur moyenne sur $\vec{k}$. On a donc $\vec{\omega} \wedge \vec{\sigma} = \vec{\mathcal{M}}_0$.

C'est-à-dire que l'on obtient $\vec{\omega}$ par division vectorielle :

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{\sigma} \wedge \vec{\mathcal{H}}_o}{\sigma^2} + \lambda \vec{\sigma} = \frac{\vec{\sigma} \wedge \vec{\mathcal{H}}_o}{\sigma^2}.$$

On prend $\lambda = 0$ car $\lambda\vec{\sigma}$ représente une composante de $\vec{\omega}$ dirigée selon $\vec{\omega}_o$, c'est-à-dire une perturbation de $\|\vec{\omega}_o\|$ donc de $\vec{\sigma}$. Or, nous avons supposé la constante de $\vec{\sigma}$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{\sigma} \wedge (\overrightarrow{OP} \wedge m\,\vec{G}_\lambda)}{\sigma^2} = \frac{\overrightarrow{OP}\,(\vec{\sigma} \cdot m\,\vec{G}_\lambda) - m\,\vec{G}_\lambda\,(\vec{\sigma} \cdot \overrightarrow{OP})}{\sigma^2}.$$

On constate que ω est portée par $\overrightarrow{OP}$ puisque $\vec{\sigma} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$ d'après la définition du moment cinétique. Cherchons le coefficient de OP en calculant le produit scalaire $\vec{\sigma} \cdot m\,\vec{G}_\lambda = \sigma\, m\, G_\lambda\, \vec{k} \cdot \vec{e}_\lambda$,

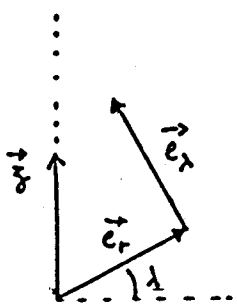

Fig. 8

$\vec{e}_\lambda$ est le vecteur unitaire orthogonal à $\vec{e}_r$ dans le plan $(\vec{z}, \vec{e}_r)$. La figure montre alors que :

$$\vec{z} = \sin\lambda \cdot \vec{e}_r + \cos\lambda \cdot \vec{e}_\lambda.$$

Donc :

$$\vec{k} \cdot \vec{e}_\lambda = \frac{1}{\cos\lambda} \qquad \vec{k} \cdot \vec{z} = \frac{\cos\vartheta}{\cos\lambda}.$$

Finalement $\mathcal{B}$ tourne dans le repère de CORIOLIS à la vitesse $\vec{\omega}$ définie par :

$$\vec{\omega} = \frac{m\,G_\lambda}{\sigma} \cdot \frac{\cos\vartheta}{\cos\lambda} \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{G_\lambda}{r\,\omega_o} \cdot \frac{\cos\vartheta}{\cos\lambda} \cdot \vec{e}_r.$$

En remplaçant G_λ par son expression obtenue au § II :

$$\vec{\omega} = \frac{g_o\ 3\,\varepsilon'\ R^4}{r^5\,\omega_o} \cdot \frac{\sin 2\lambda}{2} \cdot \frac{\cos\vartheta}{\cos\lambda} \cdot \vec{e_r}.$$

Compte tenu de la condition d'orbite circulaire $g_o = \frac{r^3}{R^2}\,\omega_o^2$ et la valeur de $\sin\lambda$:

$$\vec{\omega} = -\frac{3}{2}\,\varepsilon'\left(\frac{R^2}{r^2}\right)\ \omega_o\ \sin 2\vartheta \cdot \sin\varphi \cdot \vec{e_r}$$

ε' de l'ordre 10^{-3}, la perturbation $\vec{\omega}$ est donc faible. De plus, elle est fonction de la position du satellite, donc variable au cours du temps. On est amené à rechercher sa valeur moyenne sur une période où φ varie de 0 à 2π.

C'est la recherche des composantes $\vec{\omega}$ selon les axes $\vec{u}$, $\vec{k}$ et $\vec{z}$ qui nous fournira les perturbations des paramètres ϑ, φ et ψ.

— Composante selon $o\,u$. Elle représente une variation de l'inclinaison ϑ (mouvement de nutation). Le taux de variation est $\dot{\vartheta} = \vec{\omega} \cdot \vec{u}$:

$$\dot{\vartheta} = -\frac{3}{2}\,\varepsilon'\left(\frac{R^2}{r^2}\right)\omega_o\ \sin 2\vartheta \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi.$$

La valeur moyenne de $\sin 2\varphi$ étant zéro, le mouvement de nutation correspond à des oscillations faibles de valeur moyenne nulle.

— Composante selon $o\,k$. On a $\vec{\omega} \cdot \vec{k} = 0$. On retrouve l'hypothèse que $\dot{\varphi} = \omega_o$ reste constante.

— Composante selon $\vec{z}$. Elle modifie ψ (mouvement de précession) :

$$\dot{\psi} = \vec{\omega} \cdot \vec{z} = -\frac{3}{2}\,\varepsilon'\left(\frac{R^2}{r^2}\right)\sin 2\vartheta\ \sin\varphi \cdot \sin\vartheta\ \sin\varphi.$$

La valeur moyenne d'un $\sin^2$ valant 1/2, la vitesse de précession est :

$$\boxed{\dot{\psi} = -\frac{3}{2}\,\varepsilon'\left(\frac{R^2}{r^2}\right)\omega_o\ \sin^2\vartheta \cdot \cos\vartheta}$$

En imposant $\dot{\psi} = \omega_s = \dfrac{2\pi}{365{,}25}$ rad/jour, cette relation permet de définir une inclinaison θ pour laquelle le satellite est héliosynchrone.

Par exemple, pour Spot, l'inclinaison doit vérifier :

$$\cos\theta \cdot \sin^2\theta = -0{,}152.$$

On a $\theta = 98{,}7°$. L'orbite est dite « polaire » (ou circum polaire). Ce qui présente un avantage supplémentaire puisque des points situés sur des méridiens identiques sont éclairés de la même façon.

Dans la pratique, la présence de moteurs de corrections pour maintenir l'orbite parfaitement héliosynchrone est indispensable, car la théorie quadrupolaire n'est qu'approchée. Mais on comprend que les corrections seront minimes pour une orbite vérifiant la condition établie par cette théorie.