Un exercice simple autour de la notion de percolation et fractals

Le T.D. dont vous êtes le héros

par C. BÉTRENCOURT, J.-C. DEROCHE,
E. GUYON, S. ROUX (*),

Physique Sciences de la Nature et de la Vie (S.N.V.),
Bât. 333, Université Paris-Sud, 91405 Orsay.

1) INTRODUCTION.

Nous avons récemment, dans le B.U.P. (**), présenté la notion de fractals telle que nous l'enseignons aux élèves de Premier cycle dans la filière S.N.V. [1]. Nous avons dégagé la valeur pédagogique d'un travail illustrant et généralisant les effets d'échelles et d'analyse dimensionnelle. Par ailleurs, cette étude sert de modèle à de nombreux types de matériaux hétérogènes dans lesquels coexistent des échelles de longueurs différentes. Le développement d'une littérature très vaste et à des degrés divers de spécialisation jusqu'à un excellent numéro spécial de Sciences et Vie sur les matériaux [2] permet de prolonger le travail que nous proposons.

Nous voulons ici, de façon concrète, présenter un exercice de T.D. que nous avons pratiqué avec les élèves de D.E.U.G. naturalistes, qui illustre avec précision la notion de fractals et qui est un exercice pratique de statistique tel que chaque étudiant aura un résultat différent des autres mais que des statistiques globales obtenues sur l'ensemble d'un groupe permettront de retrouver des lois statistiques connues exactement. Cet exercice utilise une géométrie de percolation, une autre notion clé de la physique de la matière en désordre sur laquelle de nombreux articles de revue et pédagogiques ont été écrits [3] [4]. L'amas infini qui apparaît au seuil de percolation (2 notions que nous allons rappeler plus loin) est l'objet fractal qui sera étudié. Les étudiants obtenant des résultats différents dans la réalisation de leur propre structure de percolation sont dirigés vers des questions différentes suivant leur propre résultat. Ceci a justifié la construction du texte de T.D. suivant le principe des « livres dont vous êtes le héros ». Sans aller aussi loin que les jeux de rôle, l'originalité de chaque résultat, le besoin de confrontation et d'une mise en

(*) Laboratoire d'Hydrodynamique et Mécanique physique ESPCI, 10, rue Vauquelin, 75231 Paris Cedex 05.

(**) Voir article dans ce numéro, page 983.

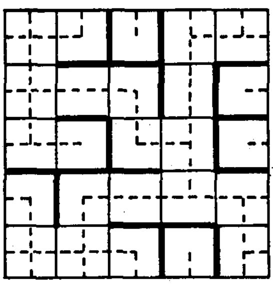
commun pour réaliser un échantillonnage significatif est un élément positif de cette séance.

2) POSER LE PROBLEME.

a) Rappel.

Dans un problème de percolation de liens sur réseau, une fraction $p\,(0 < p < 1)$ de liens tirés au hasard sont déclarés actifs, la fraction complémentaire $q = 1 - p$ étant inactive (liens coupés). Pour une valeur de p inférieure à une valeur critique p_c, fonction du réseau, ces liens se regroupent en amas connexes, disjoints les uns des autres comme un ensemble d'îles d'un archipel. Par contre, pour p supérieur au seuil critique de percolation p_c, il apparaît en plus un amas continu qui s'étend à travers l'échantillon — il serait d'extension infini pour un échantillon infini — comme un continent coexistant avec des îles. Loin au-dessus de p_c, le continent, par incorporation progressive des îles a envahi pratiquement l'échantillon (pour $p = 1$ où tous les liens sont actifs, la couverture est totale). Nous nous intéressons à la valeur critique p_c pour laquelle apparaît pour la première fois ce continent qui est un objet fractal [5], c'est-à-dire un objet statistiquement semblable à lui-même dans une dilatation d'échelle. Pour un réseau carré, le seuil de percolation est égal exactement à 1/2. (La justification simple de ce résultat qui peut faire l'objet d'un exercice est donnée sur la fig. 1).

A

C  D

B

Fig. 1. — Justification de la valeur $p_c = 1/2$ pour le réseau carré de liens. En traits pleins, on a représenté un fragment du réseau (primal) de percolation. En tirets, on a porté le réseau concurrent (ou dual) qui est tel que à chaque lien absent du réseau primal on fait correspondre un lien présent du dual tracé suivant la médiatrice du précédent. Ces deux réseaux ont la même topologie et la même probabilité. De plus, l'existence d'un amas continu sur un réseau entraîne automatiquement l'absence d'amas continu sur l'autre. On a donc automatiquement

$$p_c = 1 - p_c \quad \text{ou} \quad p_c = 1/2.$$

b) **Construction de l'amas.**

Pour tracer le réseau de percolation carré de liens à p_c, il suffit de faire prendre par les étudiants une feuille de papier quadrillé et de les faire choisir par un tirage à pile ou face sur chacun des brins verticaux et horizontaux de cette feuille les liens actifs renforcés à chaque pile, les autres étant considérés comme coupés (inactifs) à chaque face.

Un exemple (réalisé à la maison s'il faut faire 500 tirages individuels !) sur un réseau 16 × 16 est donné en fig. 2. On distingue dans ce cas l'amas dit « infini » qui rejoint les frontières du grillage et un ensemble d'amas finis. L'amas infini n'est pas nécessairement présent car on a un ensemble fini d'éléments. Il existe donc une incertitude sur la position du seuil effectif d'au-

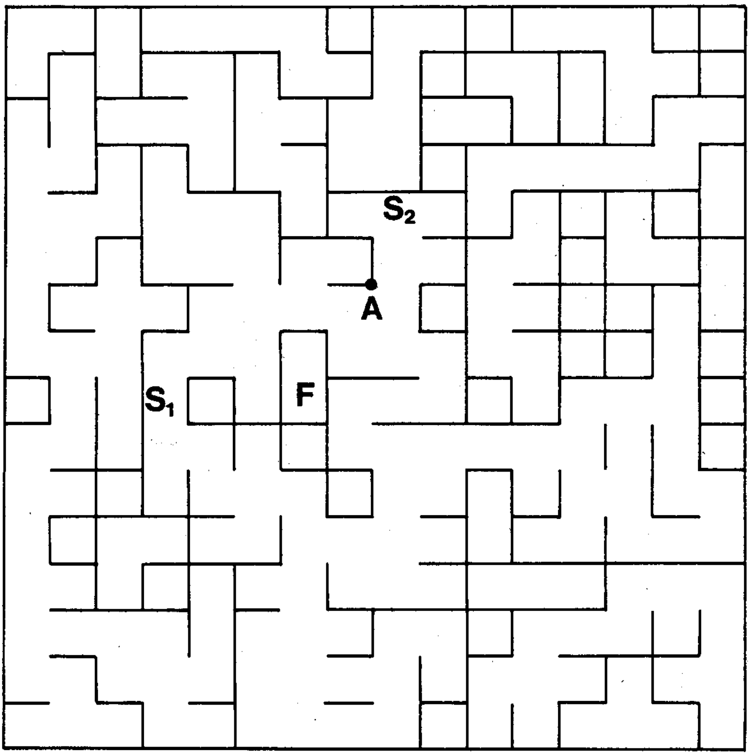


Fig. 2. — Géométrie d'une réalisation de percolation, résultat d'un tirage au sort et présentant un « amas infini ». On a noté les liens sensibles S. L'origine A a servi de centre aux carrés qui ont permis de dénombrer la variation de la densité de l'amas infini avec le côté du carré.

tant plus importante que la taille est faible (celle-ci peut faire l'objet d'une analyse statistique conduisant à la notion critique de longueur de corrélation en regardant les écarts statistiques au seuil sur des amas N $\times$ N de tailles N différentes. Nous ne l'avons pas fait). Il aurait suffi que les liens S_1 ou S_2 de la figure 2 aient été inactifs plutôt que actifs pour que n'existe pas d'amas infini.

Nous avons donc dirigé les étudiants différemment suivant qu'ils obtenaient ou non un amas infini.

c) Analyse de la dimension fractale de l'amas infini ou du plus grand amas.

On utilise la propriété suivante d'objets fractals : la masse (ou nombre d'éléments actifs) de l'objet contenue dans un volume de côté L centré sur l'objet croît comme L^{d_f} où d_f est la dimension fractale de l'objet inférieure ou égale à la dimension de l'espace euclidien ($d = 2$ pour un problème plan) dans lequel il est inscrit (L représente en fait un nombre de liens). Il en résulte que la densité de l'objet décroît lorsque L croît comme $L^{d_f}/L^d = L^{d_f-d}$. Cette décroissance est due à l'existence de trous de plus en plus grands inclus lorsque l'on augmente L.

Ici, il suffit de tracer des carrés de côté L centrés sur un point pris vers le barycentre (A sur la fig. 2) de l'amas et de dénombrer le nombre de points connectés à A, $n(L)$. Lorsqu'on passe de la taille L à L + 2 il suffit de compter le nombre de liens actifs additionnels dans la surface annulaire entre ces deux périmètres.

Pour obtenir la valeur de d_f, les élèves utilisent un papier Log - Log sur lequel ils portent les valeurs obtenues en fonction de L. Les valeurs obtenues par les divers élèves ne s'écartent pas de plus de 3 % de la valeur exacte :

$$d_f = \frac{91}{48} \sim 1{,}89.$$

Pour quelques élèves, il n'a pas été possible d'identifier un grand amas, mais seulement un ensemble d'amas finis. Ceux-ci ont pu seulement travailler sur la deuxième partie de l'exercice (il aurait aussi été possible de les faire travailler alors sur l'ensemble des liens connectés qui, dans ce cas, ont un amas « infini »).

d) Distribution de tailles d'amas.

On appelle taille d'un amas le nombre de liens de cet amas. Le dénombrement du nombre d'amas de taille s, $N(s)$, est la

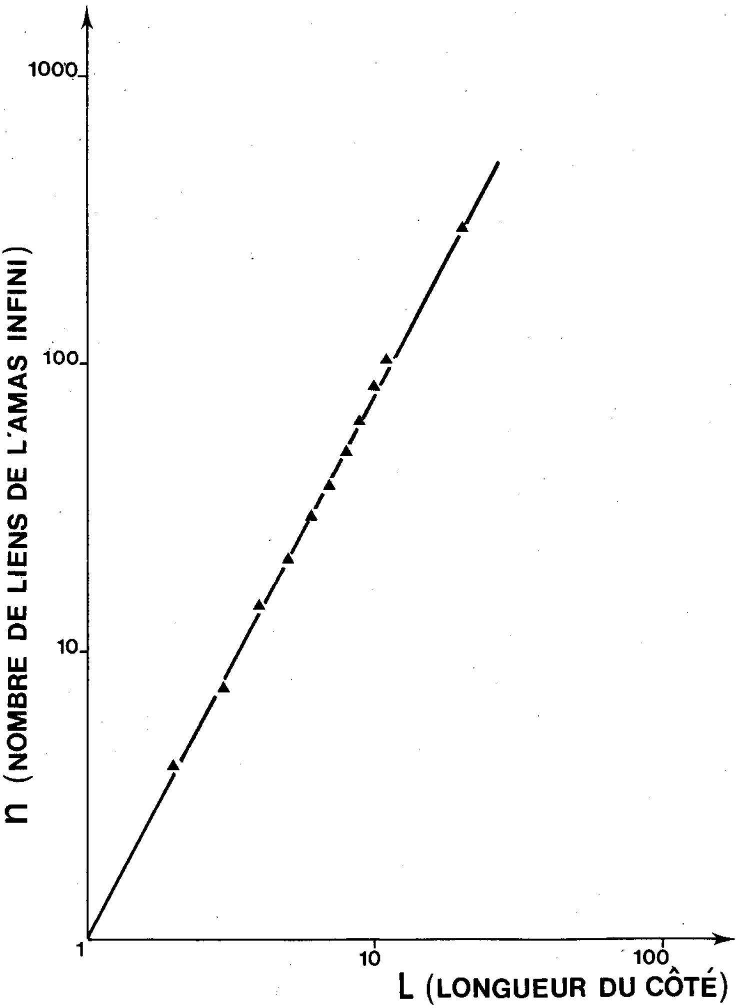


Fig. 3. — Nombre de liens de l'amas infini en fonction de la longueur L du côté du carré dans lequel on a fait le décompte.

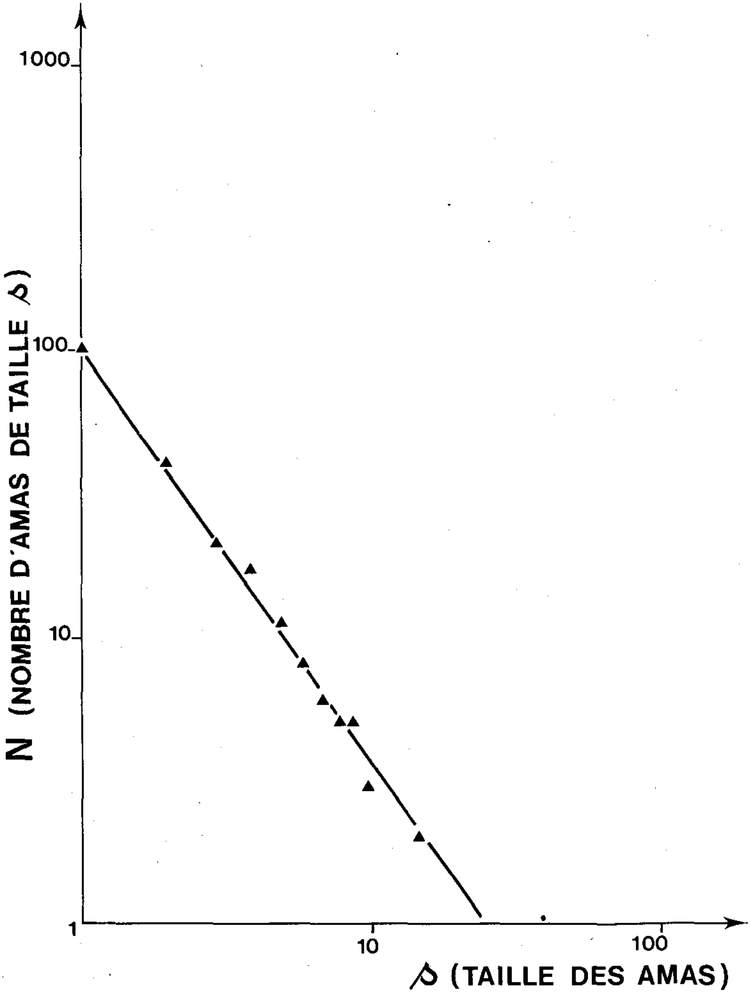


Fig. 4. — Loi de distribution de la taille (ou masse) s des amas, obtenue cumulativement pour tous les élèves d'un groupe de Travaux Dirigés.

deuxième opération de comptage que sont invités à faire les élèves. Au seuil p_c, ce nombre d'amas varie avec s suivant une loi de puissance $N(s) \alpha s^{-\tau}$ où l'exposant τ est un exposant critique, comme d_f, caractéristique du problème de percolation. Le résultat est très général dans les phénomènes critiques. Au point critique d'un fluide où existe le phénomène d'opalescence critique, on observerait, si on pouvait compter la distribution en masse des gouttelettes d'une phase présente dans l'autre, une loi de puissance semblable. La raison en est la suivante : au seuil de percolation, plus généralement en un point critique, la longueur de corrélation (ici l'extension linéaire des plus grands amas) doit devenir infinie : comme il n'existe plus alors d'échelle de référence privilégiée de longueur du système, les observations à toutes les échelles sont équivalentes. C'est l'origine de la structure fractale décrite en c). Dans le même temps, toutes les quantités décrivant les caractéristiques statistiques des amas de tailles finies telles que $N(s)$ (ou le rayon de giration, c'est-à-dire l'extension spatiale des amas ou encore le périmètre des amas), ne dépendent que de s avec une dépendance de loi de puissance qui ne privilégie aucune échelle spatiale. Dans l'énumération d'amas, on n'a retenu que les amas ne touchant pas la frontière de l'échantillon. Le nombre de points obtenus par chaque élève pour chaque valeur de s est insuffisant pour obtenir une loi statistique significative. On cumule les résultats, par valeur de s, obtenus par les différents élèves d'un groupe. Les résultats obtenus par un groupe et portés sur papier Log - Log sont portés sur la fig. 4. La pente obtenue pour les valeurs de s supérieures à 10 conduit à une estimation de l'exposant τ. Les valeurs trouvées autour de $\tau = 1,5$ restent inférieures à la valeur théorique $\tau = 2,05$. Des expériences numériques obtenues sur des réseaux plus grands [3] indiquent que l'effet de courbure reste sensible jusqu'à des valeurs $s \sim 100$.

* Dans l'appendice, nous donnons le détail d'un programme BASIC permettant le dénombrement d'amas de percolation sur petits réseaux (15 × 15) en percolation carré de liens au seuil $p_c = 1/2$. Le programme utilise un algorithme décrit dans la référence [6]. La fig. 5 rassemble les résultats obtenus sur 1 000 réseaux 15 × 15 (3 fois plus que pour l'ensemble de nos étudiants de D.E.U.G. 2e année !) ; 33 107 amas ont été créés. La meilleure régression linéaire en coordonnées Log Log de la loi $N(s) \alpha s^x$ pour $1 < s < 30$ donne $x = 1,861$ qui est aussi très inférieure à la valeur asymptotique théorique.

e) **Autres mesures.**

Une meilleure statistique de la distribution de taille des amas est obtenue en ne se limitant pas aux amas totalement inclus dans les frontières des carrés mais en incluant ceux qui touchent les

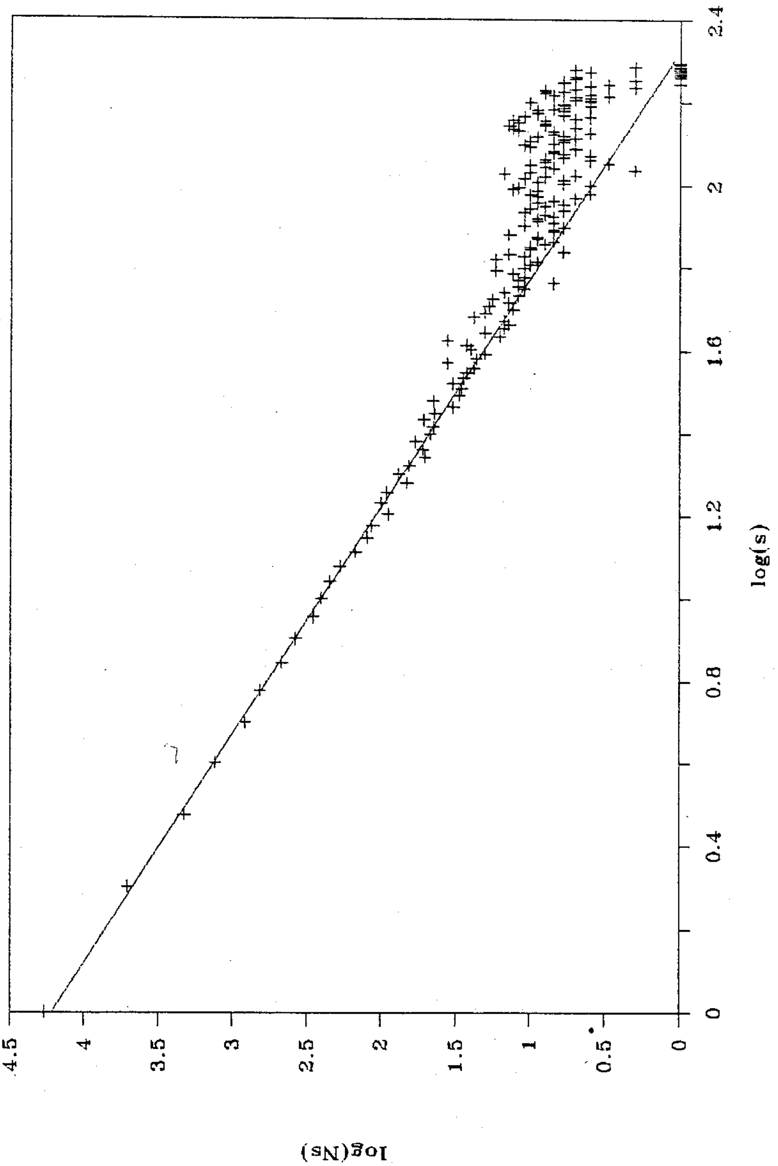


Fig. 5. — Simulation numérique de la distribution en taille des amas finis de percolation correspondant à la fig. 4.

frontières. Pour ceux-ci, on complète l'amas avec une condition de cyclicité à la fois sur les côtés verticaux et horizontaux.

Comme nous l'avons mentionné au cours de cette note, il serait possible d'étudier, dans le même esprit que cette note, d'autres propriétés statistiques de ce problème de percolation. La variation du rayon de giration des amas finis avec s, $R(s) \alpha s^{z}$ en est un exemple. D'autres paramètres présentant des lois fractales du même type peuvent être étudiés tels que le nombre de liens simplement connectés de l'amas infini, la longueur (nombre de liens) du chemin le plus court entre les extrémités de l'échantillon, ou encore le périmètre des amas finis. La référence [3] permet de préciser ces notions ainsi qu'un encart d'un récent article de *La Recherche* [7]. Signalons enfin un exercice récent composé par deux d'entre nous [8] et permettant, à partir d'un motif simple placé sur un pavé carré que l'on peut placer suivant 2 orientations choisies par un tirage au hasard, de construire un chemin continu semblable à la frontière d'un amas de percolation ou encore à la conformation d'une chaîne d'un polymère

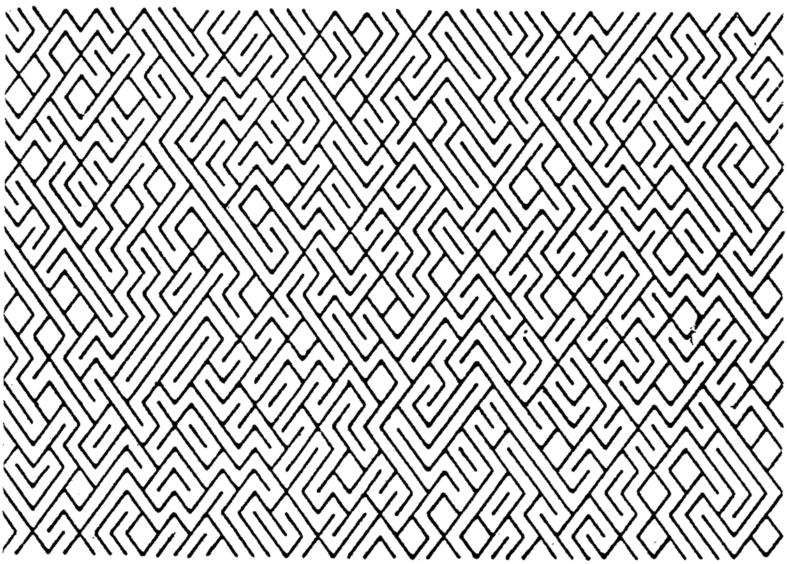


Fig. 6. — La figure a été réalisée à partir de carrés mis côte à côte. Sur chaque carré est tracée une de ses 2 diagonales principales dont l'orientation est au hasard. La figure représente deux réseaux concurrents au seuil p_c. L'ensemble des bandes continues blanches constitue la frontière de l'amas de percolation (de dimension fractale $d_f = 7/4$) et représente bien la configuration de certains modèles de polymères tracés sur un plan [8].

que l'on peut aussi produire et étudier par une manipulation simple. La fig. 6 donne un exemple d'une telle construction. Ce problème présente de très fortes analogies avec celui que nous venons de présenter sur un réseau carré de liens.

3) CONCLUSION.

Cet exercice de T.D. s'est déroulé sur 3 semaines avec un temps relativement limité passé dans chaque séance :

— Définition du problème en T.D.

— Construction du réseau percolant à la maison.

— Contrôle des structures obtenues et définition des grandeurs statistiques à obtenir en T.D.

— Comptages.

— Tracé Log - Log de la loi $n(L)$ et de $n(s)$ par chaque élève à la maison. Mise en commun des données $n(s)$ et tracé de la loi $N(s)$ commune aux élèves dans la 3e séance. La séance de T.D. faisait suite à un cours de 1 h 30 où étaient illustrées les propriétés de fractals à partir de modèles déterministes décrits dans un article du B.U.P. [3]. La réponse des élèves à cet enseignement est très positive comme en témoignent les résultats aux questions d'examen posées sur ce thème.

REFERENCES

[1] C. Bétrencourt, J.-C. Deroche, E. Guyon et P. Jenffer, page 983 de ce Bulletin.

[2] *L'ordre du chaos*, Bibliothèque pour la science (1987).

Les secrets de la matière ; « Science et Vie », numéro spécial, décembre 1987.

[3] D. Stauffer. — *Introduction to percolation theory*. Taylor et Francis, Londres (1985).

[4] E. Guyon. — *Percolation et matière en grains*. Public. Acad. des Sc. Vie Académique. Exposés sur la physique XXVII (1982).

[5] B. Mandelbrot. — *Les objets fractals*. Flammarion (1984).

[6] Hoshan et Kopelman. — Phys. Rev. *B. 14*, 3438 (1976).

[7] E. Guyon et S. Roux. — *La Recherche*, septembre 1987.

[8] S. Roux, E. Guyon et D. Sornette. — Jour. of Phys. *A 21* L 475 (1988).

APPENDICE

```
 Enumeration d'amas en percolation sur petits reseaux
 resau carre de lien, conditions aux limites : libres

dim h(20,20),v(20,20),s(20,20),hi(300)
input "taille du reseau ";n
input "nombre de reseaux ";nlat
for nl=1 to nlat

tirage aleatoire des liens horizontaux (h) et verticaux (v)

for i=1 to n:for j=1 to n-1:h(j,i)=(rnd<0.5):v(i,j)=(rnd<0.5):next j,i

numerotation de la ligne de base

s(1,1)=1
for j=2 to n:if v(1,j-1) then s(1,j)=s(1,j-1):else s(1,j)=j:next j

numerotation dans le reseau
  a: liens horizontaux

for i=2 to n:for j=1 to n
if h(i-1,j) then s(i,j)=s(i-1,j):else s(i,j)=(i-1)*n+j
next j

  b: liens verticaux

for j=1 to n-1:if v(i,j) then x=s(i,j):y=s(i,j+1):else goto 20
ii=(x-1)\n+1:jj=((x-1) mod n)+1
1 if s(ii,jj)<>x then x=s(ii,jj):ii=(x-1)\n+1:jj=((x-1) mod n)+1:goto 21
kk=(y-1)\n+1:ll=((y-1) mod n)+1
2 if s(kk,ll)<>y then y=s(kk,ll):kk=(y-1)\n+1:ll=((y-1) mod n)+1:goto 22
if x=y goto 20
if x>y then z=x:x=y:y=z:kk=ii:ll=jj
s(i,j)=x:s(i,j+1)=x:s(kk,ll)=x
) next j,i

fin de numerotation

calcul de la masse des amas
   a: ligne de base

s(1,1)=-1
for j=2 to n:x=s(1,j):ii=(x-1)\n+1:jj=((x-1) mod n)+1
if x=s(ii,jj) then s(1,j)=-1:goto 23
ŀ if s(ii,jj)>0 then x=s(ii,jj):ii=(x-1)\n+1:jj=((x-1) mod n)+1:goto 24
s(ii,jj)=s(ii,jj)-1
} next j

   b: pour le reste du reseau

for i=2 to n:for j=1 to n:x=s(i,j):ii=(x-1)\n+1:jj=((x-1) mod n)+1
if x=s(ii,jj) then s(i,j)=-1:goto 25
; if s(ii,jj)>0 then x=s(ii,jj):ii=(x-1)\n+1:jj=((x-1) mod n)+1:goto 26
s(ii,jj)=s(ii,jj)-1
; next j,i
```

```
'       enregistrement de l'histogramme
'
        for i=1 to n:for j=1 to n:if s(i,j)>0 then goto 30
        m=-s(i,j):hi(m)=hi(m)+1
30      next j,i
'
'       fin du traitement pour un reseau
'
40      next nl
'
'       impression de l'histogramme a l'ecran
'
        for i=1 to n*n:print i,hi(i):next i
        end
```