82e Année - N° 707 Publication mensuelle Octobre 1988

Bulletin de l'Union des Physiciens

Association de professeurs de Physique et de Chimie

Physique et géométrie du désordre dans l'enseignement :

L'EXEMPLE DES FRACTALS

par Claudine BÉTRENCOURT, Jean-Claude DEROCHE,
Etienne GUYON et Patrice JENFFER,
Physique S.N.V., Bât. 333,
Université Paris-Sud, 91405 Orsay.

1. INTRODUCTION.

1.1. Les matériaux hétérogènes : petit et grand désordre.

De très nombreux systèmes physiques sont désordonnés à une échelle *microscopique* (verres, matériaux amorphes) ou *mésoscopiques* (sols, grès et milieux frittés, poreux, solides composites constitués de mélanges de substances de propriétés électriques ou mécaniques différentes, du bois aux composites de fibre de carbone). L'objectif premier des études sur ces matériaux est d'en décrire les propriétés moyennées permettant d'étudier leurs comportements *à une échelle macroscopique :* la conductivité ou les modules élastiques d'un composite, la perméabilité — ou conductivité hydraulique — d'un poreux. Ces études font appel aux propriétés de phases en présence, à celles de leurs interfaces et enfin à leur répartition géométrique. Les méthodes classiques sont héritières du travail de CLAUSIUS et MOSSOTTI permettant de calculer la contribution d'une inclusion sphérique de constante diélectrique différente [1] de la constante diélectrique moyenne du matériau dans lequel elle est noyée. Ces méthodes ne font pas, en général, référence explicite à la géométrie des systèmes désordonnés au-delà de la connaissance des pourcentages des phases et de certaines caractéristiques d'homogénéité et d'isotropie. Elles s'appliquent bien tant que le désordre est assez limité, comme c'est le cas pour des grains de taille uniforme et relativement régulièrement distribués au sein d'une autre phase. Dans ce cas, on peut étudier les propriétés moyennes sur un volume de l'ordre de quelques tailles de grains élémentaires [2].

Il existe une autre classe de systèmes à « grand désordre » dans lesquels coexistent des hétérogénéités de tailles très différentes. Ce sera le cas d'un empilement de grains sortant d'un concasseur, toutes tailles confondues (on obtient souvent une distribution Log-Normale des rayons) et brassées dans une pâte de ciment. Un autre exemple serait le cas d'un mélange de grains conducteurs et isolants [3]. C'est la distribution au hasard des grains conducteurs qui conduit dans ce cas à une coexistence d'amas conducteurs de tailles très différentes. Dans ces deux exemples, où coexistent un ensemble d'échelles de taille, les méthodes d'homogénéisation ne sont plus adaptées.

Récemment se sont développés, en relation avec des problèmes de physique « de matière mal condensée », un ensemble de concepts permettant de donner une géométrie à ce grand désordre et de calculer les propriétés physiques de ces systèmes. La notion de fractal [4] et celle de percolation [5] s'appliquent en particulier aux deux derniers exemples.

1.2. Enseigner le désordre.

Nous avons montré dans plusieurs articles simples [6] [7] le rôle unificateur du concept de percolation et aussi son rôle formateur pour un public de jeunes étudiants pas particulièrement motivés pour la physique (étudiants de D.E.U.G. B ou de Sciences de la Nature et de la Vie - S.N.V.). Le succès de cette expérience nous a ainsi conduit à introduire dans notre enseignement la notion de fractal qui rend compte de l'état d'organisation de systèmes désordonnées (ou non) à l'intérieur desquels existe une symétrie particulière, dite de dilatation, et que l'on rencontre dans de nombreux milieux naturels. Cette symétrie est aussi présente dans des systèmes physiques au voisinage d'un seuil critique tel que l'amas conducteur près d'un seuil de percolation électrique ou encore dans la distribution des tailles de goutelettes liquides près du point critique d'un fluide.

L'étude géométrique de ces systèmes physiques ou mathématiques simples permet de concrétiser la notion apparemment très abstraite de *dimension fractale* en s'appuyant sur des exercices très concrets d'analyse dimensionnelle. Elle a aussi l'avantage de soutenir l'attention d'élèves par des images fortes rendues possibles par les simulations sur ordinateur et qui envahissent « le marché » [8]... Autant en maîtriser le sens physique !

Nous décrirons les règles de la géométrie fractale en nous appuyant d'abord sur des modèles mathématiques simples dits déterministes. Nous donnerons ensuite quelques exemples qui montrent la variété des systèmes réels désordonnés (stochastiques) auxquels cette notion s'applique en l'illustrant à l'aide d'exercices que nous avons proposés aux étudiants sur ce thème. Enfin nous essaierons de dégager une réflexion sur l'originalité pédagogique d'un tel enseignement fondé sur l'étude de la géométrie du désordre. Cet exposé ne vise pas à une présentation systématique du sujet qui a été très bien couvert par les comptes rendus de nombreuses conférences [9] et des articles de revues [10] très accessibles, mais à une illustration d'une pédagogie de transfert direct de notions nouvelles mais simples vers de jeunes élèves.

2. EXEMPLES DE FRACTALS REGULIERS ET DIMENSION FRACTALE.

Deux exemples classiques d'objets fractals réguliers ou déterministes sont la courbe de Von Koch (fig. 1) et le tamis de

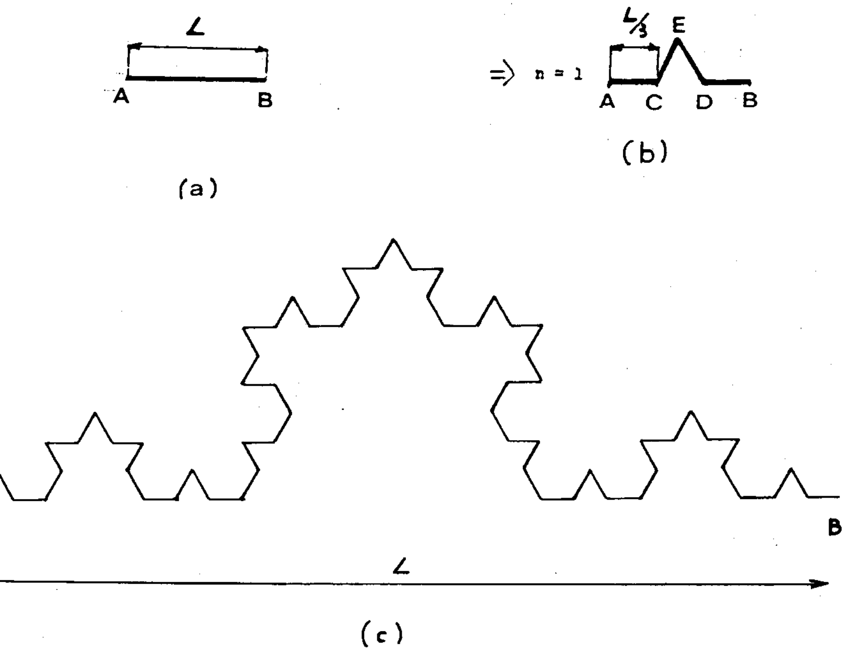


Fig. 1. — Courbe de Van Koch. Partant d'un segment AB de longueur unité (fig. 1 *a*), on remplace le tiers central CD par une ligne brisée C E D (fig. 1 *b*). La fig. (fig. 1 *c*) présente à plus grande échelle la courbe après $n = 3$ itérations. Sa longueur diverge avec n comme $(4/7)^n$.

SIERPINSKI (fig. 2). La construction de ces deux objets consiste, dans chaque cas, en une itéré où l'objet à un ordre n est obtenu à partir de l'itération d'ordre $n - 1$ en appliquant aux éléments du motif (les segments dans le premier cas ; les triangles pointe en

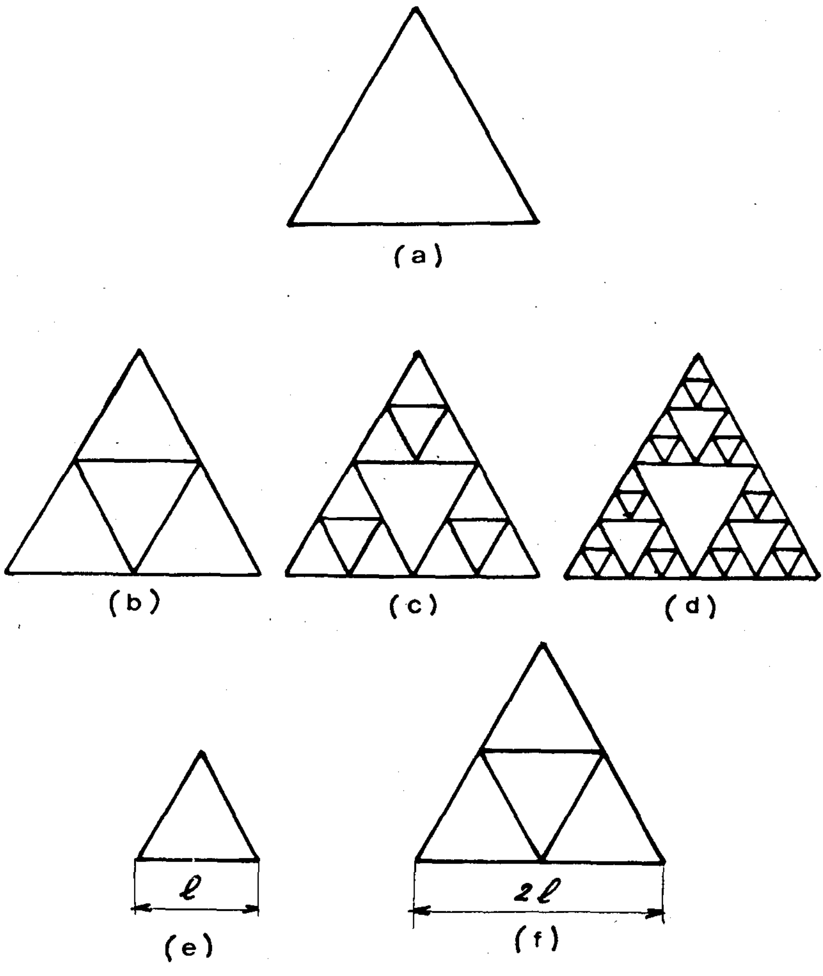


Fig. 2. — Tamis de SIERPINSKI dont on a représenté les 3 premières itérations (b à d). Il est aussi possible de construire le même motif par additions de motifs en partant d'un motif triangulaire élémentaire (e à f).

haut dans le second) l'opération initiale (une ligne brisée de longueur = 4/3 de la longueur de chaque segment initial ; l'introduction d'un triangle pointe en bas dans le triangle pointe en haut). Si on répète suffisamment de fois le processus, le motif final gardera les limites macroscopiques de l'objet initial (échelle *majeure L*) mais possèdera des détails très fins jusqu'à une échelle *mineure l* ($\ll L$). Si on observe ces objets à des grossissements différents, tels que l'échelle intermédiaire λ ($l \ll \lambda \ll L$) occupe le champ d'observation, on verra le même motif indépendamment du grossissement. En dehors des symétries ponctuelles (miroirs et symétries de rotation) et de la symétrie de translation (celle du cristal), l'opération de dilatation superpose aussi l'objet à lui-même. On qualifie cette symétrie de dilatation d'auto (ou self) similarité.

Une caractéristique physique importante des objets fractals est l'existence d'une *dimension fractale* (pas nécessairement entière) D. Les deux objets que nous avons cités couvrent le plan plus que ne le ferait une ligne et moins qu'une surface. Pour comprendre ce résultat, imaginons que l'on couvre une surface ordinaire caractérisée par une échelle 1 avec une couche uniforme de peinture de masse M (l). Pour couvrir une surface de même force mais d'échelle de longueur :

$L = \alpha l$, il faut une masse de peinture : $M(L) = \alpha^d M(l)$ (1)
avec ici : $d = 2$ puisqu'il s'agit d'une surface.

De façon générale, on aurait pour un rapport de grandissement α dans un espace de dimension d :

$$M(L) = \alpha^d M(l). \tag{2}$$

La masse linéique, surfacique ou volumique (selon que d = 1, 2, ou 3) est définie par :

$$\varrho(L) = (M(L)/L^d) = (\alpha^d M(l)/\alpha^d l^d) = (M(l)/l^d). \tag{3}$$

Elle est donc constante, indépendamment de la grandeur L de l'objet considéré, dans un espace euclidien habituel.

Ce formalisme peut être généralisé aux objets fractals. Partons d'un triangle élémentaire (fig. 2 *e*) de côté l d'un tamis de SIERPINSKI et construisons un tamis complet en mettant côte à côte de façon itérative des triangles élémentaires. À la première étape (2 *e* à 2 *f*), il faudra pour peindre les triangles pointe en haut, une quantité de peinture :

$$M(2l) = 3\,M(l)$$

puisque l'on a un motif de 2 triangles mais on a, par définition de la dimension fractale :

$$M(2l) = 2^D M(l)$$

d'où :

$$D = \text{Log}\,3/\text{Log}\,2 = 1{,}584.$$

A de tels objets corresopnd une masse volumique qui décroît suivant une loi de puissance et telle que :

$$\rho\,(2l) = M\,(2l)/(2l)^d = 2^D(M(l)/^d)$$
$$= 2^{D-d}\,\rho\,(l),$$

soit en général :

$$\rho\,(L) = \alpha^{D-d}\,\rho\,(l) \qquad (4)$$

qui tend vers zéro lorsque $L = \alpha l$ tend vers l'infini ($D < d$).

On peut calculer de même la dimension fractale de la courbe de Van KOCH. A chaque itération, la longueur est multipliée par (4/3). Au bout de n itérations, on a une longueur multipliée par $(4/3)^n$ qui diverge avec n. La notion de ligne apparaît donc insuffisante pour caractériser cette courbe infiniment brisée. Puisqu'une telle « courbe » d'extension finie a une longueur infinie, on trouve, en suivant un raisonnement analogue au précédent que sa dimension fractale est D = (Log 4/Log 3) = 1,262. La présentation précédente est simple et bien illustrée dans la bande dessinée « Les Fractals » [11].

Nous allons proposer maintenant une description voisine plus générale et ne faisant pas appel à la géométrie déterministe de l'objet. Revenons aux points, lignes, surfaces, volumes tracés dans l'espace. On peut en définir la dimension euclidienne d de la façon suivante. En chaque point de ce système de grande dimension L (sauf pour les points), on centre une petite sphère de rayon l et on s'intéresse au volume V obtenu par recouvrement de ces sphères lorsque l devient très petit devant L. On obtient (fig. 3) :

points (3 *a*)	*lignes* (3 *b*)	*surface* (3 *c*)	*volume* (3 *d*)
$V = (4/3)\pi l^3$	$V = \pi l^2 L$	$V = L^2 2l$	$A L^3$ constante.

En négligeant les préfacteurs, on peut écrire de façon générale :

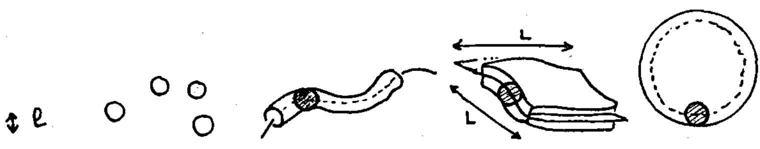


Fig. 3. — Construction de MINKOWSKI utilisant l'enrobage par une sphère de dimension (mineure) l de points, lignes, plans, volumes. Le volume de l'enrobé est donné par la formule 5 avec D = 0, 1, 2, 3.

$$V = L^D l^{d-D} \tag{5}$$

où D est la dimension de l'objet, $d = 3$ la dimension de l'espace dans lequel cet objet est tracé. Dans ces 4 exemples, la dimension fractale D = 0, 1, 2, 3.

On peut aisément généraliser ce résultat à celui d'objets (points, lignes, surfaces) tracés sur une feuille de papier ($d = 2$) dont la surface recouvrante S par des disques de rayon l est donnée par :

$$S = L^D l^{2-D}. \tag{6}$$

On peut étendre les formules 5 et 6 à des fractals de dimension D quelconque. Ces formules restent bien homogènes respectivement à un volume et une surface. Appliquons ce résultat à la courbe de Von Koch. La longueur l représente en quelque sorte l'épaisseur du trait avec lequel on a tracé les motifs réguliers et on s'intéresse à la surface couverte par les traits une fois que l'on a itéré indéfiniment la construction. A chaque itération, on crée des segments trois fois plus petits qu'à l'itération précédente soit, au bout de n itérations de longueur,

$$l = L_0/(3^n). \tag{7}$$

La longueur totale de la « courbe » est alors de :

$$\delta = L_0 \times (4/3)^n$$

et la surface recouvrante que l'on peut construire avec des cercles de rayon l (ou des traits de largeur l) :

$$S = l \cdot \delta = L_0 \times (4/3)^n \times l = l^2 \times 4^n. \tag{8}$$

On utilise alors l'identité :

$$4^n = (3^n)^{(\mathrm{Log}\ 4/\mathrm{Log}\ 3)}$$

que l'on peut vérifier en prenant le Log des 2 membres.

La relation (8) s'écrit alors :

$$S = l^2 (3^n)^{(\mathrm{Log}\ 4/\mathrm{Log}\ 3)} \tag{9}$$

ou, en utilisant la relation (7) :

$$S = l^2 (L_0/l)^{(\mathrm{Log}\ 4/\mathrm{Log}\ 3)} = L_0^{(\mathrm{Log}\ 4/\mathrm{Log}\ 3)}\ l^{2-(\mathrm{Log}\ 4/\mathrm{Log}\ 3)}.$$

En identifiant avec la formule (6), on trouve finalement la valeur :

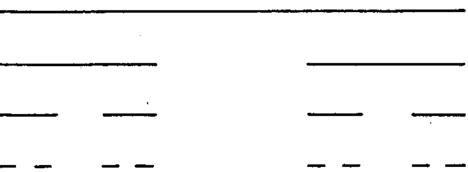
$$D = (\mathrm{Log}\ 4/\mathrm{Log}\ 3) = 1{,}262$$

déjà vue précédemment.

Exemples d'exercices de T.D. :

Déterminer la dimension fractale D, dans chaque cas.

I — Ensemble de Cantor :

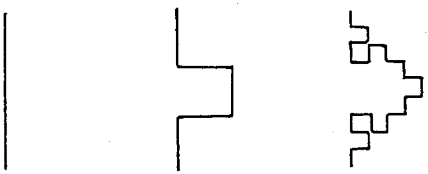


$D = (\text{Log } 2/\text{Log } 3) = 0{,}63$

$D < 1$

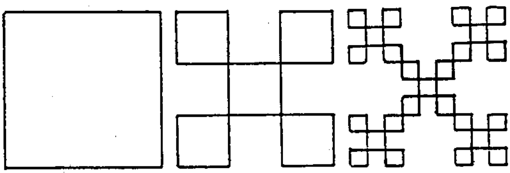
II —

$D = (\text{Log } 5/\text{Log } 3) = 1{,}4649.$



III —

$D = (\text{Log } 5/\text{Log } 3) = 1{,}4649.$



On peut considérer l'exemple II comme étant le côté ou la frontière du « carré » de l'exemple III. On a donc un objet dont la « surface » a la même dimension fractale que sa frontière.

IV — L'Éponge de Menger : un corps poreux déterministe (voir texte d'un problème de T.D.) (fig. 4).

3. FRACTALS DESORDONNES ET SYSTEMES REELS.

Il est possible d'obtenir des systèmes fractals désordonnés et qui ne possèdent la propriété d'invariance par dilatation que de façon moyenne. Nous en décrirons deux exemples, l'amas infini de percolation au seuil de percolation et des agrégats obtenu par diffusion et collage de particules au hasard. Ces deux cas ont donné lieu à de nombreux prolongements en relation avec des problèmes sur des systèmes physiques réels.

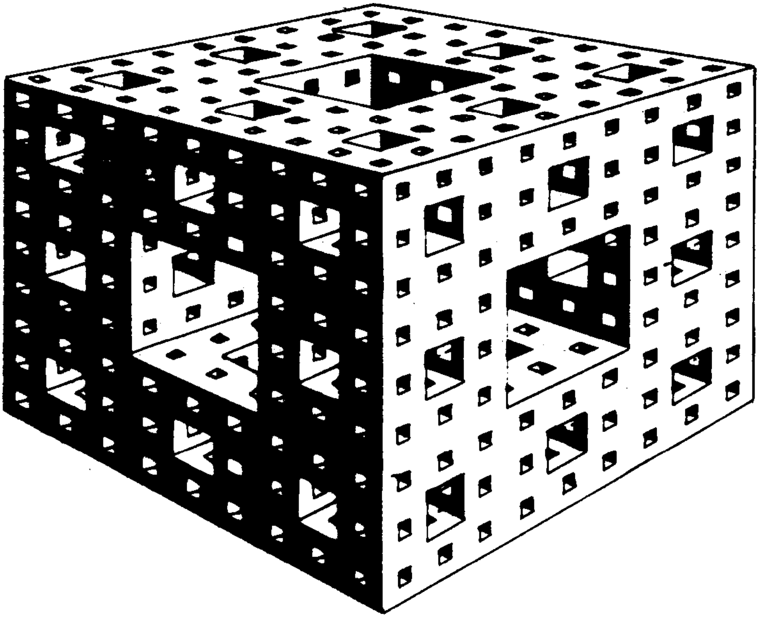


Fig. 4. — L'éponge de SIERPINSKI-MENGER est un modèle déterministe d'un fromage dans l'espace à 3 dimensions dont la masse volumique tend vers zéro avec l'ordre d'itération (d'après un dessin tiré du livre de MANDELBROT [4]).

3.1. Amas de percolation à p_c.

Rappelons brièvement le problème de percolation [5] en utilisant l'exemple d'un réseau carré de liens. On dispose sur ce réseau un pourcentage p (variable entre 0 et 1) de liens actifs, les liens coupés étant en pourcentage $1 - p$. Lorsque p augmente, il existe une distribution d'amas constitués de sites liés par des liens actifs dont la taille croît avec p. Il existe sur un réseau infini une valeur seuil p_c (dans le cas présent $p_c = 1/2$) pour laquelle apparaît pour la première fois un amas infini c'est-à-dire ayant des prolongements à l'infini dans toutes les directions de l'espace. Au-dessus de ce seuil, cet amas s'enrichit par rattachement des amas de taille finie. La fig. 5 *a* donne une image de la distribution de liens actifs dans ce problème de percolation à p_c pour un système de taille finie. On a fait abstraction des amas « finis » qui ne relient pas les barres supérieure et inférieure du modèle numérique, et on ne visualise que l'amas conducteur ou amas « infini » constitué de 3 types d'éléments : des bras morts (traits

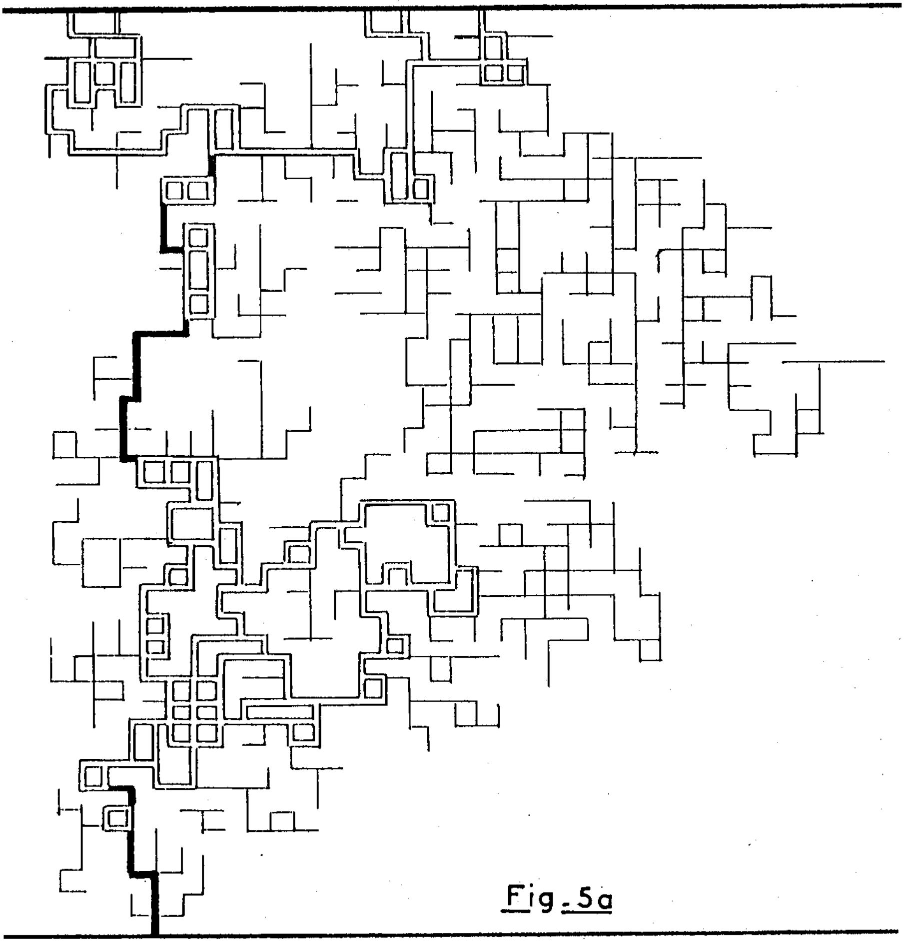


Fig .5. — Simulation numérique d'un problème de percolation de liens carrés au seuil $p_c = 1/2$ (photographies dues à la courtoisie de C. D. MITESCU) :

a) ensemble des liens actifs. On a supprimé tous les liens qui ne sont pas connectés simultanément aux deux barres extrêmes horizontales. La distribution de « largeur de trait » indique l'importance décroissante des courants dans les différents liens. Les bras morts dans lesquels ne passe aucun courant sont indiqués en traits fins ;

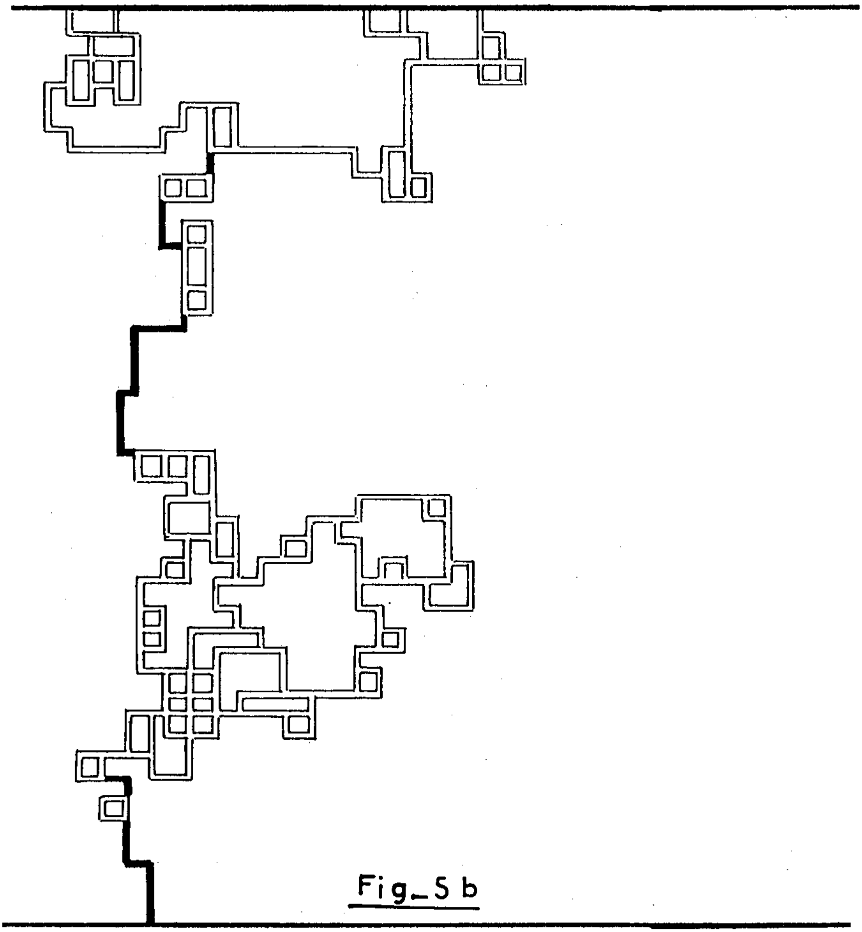


Fig_5 b

b) l'amas continu débarrassé de ses bras morts — l'armature de l'amas de percolation — permet de dégager la notion de liens simplement connectés et de boucles. Pour un système de taille infinie, la structure de l'amas infini et de son armature est un fractal et possède une hiérarchie de tailles de boucles, de liens simplement connectés et de bras morts. Notons que la dimension fractale de l'armature de l'amas infini D' est strictement inférieure à celle de l'amas infini D (pour un amas de grande taille D = 91/48, D' = 1,65.

Il est très facile de faire simuler un tel problème de percolation et de donner accès à la notion de phénomènes critiques) des élèves avec une feuille de papier quadrillé et une pièce de monnaie (p_c = 1/2 l).

fins) qui ne peuvent pas faire passer de courant d'un bord à l'autre, des éléments simplement connectés qui sont tels que la suppression d'un seuil de ces éléments coupe l'amas en deux et où passe le courant le plus élevé (traits plein noir), et des *boucles de liens en parallèles.* La fig. 5 *b* montre l'amas infini dégagé de ses branches mortes et souligne la fragilité de la connection réelle entre les deux barres. Dans ce modèle sur un réseau de petite taille, la notion d'amas infini a été utilisée de façon abusive, puisque cette taille établit une coupure spatiale supérieure. Imaginons un tel modèle sur un réseau de très grande taille. On observerait une structure constituée des mêmes types d'éléments que ceux que nous venons de décrire mais qui serait statistiquement identique à elle-même par symétrie de dilatation. Ceci vient de ce que, au seuil de percolation, $\xi(p)$, qui caractérisait la taille des plus gros amas pour $p < p_c$, diverge. La seule longueur caractéristique du problème est alors la longueur d'un lien élémentaire. L'observation de l'amas de percolation est donc indépendante de l'échelle du grossissement. On observe en particulier la coexistence de trous de toutes échelles. On peut définir à p_c la dimension fractale à partir de la fonction de corrélation à 2 points :

$$C(R) = \overline{n((\vec{r})\, n(\vec{r} + \vec{R})}/\overline{n(\vec{r})} \qquad (10)$$

où $n(\vec{r})$ est égal à 1 si le point $\vec{r} + \vec{R}$ est sur le même amas que le point $\vec{r}$. La moyenne est obtenue sur toutes les origines possibles et toutes les directions. La fonction ne dépend que de la distance $|\vec{R}|$ entre les deux points et décroît à p_c suivant une loi de puissance définie par la dimension fractale D :

$$C(R) \propto R^{D-d}. \qquad (11)$$

Pour un réseau de densité uniforme tel que $d = D$, cette fonction de corrélation ne dépend pas de R. Elle a une valeur égale à la densité.

Une façon plus simple de se représenter la formule (11) est la suivante :

On prend un point au hasard sur l'amas de percolation et on trace un cercle de rayon R. On compte le nombre de grains N (R) à l'intérieur de ce cercle. On répète ce tracé pour un ensemble de valeurs de rayons. On s'attend à une loi :

$$N(R) \sim R^{D} \qquad (12)$$

si on considère que :

$$N(R) \propto \int_0^R r^{D-d}\, dr.$$

Bien évidemment, pour un réseau uniforme on vérifie que N (R) croît comme R^d (on veut faire vérifier cette procédure sur l'amas de la fig. 6 en comptant le nombre de points à l'intérieur de cercles de rayon R variable). Nous verrons plus loin d'autres applications de cette approche.

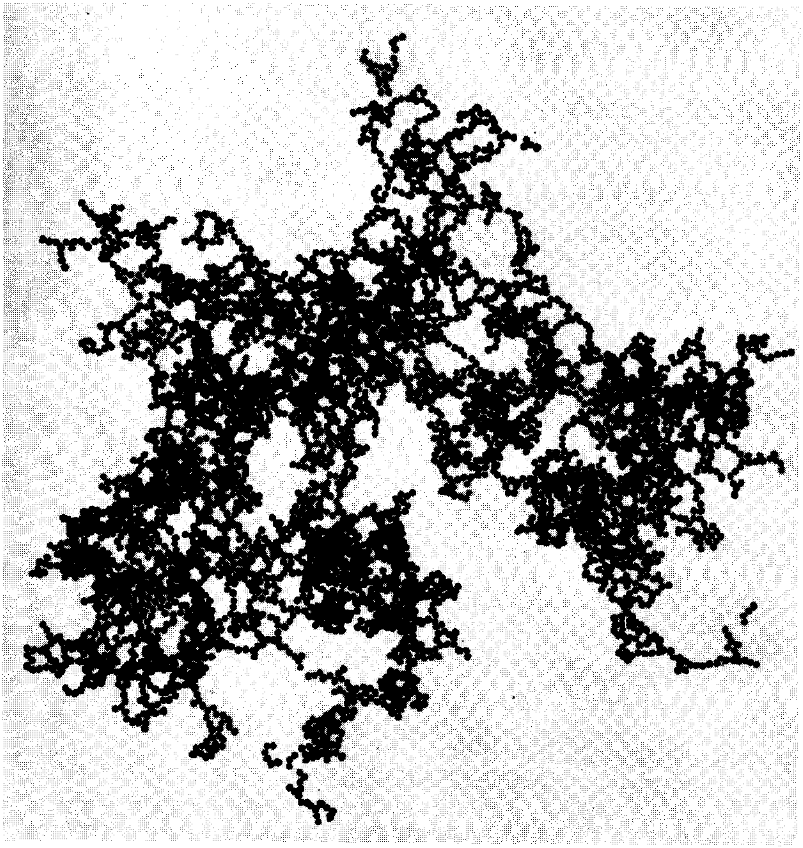


Fig. 6. — Cliché de microscopie électronique d'un agrégat de particules d'or colloïdal (la taille du grain élémentaire l est de l'ordre de quelques 10^2 Å). La structure fractale d'un tel agrégat dont la croissance est contrôlée par la diffusion de particules est commune à de nombreux autres problèmes de croissance (D. WEITZ [12]).

3.2. Pour $p < p_c$.

Il existe un ensemble d'amas finis. La fonction de corrélation moyenne sur ces amas varie alors comme :

$$C(R) = r^{-D} e^{-R/\xi(p)} \tag{13}$$

Le second facteur donne une décroissance brutale de $C(R)$ pour des tailles R supérieures à $\xi(p)$ et traduit le fait que la taille maximum des amas est de l'ordre de la longueur de corrélation $\xi(p)$. Bien sûr, si l'on étudie la fonction de corrélation, ou le nombre $N(R)$, à des échelles $R < \xi$, on retrouve la même structure fractale que pour l'amas infini. Ce n'est qu'à des échelles supérieures que l'on sait si on est sur une île ($p < p_c$ et ξ fini) ou sur le continent à $p = p_c$ (pour p supérieur à p_c la fonction $C(R)$ décroît de nouveau suivant la forme (13) mais il existe un terme constant supplémentaire $P(p)$ fini qui traduit l'effet de la densité moyenne finie de l'amas de percolation à des échelles suffisamment grandes) [5].

La forme (13) a été vérifiée directement en particulier sur des dépôts minces d'or évaporés sous vide. Les atomes d'or se déposent au hasard sur le substrat de verre placé en face de la source d'évaporation. A la limite de continuité (et de conductivité) de ces films, le chemin continu métallique forme un amas de percolation. Par analyse d'images, on a pu isoler l'amas de percolation de l'ensemble des amas finis et on a bien pu vérifier la forme de la loi de $N(R)$ avec une valeur $D = 1{,}86$ qui est conforme aux prédictions théoriques en percolation.

3.3. **Agrégats fractals.**

Il y a quelques années, WITTEN et SANDER ont remarqué que la structure très lâche d'agrégats tels que des particules de suie pouvait aussi être caractérisée par une structure fractale telle que la relation (12) s'applique à des échelles inférieures à la taille de la particule. La fig. 6 montre un agrégat obtenu par collage de petits grains d'or présents dans une solution colloïdale d'or [12]. Une telle solution (utiliseé dès le moyen âge : peintures de vitraux, alchimie) est généralement stable par suite de répulsions électrostatiques des grains. Si on ajoute un sel à cette solution, on réduit les barrières répulsives électrostatiques entre particules. Les particules vont se coller l'une à l'autre pour former des agrégats tels que celui de la fig. 6 que l'on voit en projection. La forme très déchiquetée de l'amas provient de ce qu'il est beaucoup plus probable pour une particule nouvelle approchant par une marche au hasard (brownienne) de l'amas, de se coller à sa périphérie, que d'atteindre le fond d'un « fjord » de l'amas.

La valeur de la dimension fractale d'un tel agrégat, qui peut être calculée par la méthode décrite à partir de la formule (12) est $D = 1{,}75$. De plus, quand on regarde un ensemble d'agrégats de tailles différentes (leur taille moyenne δ étant définie comme la demi-somme de la longueur et de la largeur du plus petit rectangle contenant l'agrégat), obtenus par ce processus, on constate qu'il existe aussi une relation : $N(\delta) \propto \delta^D$, entre le nombre de particules contenues dans l'agrégat, N, et la taille δ, avec une valeur du même ordre pour D que précédemment.

De nombreuses informations numériques ont été obtenues sur la nature fractale des amas formés par agrégation en fonction des lois de collage, des types de mouvements de particules. L'article de JULLIEN [10] et le film spectaculaire réalisé par KOLB [14] sont de bonnes références récentes sur ce sujet. A côté d'expériences ou de calculs sophistiqués sur ce sujet, retenons l'expérience simple initiée par ALLAIN et JOUHIER [15]. Des petites billes de cire sont jetées à la surface de l'eau et sont initialement dispersées. Par suite de leurs interactions capillaires, elles s'attirent et forment des agrégats fractals très semblables à ceux observés précédemment. Cependant le fait que deux billes en contact peuvent tourner l'une autour de l'autre entraîne une certaine restructuration des agrégats après collage et une structure plus compacte des agrégats bidimensionnels ainsi obtenus.

On retrouve dans beaucoup de systèmes différents des formes d'agrégats comparables à l'agrégat d'or colloïdal de la fig. 6. Des problèmes aussi différents que la propagation d'une fissuration à partir d'un point, une figure de claquage électrique, ou que la croissance cathodique de certains dépôts présentent des formes semblables et la même dimension fractale que l'agrégat d'or. Lorsqu'on chasse d'un milieu poreux un fluide visqueux par un fluide moins visqueux, on obtient des digitations semblables. Enfin l'exemple de la photo de la fig. 7 montre une structure formée accidentellement à l'intérieur d'une vitre d'un supermarché qui est due vraisemblablement à la propagation d'un décollement entre 2 couches de verre.

La raison de la correspondance entre ces divers problèmes est une similarité formelle. Dans tous ces exemples, la phase entourant l'agrégat obéit à une équation de LAPLACE pour une variable scalaire (le potentiel pour l'exemple du claquage ou du dépôt cathodique, le champ de pression pour la digitation visqueuse...). La surface de l'agrégat est une équipotentielle de cette variable et la croissance se fait proportionnellement au gradient de cette variable (un champ) à la surface ; elle est donc plus rapide aux pointes. Par ailleurs, la marche au hasard conduisant à la croissance de l'amas limité par diffusion est une représentation discrète de la solution de l'équation de LAPLACE [16]. L'analogie entre ces structures n'est donc pas surprenante même si l'analyse détaillée des correspondances demanderait beaucoup plus de place que ne le permet cet article.

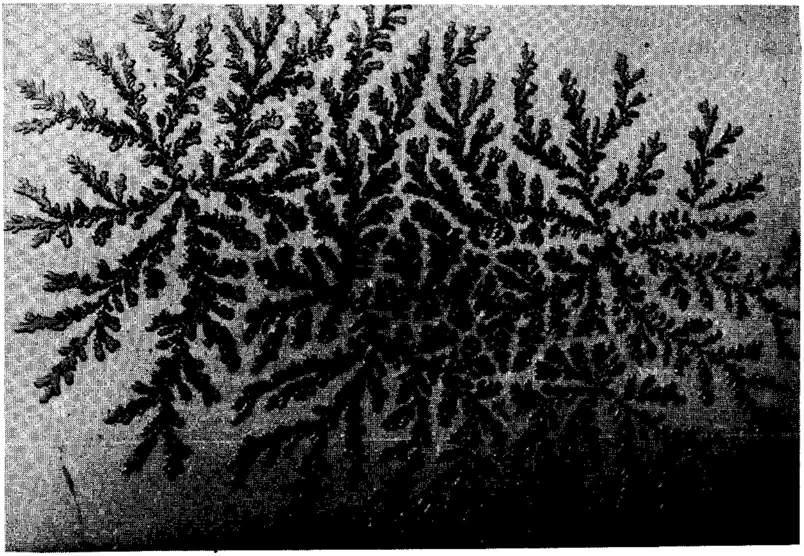


Fig. 7. — Photographie d'une vitre d'un Supermarché de Marseille qui a été accidentellement dégradée probablement par décollement d'un double vitrage à partir de bulles centrales initialement dans le vitrage (cliché R. BLANC).

3.4. **Milieux divisés fractals.**

De nombreuses structures divisées telles que des milieux poreux, des gels de silice, des systèmes granulaires ont une structure fractale. Cette structure peut concerner l'espace des grains lui-même ou tout simplement la surface des pores. Considérons successivement ces deux cas.

3.4.1. POREUX FRACTALS EN VOLUME.

Un ensemble modèle d'un tel système est l'éponge de MENGER qui est un cube que l'on vide de façon itérative (fig. 4) : on divise ce cube en 3^3 cubes égaux et on enlève le cube central ainsi que les 6 cubes qui sont en contact avec le milieu des faces. Comme le remarque Rose POLYMATH [11], la densité d'un tel gruyère tend vers zéro si on itère suffisamment le processus. L'escroc pourrait être facilement démasqué, heureusement, car son fromage de masse volumique nulle (voir formule 4) n'aurait aucune rigidité (c'est d'ailleurs cette même limite de rigidité qui explique que l'on est obligatoirement limité dans la taille maximum des agrégats colloïdaux !)

On peut étudier directement la dimension fractale de systèmes réels tels que des gels de silice solidifiés (aérogels) à partir de la diffusion d'ondes de longueur d'onde comparable aux échelles intermédiaires λ sur lesquelles la structure est fractale. En effet, l'intensité diffusée suivant un vecteur d'onde $\vec{q} = \vec{k}_i - \vec{k}_d$, où $\vec{k}_{i\,(d)}$ sont les vecteurs d'onde incident et diffusé, est proportionnelle à la transformée de FOURIER de la fonction de corrélation à deux points de la densité C (R). A partir de la forme fractale de C (R) (formule 11), on peut voir dimensionnellement qu'il doit correspondre une loi de décroissance de l'intensité avec q [17] en :

$$I(q) \propto q^{-\mathrm{D}}.$$

Une telle forme a été observée expérimentalement sur de nombreux systèmes de solides fractals avec des valeurs de D allant pratiquement de 2 à 3 suivant les systèmes étudiés.

3.4.2. SURFACES FRACTALES.

Nous présentons le résultat d'études de surfaces fractales par des mesures d'adsorption dont l'analyse se rapproche de celle de la « saucisse de MINKOWSKI » décrite précédemment (formule 5).

On considère un milieu poreux préalablement vidé. Par dépôt progressif d'un gaz, on repère la formation d'une monocouche sur sa surface. Pour une surface classique de dimension $d = 2$, le nombre de molécules adsorbées pour former la monocouche est relié à l'aire σ de la molécule adsorbée par :

$$\mathrm{N} = \mathrm{A}/\sigma.$$

Dans le cas général d'une surface fractale, on a une relation différente [18] :

$$\mathrm{N} \propto \sigma^{-\mathrm{D}/2}$$

qui se ramène à la précédente pour D = 2, et que l'on peut obtenir à partir de la formule (6) en remplaçant la dimension mineure l par $\sigma^{1/2}$ et en calculant $\mathrm{N} = \mathrm{S}/\sigma$.

Cette dépendance traduit le fait que, plus la molécule est petite, plus elle peut employer les petits sites de surface. Le nombre de molécules adsorbées augmente alors plus vite que l'inverse de leur surface (*cf.* Problème d'examen BG en encadré).

La fig. 8 montre le résultat de mesures de quantité de molécules adsorbées, en moles par gramme de poreux, pour différentes aires de molécules. La mesure de la pente sur ces tracés Log Log donne directement l'exposant — D/2. La dimension fractale varie typiquement de 2 pour une structure de graphite constituée de lamelles planes entre lesquelles les molécules s'ad-

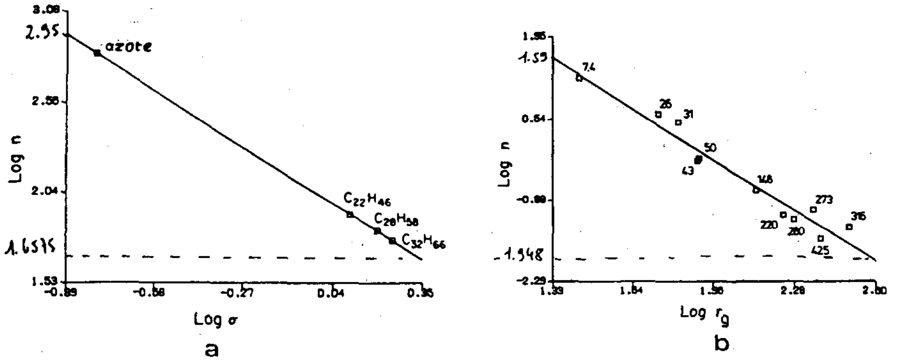


Fig. 8. — Isothermes d'adsorption utilisés dans le problème III. n est la quantité adsorbée en millimol/g ; σ est la section de la molécule d'adsorbat : *a*) graphite, *b*) noir de carbone (tiré de *AVNIR* and *al J. Chem. Phys.* 79 3566 1983).

sorbent, à 3 pour une surface granulaire très adsorbante comme du charbon actif. Ce type d'analyse n'est pas sans ambiguïté. En particulier, elle réduit tout le problème d'adsorption à un simple effet géométrique et néglige les différences d'adsorption chimique. Elle suppose aussi qu'il n'y a pas de problème d'accessibilité pour les molécules. Par exemple, si un grand volume de pore est simplement ouvert à l'extérieur par un orifice de petit diamètre, on ne mesurera pas correctement son aire fractale dès que les diamètres des molécules dépasseront ce diamètre. Une étude plus approfondie de ces problèmes peut être trouvée dans la référence [9].

Notons cependant que, dans son esprit, cette mesure s'apparente bien à la simple méthode « du bâton » pour mesurer la dimension fractale d'une ligne. Dans l'exemple original proposé par J. PERRIN [19], la longueur apparente de la côte de Bretagne mesurée avec des étalons (bâtons) de longueurs différentes l croît lorsque la longueur l décroît et donc que l'on explore des infractuosités de plus en plus fines. Ceci est dû au fait que la ligne de côte est un fractal. A partir de la mesure de la longueur totale $L = N\,l$ où N est le nombre de bâtons mis bout à bout en fonction de l on a pu vérifier une loi approchée :

$$L \propto l^{1-D}$$

avec une pente sur un tracé Log Log de :

$$1 - D = -0{,}25 \qquad (1 < \operatorname{Log} l < 3).$$

... La petite histoire dit aussi que la frontière entre le Portugal et l'Espagne mesurée par les deux pays est substantiellement de longueur différente sans avoir pour autant qu'il n'y ait de désaccord politique de frontière !

EN CONCLUSION.

Si l'on veut faire un bilan de cet enseignement nouveau que nous avons introduit en 1984 à Orsay, on ne peut passer sous silence l'enthousiasme des étudiants concernant ce sujet. L'introduction d'exemples géométriques simples des fractals déterministes qui donnent accès à des notions nouvelles et surprenantes telles que la dimension fractale est perçue par les étudiants de biologie comme un élément de l'actualité de la recherche physique fondamentale qui leur est accessible. L'aspect esthétique des figures engendrées par les fractals déterministes, largement diffusées dans la grande presse (*Actuel*), correspond à la sensibilité d'étudiants naturalistes qu'il faut entraîner à l'usage du sens de l'observation et renforce encore leur motivation. Les illustrations sur des exemples réels de fractals participent aussi à cet enthousiasme.

L'analyse dimensionnelle dont habituellement les étudiants ne perçoivent pas la finalité est indispensable pour l'introduction même de la notion de fractal. L'enseignement des fractals constitue donc une voie d'accès privilégiée pour une initiation aux techniques d'analyse dimensionnelle où le rôle du préfacteur apparaît comme très secondaire devant celui des exposants.

Par contre, les exemples réels d'application nécessitent l'introduction préalable de notions peu familières à cette catégorie d'étudiants, telles que : adsorption, diffusion d'ondes, ce qui leur rend plus difficile la compréhension de l'intérêt des fractals et nécessite, en tous cas, une introduction préalable de ces notions sur des systèmes ordinaires non fractals.

Il est nécessaire à ce niveau de dégager les possibilités et les limites des modèles mathématiques. Le système expérimental présente des échelles *supérieures* de coupure : la taille de l'objet ; *inférieure :* le grain individuel. Ce sont souvent les propriétés liées à ces coupures qui contrôleront en pratique le comportement global surtout si ces limites sont proches.

En conclusion, nous pensons que l'introduction à un niveau immédiatement postérieur au baccalauréat d'un module d'enseignement sur la physique du désordre avec des notions telles que : percolation - fractals ne présente pas de difficulté majeure et s'introduit logiquement dans un enseignement où on voudra développer l'esprit géométrique, l'utilisation de l'analyse dimensionnelle et l'utilisation pratique de statistiques élémentaires. Notre expérience pédagogique de 4 ans d'enseignement de ces notions reste encore à enrichir en diversifiant les exemples dans le but de faire les choix pédagogiques les mieux adaptés à nos étudiants. Dans cette optique, nous serions heureux d'échanger des informations avec tous les collègues ayant enseigné les fractals ou souhaitant le faire (*).

Dans une éducation de physiciens enfin, percolation et fractals illustrent des concepts très profonds de la physique et que l'on a du mal à illustrer aussi concrètement par ailleurs. On a une classe nouvelle de symétrie, des invariances d'échelles comparables à celles près d'un point critique d'un fluide où coexistent des amas fractals de toutes les échelles de taille responsable de l'opaliscence critique. La notion de groupe de renormalisation, de points fixes peuvent être illustrées par des images et des calculs très simples en percolation [20]. L'originalité des structures fractales est que les lois physiques se transforment de façon généralement très simples lorsqu'on change d'échelle (par exemple, on peut par itération calculer la résistance électrique d'un réseau de SIERPINSKI dont chaque brin a une résistance unité [21]. Cette invariance contraste avec les lois usuelles en physique que symbolisent le livre et le film « Puissance de dix » [22]. Dans ce cas, on voit au contraire que, si les lois sous-jacentes (les interactions fondamentales) restent les mêmes, par contre les modes de description que l'on va utiliser lorsqu'on change de puissance de 10 vont être de nature différente : on ne traite pas l'interaction entre deux molécules, entre deux êtres, le mouvement relatif de deux continents... à partir d'une simple itération des mêmes interactions fondamentales.

La notion de dimension fractale ne permet pas alors de faire l'économie de la notion de niveaux de complexité telle que la définit H. ATLAN et ne saurait être à la base d'une démarche par trop réductionniste.

(*) Voir page 1011 la présentation concrète du travail proposé aux étudiants.

REFERENCES

[1] R. LANDAUER, dans *American Institute of Physics Conf Proceed,* Vol. 40 (1978), J. C. Garland et R. Tanner Edit., page 1.

Cet article contient une excellente présentation historique du sujet.

[2] Les méthodes de bornes sont un exemple simple de telles méthodes classiques. On peut montrer que la conductivité électrique d'un mélange quelconque de grains mauvais conducteurs (conductivité σ_1 et fraction volumique C_1) et bons conducteurs (conductivité σ_2 et fraction volumique C_2) est comprise entre celle d'un ensemble de couches parallèles constituées de deux phases dans le pourcentage C_1/C_2 parcourues par un courant parallèle ou perpendiculaire aux couches. En d'autres termes, la conductance est comprise entre la moyenne des conductances ou l'inverse des moyennes des résistances. Clairement, une au moins de ces bornes est inopérante si la conductance $\sigma_1 = 0$ (isolant) ou $\sigma_2 = \infty$ (supraconducteur).

[3] H. OTTAVI, J. P. CLERC, G. GIRAUD, J. ROUSSENQ, C. D. MITESCU et E. GUYON, *J. of Physics* C *11* 1311 (1978). L'expérience a été réalisée, sous sa forme originale, à partir d'un mélange de dragées de confiseur en sucre dur dont une fraction C_2 seulement était argentée !

[4] B. B. MANDELBROT, *the fractal geometry of nature* (Freeman, New York 1982).

[5] P. G. DE GENNES, *La Recherche* n° 84 (1977) ; Universalia (1983), p. 313-316.

D. STAUFFER, *Introduction to percolation theory,* Taylor and Francis (Londres 1985).

L'auteur de ce livre qui est enseignant à Cologne a réussi à associer ses jeunes élèves à des projets numériques simples et le livre contient de nombreuses informations pédagogiques.

[6] E. GUYON, Bulletin S.F.P. avril 1983, p. 4 ; Pour la Science, octobre 1982.

[7] C. BETRENCOURT, E. GUYON et G. GIRAUD, *Eur. Jour. of Phys. 1* 206 (1980).

[8] H. O. TEITGEN and P. H. RICHTER, *The beauty of fractals* (Springer), (1986).

[9] *Fractals in Physics,* L. PIETRONERO and E. TOSATTI édit., North Holland (1986) contient des présentations des différents exemples d'agrégats fractals que nous avons cités.

[10] Citons l'excellent article de R. JULLIEN dans *Annales Télécm. 41* 343 (1986). Aussi R. JULLIEN et R. BOTET « *Aggregation and fractal aggregates* » World Scientific publ. Company (1987.)

[11] *Les fractals,* Chronique de Rose POLYMATH, J. STEWART, BELIN (Paris).

[12] D. WEITZ, M. Y. LIN and J. C. SANDROFF, *Surface Science 158* 147 (1985).

[13] R. BLANC et D. STAUFFER, *Eur. Jl of Physics, 1* (1980), 211-216.

[14] M. KOLB, film « *Aggregation* », (22) Production ZEAM Freie Universität, Berlin.

[15] C. ALLAIN et B. JOUHIER, *Jour. de Phys. Lett. 44* L 421 (1983).
C. CAMOIN et R. BLANC, *Jour. de Phys. Lett. 46* L 67 (1985).
R. BLANC, M. BELZONS, J. L. BOUILLOT, C. CAMOIN et E. GUYON, *Adv. in Interface and Coll. Sci. 17* 299 (1982).

[16] R. HERSH and R. J. GRIEGO dans *Pour la Science* n° zéro (p. 24) ???

[17] J. TEXEIRA in « *On growth and forms* » N. Ostrowki and E. Stanley édit. Martinus Nijhoff (1985) p. 145 .

[18] D. A. MIR, P. PFEIFFER et D. FARIN, *Nature 308* 261 (1983).

[19] J. PERRIN, *Les atomes,* Edit. Gallimard (réimpression 1970).

[20] E. GUYON and C. D. MITESCU dans *Jeux de réseaux,* Cahiers STS n° 9-10, p. 115, and E. GUYON, à paraître au Seuil dans « *les théories de la complexité* » (autour des travaux de H. ATLAN).

[21] S. ROUX and C. D. MITESCU, *Phys. Rev. B.,* Rapid. Comm. *35,* 698 (1987).

[22] *Les puissances de 10,* P. and P. MORRISON *et l'agence C.* and R. EAMES, *Collection Univers des Sciences* (Belin).

PROBLEME I :

1. *a*) On considère une marche au hasard sur les nœuds d'un réseau carré, (on peut sauter au hasard sur un des quatre sites voisins d'un site donné). Le côté de la maille carrée est pris comme unité de longueur. Un mobile part d'un site O (origine) puis saute de site en site voisin de façon aléatoire. Le mobile peut repasser plusieurs fois au même endroit. Après un grand nombre N de sauts, la distance L entre la position du mobile et l'origine varie, comme :

$$\boxed{L \simeq B\sqrt{N}}$$

où B est une constante.

Justifier précisément ce résultat (5 à 10 lignes).

b) On s'intéresse à la trace laissée par le mobile. On matérialise la trace en plaçant une particule (définie comme au début) sur chaque site visité, (si un site est visité deux fois, il y a 2 particules). C'est la méthode du Petit Poucet ! Donc, après M sites visités, la trace est un objet de M particules (et de masse M).

Considérons cet objet et l'un quelconque de ses points C. Traçons le cercle de centre C et de rayon R. On désigne par A et B les deux points d'intersection du cercle et de la trace tel que le chemin A B soit entièrement dans le cercle et passe par C.

On supposera, en première approximation, qu'il y a M/2 sites sur la chaîne entre A et C ; de même entre C et B.

Comment varie M (masse de l'objet A C B) avec le rayon du cercle R ?

c) En utilisant la définition de la dimension fractale donnée précédemment, en déduire la dimension fractale D_2 de l'objet. Commenter votre résultat.

2. Pouvez-vous calculer D_1 pour une marche au hasard à une dimension, puis généraliser à trois dimensions ? A une dimension, les points A et B seront les extrémités d'un segment de milieu C. A trois dimensions, les points A et B seront sur une sphère de centre C.

3. L'objet que nous avons construit (en question 1) est un modèle de chaîne de polymère à 2 dimensions. Nous voudrions le perfectionner en interdisant à la marche au hasard de repasser par un point déjà visité. Cette marche au hasard *sans recouvrement* n'est donc plus une vraie marche au hasard. La dimension fractale de la chaîne va devenir D'_2.

Pouvez-vous estimer, avec les arguments qualitatifs que vous donnerez, si $D'_2 < D_2$, $D'_2 > D_2$, $D'_2 = D_2$?

4. *a*) Quelle est la dimension D'_1 de la chaîne sans recouvrement à une dimension ? Ceci confirme-t-il la réponse de la question 3 ?

b) Placer D'_2 (à 2 dimensions) entre deux valeurs entières ?

PROBLEME II :

La construction part d'un cube de côté L dont on retire 7 cubes d'arêtes (L/3), à la première étape, il reste donc 8 cubes-coins reliés par 12 cubes-ponts [tous d'arêtes (L/3], la seconde étape retire 7 cubles d'arête (L/9) de chacun des 20 cubes restant d'après la première étape et ainsi de suite.

1) Quel est le nombre de cubes restant et leur taille à la n^{ieme} étape ?

2) Quel est le volume limite de l'éponge ?

3) Quelle est la surface de l'éponge à la n^{ieme} étape ?

Pour cela, on cherchera le nombre de faces tournées vers l'extérieur du cube initial, puis le nombre de faces intérieures.

4) Calculer la dimension fractale d_F de l'éponge en écrivant (voir cours) :

$$V = L^{d_F} l^{D-d_F} = L^{d_F} l^{3-d_F}.$$

PROBLEME III :

Pour mesurer l'aire spécifique (la surface intérieure au poreux) S_v d'un poreux réel à « surface lisse » (de dimension fractale $D = 2$), on adsorbe sur la surface une monocouche de molécules toutes identiques de section σ. Le nombre de molécules de produit adsorbé par unité de volume est une fonction de σ : $n(\sigma)$.

1) Exprimer la relation entre les 3 termes ($n(\sigma), S_v, \sigma$) en vérifiant l'équation aux dimensions.

2) On veut généraliser ce résultat pour des « surfaces fractales » pour lesquelles on définit une « aire spécifique généralisée » $S_v{}^x$ de dimension fractale D donnée par :

$$n(\sigma) = S_v{}^x/\sigma^\alpha.$$

A partir de considérations dimensionnelles, trouver la valeur de l'exposant D à partir de celle de l'exposant α.

3) Si N est le nombre de moles adsorbées par unité de volume pour des molécules d'aire σ, donner une relation simple entre Log N et Log σ.

On établira également la relation entre Log N et Log R pour des molécules sphériques de rayon R.

4) On traitera les résultats d'expérience présentées sur la fig. 8.

REPONSES :

Problème I.

1. *a*) La probabilité qu'une marche au hasard de N pas depuis l'origine se termine entre r et $r + dr$ s'écrit :

$$P(i)\,dr = C\, r^2\, e - (3\, r^2/2\, Na^2)$$

(a étant le côté de la maille carrée).

La distance L se calcule simplement en prenant la valeur moyenne de r, soit :

$$L \sim \sqrt{2}\, Na^2 \sim \sqrt{N}$$

1. *b*) $M \sim R^2$

1. *c*) $D_r = 2$

presque tous les sites sont visités, ceux qui ne le sont pas étant compensés par ceux qui le sont plusieurs fois.

2. $D_1 = 2$

$D_3 = 2.$

3. $D'_2 < D_2$

car la composition des sites non visités par des sites visités plusieurs fois ne se fait pas.

4. *a*) Sans recouvrement à une dimension, il n'y a plus de hasard.

$D'_1 = 1$ on a bien $D'_1 < D_1$.

4. *b*) $1 < D'_2 < 2$ en réalité $D'_2 = 1{,}66$.

Problème II.

1. 20^n cubes d'arête $l_n = L/3^n$.

2. $V = 20^n\,(L/3^n)^3$ $V \to 0$ quand $n \to \infty$.

3. Nombre de faces tournées vers l'extérieur $= 6\,(8^n)$.
Nombre de faces intérieures $= z\,[20^n - 8^n]$.
$S = L^2\,[2\,(20/9)^n + 4\,(8/9)^n]$.
$S \to \infty$ quand $n \to \infty$.

Problème III.

1. $n(\sigma) = (S_v/\sigma)$.

2. $[n(\sigma)] = [S_v{}^*]\ [\sigma^{-\alpha}] = L^D\, L^{-2\alpha}$

   $n(\sigma)$ étant sans dimension $D = 2\alpha$.

3. $\text{Log}\, N = (-D/2)\, \text{Log}\, 2\sigma + C$

   $\text{Log}\, N = -D\, \text{Log}\, R + C'$.

4. *a*) $D = 2{,}08$.

   b) $D = 2{,}785$.