Un exemple d'analyse d'actions mécaniques dans un mécanisme

par Pierre SIMONET,
Lycée Technique Blaise-Pascal, 76100 Rouen.

Dans les classes de Première et Terminale F 1, l'enseignement de la statique et de la résistance des matériaux élémentaires est à la fois d'une très grande importance et d'une très grande difficulté et il faut chercher sans cesse à le rendre plus efficace et plus accessible. Ces incontestables affirmations et louables intentions ont fait l'objet de développements et de propositions dans plusieurs textes en particulier ceux qui précèdent immédiatement celui-ci et qui sont intitulés :

« Faut-il aborder simultanément la statique des fluides, la statique des solides et la résistance des matériaux », non encore publié.

« Modèles mathématiques pour enseigner la mécanique élémentaire », voir B.U.P. n° 697, octobre 1987.

En application de ces deux textes, il est proposé ci-après une étude à partir d'un dessin simplifié d'une pompe hydraulique à barillet (fig. 1).

Nous indiquerons essentiellement quelques éléments d'une étude statique qui pourrait être faite en Première ou Terminale.

Comme les transmissions hydrostatiques figurent au programme de construction, une telle pompe peut fournir des thèmes pour d'autres analyses : fonctionnement, conception, hydraulique, cinématique dynamique, matériaux, cotation, fabrication, et pourrait occuper le terrain mécanique et technologique de la classe pendant plusieurs semaines.

1. LES DONNEES DE L'ETUDE.

La fig. 1 représente une coupe, probablement simplifiée, d'une pompe à barillet fixe. Elle est extraite du document NADELLA PE 977 (année 1977) contenant 120 plans de montage de roulements à aiguilles. Les commentaires qui accompagnent cette vue ne concernent que les roulements. La désignation de ceux-ci a permis de connaître l'échelle (56/100).

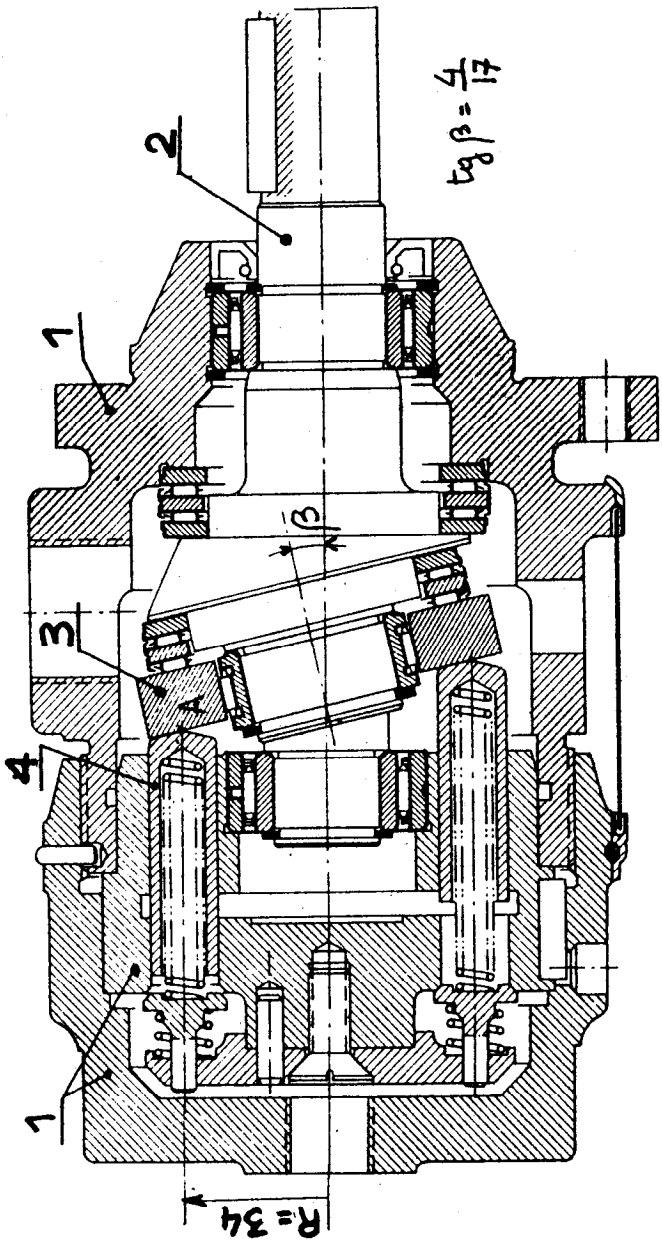

Fig. 1

Les caractéristiques suivantes ont été adoptées :

— aspiration à la pression atmosphérique : 10 N/cm^2,

— pression effective de refoulement : 3 000 N/cm^2,

— vitesse de rotation : 2 000 tr/mn,

— nombre de cylindres et pistons : 7 ; diamètre : 16 mm ; course totale : 16 mm ; course de refoulement : 13 mm.

A l'aide de ces données, on peut calculer les éléments suivants :

— débit théorique : 0,61 l/s ; puissance théorique : 18 300 W,

— accélération maxi d'un piston : 351 m/s^2.

Pour chaque piston, la course de refoulement de 13 mm correspond à une rotation de 2,246 rd de l'arbre 2.

Le ressort monté à l'intérieur de chaque piston a un diamètre de fil de l'ordre de 1,5 mm et un diamètre moyen d'enroulement de l'ordre de 15 mm ; si la contrainte tangentielle est estimée à 500 N/mm^2, l'effort exercé par le ressort sur le piston est de l'ordre de 45 N.

Il serait intéressant de comparer ces caractéristiques avec celles de la pompe industrielle correspondant au document NADELLA, si elle existe encore.

2. ÉTUDE PROPOSÉE.

Nous nous limiterons à la recherche des actions mécaniques (a. m.) principales qui s'exercent dans ce mécanisme : a. m. de contact entre solides ou fluides ou actions mécaniques de cohésion dans des sections fictives de pièces. Ce travail correspond très précisément à ce qui est demandé aux élèves préparant le bac F 1.

Avant de prendre connaissance de la suite, le lecteur, s'il en a le goût et le temps, peut essayer de déterminer aussi rapidement que possible les a. m. s'exerçant sur :

— un piston 4 en phase refoulement,

— la plaque 3 sachant que 3 pistons sur 7 sont en phase refoulement,

— l'arbre 2 sachant que le modèle mathématique de l'a. m. sur l'extrémité de l'arbre 2 est un couple dont il faut déterminer le vecteur $\vec{M}$ (direction : celle de l'axe).

On fait l'hypothèse que les facteurs de frottement sont nuls.

3. RECHERCHE DE L'HYPERSTATISME.

Examinons les liaisons entre les pièces mobiles 2 3 4 et le carter 1 (et pièces qui lui sont liées complètement).

Une liaison réalisée par un roulement à aiguilles sera modélisée par une linéaire annulaire, celle réalisée par une butée à aiguilles par un appui-plan.

Le contact entre 3 et 4 est linéique (effort important). La liaison 34 sera modélisée par une linéaire rectiligne.

Le degré d'hyperstatisme de la chaîne continue fermée 12341 peut se calculer de la façon suivante :

* Nombre de liaisons : Σn_s

L12	2 linéaire annulaire, 1 appui-plan	$n_s = 2 \times 2 + 3 = 7$
L23	1 linéaire annulaire, 1 appui-plan	$n_s = 2 + 3 = 5$
L34	1 linéaire rectiligne	$n_s = 2$
L41	1 pivot glissant	$n_s = 4$

* Nombre de mobilité : m.

  1 mobilité utile et 2 mobilités internes (rotation de 4 et de 3 autour de leur axe).

* Nombre de pièces : $n = 4$.

* Degré d'hyperstatisme : h.

$$h = m + \Sigma n_s - (n - 1)\,6 = 3 + 18 - 18 = 3.$$

Il sera nécessaire de faire des hypothèses pour chiffrer toutes les a. m.

Le calcul proposé précédemment n'est peut-être pas connu de certains lecteurs et contesté par d'autres. Les élèves n'ont peut-être pas reçu d'enseignement sur ce sujet ; ils connaissent néanmoins les modèles des liaisons et le nombre d'inconnues statiques pour chacune d'elles. A partir de là on peut observer immédiatement que la liaison pivot 21 ($n_s = 5$) est réalisée de façon hyperstatique ($n_s = 7$). Par ailleurs, on peut deviner que le contact linéique 34 ne se fera pas sans problème.

Les hyperstatismes vont imposer des contraintes technologiques (tolérancements géométriques) que nous n'étudions pas ici.

Leur analyse chiffrée (ou faite de façon plus intuitive) nous apporte un renseignement pour l'étude statique : il faudra faire des hypothèses pour réduire de 3 le nombre d'inconnues et nous savons à peu près pour quelles parties du mécanisme ces hypothèses devront être faites.

4. EQUILIBRE DU PISTON 4.

Le piston est en phase refoulement.

a) **Bilan des a. m. :**

* le poids est évalué à 0,54 N ;

* a. m. du ressort. Force axiale : 45 N en moyenne ;

* a. m. de l'huile. La pression est de 3010 N/cm² d'une part et 10 N/cm² d'autre part. Les zones d'application sont bien définies. C'est le moment de vérifier que les élèves savent bien ce qu'est une pression et de leur faire trouver un isolement commode pour déterminer cette a. m. dont le modèle est un glisseur $(A, \vec{F}_1)$, avec :

$$\| \vec{F}_1 \| = \pi \times 0{,}8^2 \times 3\,000 = 6\,032 \text{ N}$$

* a. m. 3/4 ;

les a. m. élémentaires s'exercent le long de la ligne de contact. Elles sont perpendiculaires au plan de 3 - l'a. m. 3/4 est donc modélisable par un glisseur dont la ligne d'action a une direction connue et coupe la ligne de contact réelle. Mais où ? Rien ne permet de le savoir. On pourrait laisser la question en attente et passer à l'équilibre de 3 dans l'espoir que celui-ci nous apportera une réponse. Comme il n'en sera rien et que nous savons que nous avons une hypothèse à faire au niveau de la liaison 34 faisons-là de suite : admettons par exemple que les a. m. élémentaires le long de la ligne de contact sont uniformément réparties. Dans ce cas, la ligne d'action du glisseur coupe la ligne de contact en son milieu ;

* a. m. 1/4 inconnue :

la zone d'application est une partie de la surface cylindrique de contact entre piston et cylindre. Toutes les forces élémentaires de contact sont normales à cette surface donc leurs lignes d'actions coupent l'axe du piston.

b) **Simplifications proposées :**

Négligeons l'a. m. de pesanteur et l'a. m. du ressort et admettons pour la suite que :

$\| \vec{F}_1 \| = 6\,000$ N en phase compression

et $\| \vec{F}_1 \| = 0$ en phase aspiration.

Notons cependant que l'effort exercé par le ressort est nécessaire pour vaincre l'effort exercé par l'huile à la pression atmosphérique (environ 20 N) puisque dans le cylindre la pression absolue est nulle pendant le déplacement de 13 mm.

On peut ainsi évaluer l'a. m. mise en jeu par l'accélération du piston. Elle est de l'ordre de :

$$\| m\vec{\gamma} \| = 0{,}054 \times 351 = 19 \text{ N}.$$

Donc négliger les effets d'inertie sur le piston est tout à fait justifié.

c) **Résolution :**

a. m. de l'huile : glisseur $(A, \vec{F}_1)$,

a. m. de 3/4 : glisseur dont la ligne d'action coupe la ligne d'action du glisseur $(A, \vec{F}_1)$ au point I. Le modèle de l'a. m. 1/4 est donc un glisseur dont la ligne d'action passe par I et est située dans le plan des deux autres lignes d'action. De plus, elle est perpendiculaire à l'axe.

La fig. 2 indique les schémas d'équilibre du piston lorsque celui-ci est en début et en fin de refoulement.

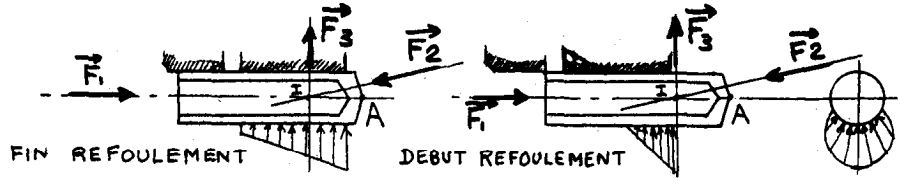

Fig. 2

On a représenté dans les 2 cas une répartition possible des a. m. 1/4. En fait on ne connaît ni la zone d'application ni la répartition, de façon précise.

En définitive :

a. m. huile/4, modèle : glisseur $(I, \vec{F}_1)$ $\| \vec{F}_1 \| = 6\,000$ N,

a. m. 3/4, modèle : glisseur $(I, \vec{F}_2)$ $\| \vec{F}_2 \| = 6\,164$ N,

a. m. 1/4, modèle : glisseur $(I, \vec{F}_3)$ $\| \vec{F}_3 \| = 1\,412$ N.

5. EQUILIBRE DE LA PLAQUE 3 (fig. 3).

Il est commode de considérer pour notre étude que la plaque 3 est fixe et que c'est le barillet porte-cylindres qui tourne.

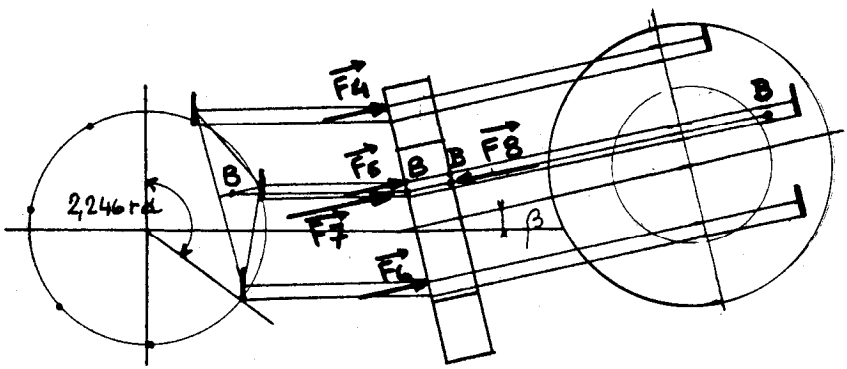

Fig. 3

Connaissant le nombre de pistons et l'angle de rotation correspondant à un refoulement, on montre facilement qu'il y a tantôt 2, tantôt 3 pistons en refoulement. Nous nous plaçons évidemment dans le cas où 3 pistons agissent sur la plaque et plus précisément lorsque l'un d'eux est en début de refoulement (d'où l'angle de 2,246 rd).

Les a. m. des 3 pistons ont pour modèles des glisseurs de vecteurs $\vec{F}_4$, $\vec{F}_5$ et $\vec{F}_6$ dont les lignes d'action sont connues. On peut remplacer ces 3 glisseurs par un seul glisseur :

— a. m. pistons/3 : glisseur $(B, \vec{F}_7)$ $\|\vec{F}_7\| = 18\,492$ N ;

— l'a. m. 2/3 (par l'intermédiaire d'une butée) est modélisable par un glisseur dont la ligne d'action, a la même direction que celle du glisseur précédent ;

— l'a. m. 2/3 (par l'intermédiaire d'un roulement) est modélisable par un glisseur dont la ligne d'action passe par le centre du roulement et est perpendiculaire à l'axe de 3.

La résolution conduit au résultat suivant :

— a. m. pistons/3 : glisseur $(B, \vec{F}_7)$;

— a. m. 2/3 : glisseur $(B, \vec{F}_8)$ avec $\vec{F}_8 = -\vec{F}_7$.

En d'autres termes, la plaque est soumise à deux forces opposées. La force exercée par 3 sur la butée à aiguilles est très « désaxée » et la répartition des charges sur les aiguilles n'est pas uniforme. On peut même craindre un basculement de la plaque 3 lorsque 2 pistons seulement agissent sur celle-ci. Toutefois, si

cela avait tendance à se produire, le contact 34 se ferait au point A, ce qui aurait pour effet de rapprocher un peu la ligne d'action de la force, de l'axe de la butée.

6. **EQUILIBRE DE L'ARBRE 2** (fig. 4).

La liaison pivot 21 étant réalisée de façon hyperstatique, faisons immédiatement l'hypothèse qui permettra de calculer les a. m. Elle consiste à admettre que l'a. m. 1/2 transmise par la butée à aiguilles a pour modèle un glisseur dont la ligne d'action est l'axe de l'arbre 2. Ceci n'est vrai que si l'effort axial transmis est réparti uniformément sur les aiguilles et ceci implique que des tolérances géométriques sévères soient imposées à de nombreuses pièces (il faut assurer un parallélisme rigoureux entre les deux faces d'appui de la butée, l'une appartenant à la pièce 1, l'autre à la pièce 2).

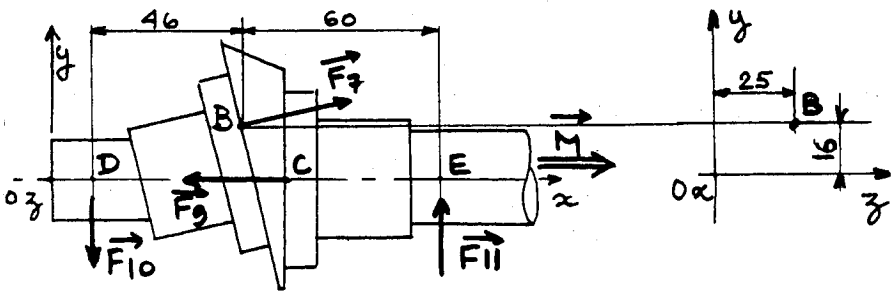

Fig. 4

Soit $(\vec{Ox}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère orthonormé lié à l'arbre, le plan $(Ox\ Oy)$ contenant les deux axes des différentes portées de l'arbre.

Le modèle de l'a. m. 3/2 est un glisseur $(B, \vec{F}_7)$. $\|\vec{F}_7\|$ a deux valeurs possibles selon que deux ou trois pistons sont en refoulement. Nous nous plaçons dans le cas où il y a 3 pistons en refoulement pour avoir les efforts maxi sur l'arbre.

La ligne d'action du glisseur passe par le point B dont la position varie légèrement en cours de fonctionnement. Comme pour la plaque 3, nous avons choisi la position où l'un des pistons est en début de refoulement (fig. 3 et 4).

Les autres actions mécaniques qui s'exercent sur 2 sont :

— a. m. 1/2 transmise par la butée : modèle glisseur $(C, \vec{F}_9)$. Une seule inconnue ;

— a. m. 1/2 transmise par les roulements : modèles : glisseurs $(D, \vec{F}_{10})$ et $(E, \vec{F}_{11})$. Quatre inconnues ;

— a. m. exercée en bout d'arbre : modèle : un couple dont le vecteur est : $\vec{M} = M\vec{x}$. Une inconnue.

Nous avons bien 6 inconnues.

La résolution peut se faire de différentes façons.

Lorsqu'il s'agit, comme ici, du cas classique d'un arbre guidé sur deux paliers il est commode de « projeter » les différentes a. m. sur les 3 plans *xoy*, *yoz* et *xoz*, ce qui a le mérite de préparer le tracé des diagrammes des sollicitations le long de l'arbre quand cette étude est demandée.

Dans la position choisie, on arrive à :

$$\vec{F}_7 = 18\,000\ \vec{x} + 4\,236\ \vec{y} \qquad \vec{F}_9 = -18\,000\ \vec{x},$$

$$\vec{F}_{10} = -5\,115\ \vec{y} \qquad \vec{F}_{11} = +879\ \vec{y} \qquad \vec{M} = 105{,}9\vec{x} \quad \text{(en N. m)}.$$

Il peut être intéressant de considérer le couple $\vec{M}$, à plusieurs points de vue. D'abord comme le modèle de l'a. m. du manchon d'accouplement sur le bout d'arbre et de chercher comment s'exerce « réellement » cette a. m. (zone d'application, pressions de contact, rôle de la clavette, etc.) et de mettre l'accent sur le fait qu'on est très ignorant sur ce qui se passe réellement. Ensuite, on peut remarquer que le moment du couple fourni par le moteur peut être considéré comme constant dans certains cas et qu'alors il ne peut y avoir « équilibre » de l'arbre et que celui-ci est soumis sans cesse à de petites variations de vitesse angulaire autour de la vitesse moyenne de 2 000 tr/mn.

7. **SOLLICITATIONS DANS L'ARBRE 2** (fig. 4).

Après avoir bien fait repérer par les élèves les zones d'application des a. m. qui s'exercent sur l'arbre, on peut proposer diverses sections fictives perpendiculaires à l'un ou l'autre des deux axes des portées de l'arbre, et faire déterminer avec précision les a. m. de cohésion dans chacune de ces sections fictives.

Le modèle de l'a. m. de cohésion sera (par convention) :

— un glisseur dont la ligne d'action passe par le centre de gravité G,

— un couple.

A partir de là on fait rechercher les types de sollicitations dans les sections choisies et donc dans les différentes portions de l'arbre.

Si le cours de résistance des matériaux est avancé, on peut se risquer au calcul de quelques contraintes mais avec beaucoup de prudence car on est fort éloigné des hypothèses de la théorie élémentaire des poutres. On peut par exemple faire calculer les contraintes tangentielles dans une section droite située entre le point E et le manchon d'accouplement où l'on a une sollicitation de torsion simple. Dans beaucoup d'autres cas, il faudra considérer le calcul des contraintes maxi comme une évaluation très approximative mais qui a tout de même son utilité à condition de choisir des coefficients de sécurité adéquats.

8. AUTRES ÉTUDES POSSIBLES.

Elles sont nombreuses. En dehors de celles déjà mentionnées, on peut retenir :

— Liaisons par filetage (et clavetage) des éléments du carter 1.

— Montage des roulements à aiguilles : on peut noter en particulier que les forces $\vec{F}_{10}$ et $\vec{F}_{11}$ transmises par les deux roulements, « tournent » en même temps que l'arbre et faire proposer en conséquence des ajustements entre bagues, portées d'arbre et alésages.

CONCLUSION.

A priori, l'étude d'un tel mécanisme peut paraître trop ambitieuse au lecteur qui enseigne dans une classe prébac. Il ne faut certainement pas se lancer dans cette étude dès les premières leçons de statique. On peut remarquer toutefois que si, pour conduire l'analyse, l'élève a besoin d'être guidé, les résultats auxquels on aboutit sont relativement simples.

Nous avons constaté, une fois encore, que ce qui est difficile, *et le sera toujours,* c'est d'isoler, de faire des bilans d'a. m., de modéliser les a. m. connues, de modéliser les liaisons et les a. m. inconnues et de faire, si cela est nécessaire, des hypothèses simplificatrices raisonnables afin de réduire le nombre d'inconnues à celui imposé, en quelque sorte, par les lois fondamentales de la statique.

Ce qui est facile, *ou doit le devenir,* après un entraînement suffisant, c'est la résolution algébrique ou graphique qui aboutit aux résultats chiffrés.

Les méthodes sont variées et connues et n'ont pas été reprises dans ce texte.

Cela ne signifie pas que tout va pour le mieux dans le petit monde des vecteurs, glisseurs, couples et autres bipoints. Il s'y est glissé des individus douteux et mal identifiés. Il serait utile d'y remettre un peu d'ordre et de travailler sur :

— les définitions précises des modèles mathématiques indispensables, en nombre aussi réduit que possible, et l'abandon des autres ;

— l'adoption de notations, peut-être nouvelles, pour tenir compte de l'utilisation des micro-ordinateurs C.A.O., etc. Même si on est opposé à une réglementation excessive, un minimum de notations communes est souhaitable ;

— la remise en cause des méthodes traditionnelles et l'abandon de certaines : par exemple les savantes résolutions graphiques sont probablement condamnées mais celles qui sont simples gardent leur intérêt pédagogique... pour l'instant.

Revenons à la partie la plus difficile et la plus intéressante de notre enseignement. Les nombreuses hypothèses que l'on est amené à faire posent au professeur de délicats « cas de conscience pédagogiques » :

— ou bien il les impose en quelque sorte aux élèves en affirmant qu'il faut procéder de cette façon et en masquant ainsi le fait que l'hypothèse est discutable ;

— ou bien il les propose en faisant remarquer que l'hypothèse ne sera peut-être pas vérifiée et qu'on aurait pu en adopter une autre.

Une attitude voisine de la première ne me plaît guère. Elle a toutefois des avantages. L'élève est sécurisé, il croit qu'à chaque question, il y a une réponse unique et qu'évidemment le professeur la connaît. Malgré ces avantages, une telle attitude adoptée en permanence et de façon systématique est, à mon avis, foncièrement nocive.

L'autre attitude plus scrupuleuse et soucieuse de coller à la réalité est aussi plus périlleuse. Un élève en difficulté risque d'être désemparé par ces incertitudes et fréquentes remises en question et être tenté, à la limite, de mettre en doute la compétence et le sérieux d'un professeur... qui ne sait pas.

Les comportements des professeurs sont très variables. Ce qui serait grave c'est que le professeur devienne sa propre dupe et qu'il en arrive à ne plus remettre en question, lui-même, ce qu'il enseigne d'une façon très directive, pour avoir selon lui une meilleure efficacité pédagogique.

Dans l'analyse des a. m., il me paraît honnête et même indispensable d'apprendre aux élèves à distinguer ce que nous « savons » avec certitude et ce que nous ignorons partiellement ou totalement. La feuille de papier sur laquelle j'ai cessé d'écrire un instant a des dimensions, une masse, un poids que je peux connaître avec précision. Je peux aussi calculer la poussée d'Archimède qui s'exerce sur elle et déterminer exactement le modèle de l'a. m. exercée par la table sur la feuille de papier. Si maintenant on s'intéresse à la répartition de cette a. m., l'hypothèse d'une répartition uniforme ou le calcul d'une pression maximale de contact paraîtra illusoire parce que la zone réelle de contact est inconnue.

Il en est de même si on calcule une contrainte dans la section fictive d'une poutre alors que les hypothèses de la théorie élémentaire des poutres ne sont pas satisfaites du tout.

La différence est que dans un cas, l'erreur est visible et dans l'autre elle ne l'est pas.