Mouvement d'un pendule simple *

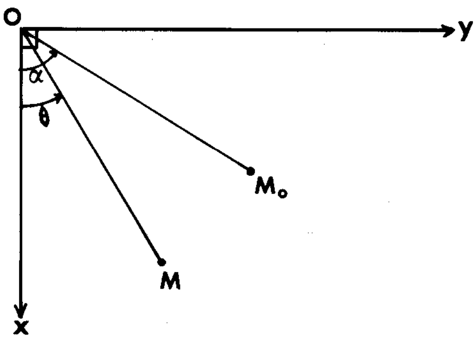
par Daniel SAADA,
professeur de Mathématiques,
Lycée de Rambouillet.

Le mouvement d'un pendule simple, régi par une équation différentielle sans solution explicite, n'est étudié ordinairement que dans le cas de « petites » oscillations.

On trouvera ci-après la description complète du cas général, grâce aux outils modernes de calcul qui ont permis la résolution des problèmes numériques rencontrés : somme d'une série, calcul d'une intégrale, détermination d'une limite, résolution d'équations.

1. EQUATION DU MOUVEMENT.

Un pendule, de longueur l, est écarté d'un angle α ($0 < \alpha < 180°$) de la verticale puis lâché sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$.



(*) *N.D.L.R. :* Ce sujet a déjà été abordé dans un article publié dans le B.U.P. n° 657 d'octobre 1983, intitulé : « Les calculettes programmables peuvent-elles contribuer à la rénovation de l'enseignement des classes préparatoires ? », de J.-P. SARMANT. Le présent article ne fait cependant pas double emploi avec celui de J.-P. SARMANT dans lequel l'étude du pendule n'était qu'un exemple parmi d'autres, traité de façon très concise. Dans l'article actuel, une étude détaillée et rigoureuse de pendule est effectuée par un professeur de mathématiques, illustrant l'utilisation de diverses techniques d'analyse numérique.

Quand la bille de masse m (qu'on suppose assez dense pour négliger la résistance de l'air) atteint la position angulaire ϑ, elle a perdu de l'énergie potentielle :

$$m\,g\,(l\cos\vartheta - l\cos\alpha)$$

mais elle a gagné de l'énergie cinétique : $1/2\ m\,v^2$.

La loi de conservation de l'énergie mécanique implique alors :

$$g\,l\,(\cos\vartheta - \cos\alpha) = v^2/2.$$

Sur sa trajectoire, circulaire, le point M a pour coordonnées :

$$x = l\cos\vartheta \quad \text{et} \quad y = l\sin\vartheta.$$

Comme $v^2 = \left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2$, il vient : $v^2 = l^2\left(\dfrac{d\vartheta}{dt}\right)^2$,
à condition que l'angle ϑ soit mesuré en *radians*.

D'où l'équation différentielle bien connue :

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2\,g/l \cdot (\cos\vartheta - \cos\alpha). \tag{1}$$

Jusqu'au quart de la période T (α) du mouvement, ϑ décroît ;
on en déduit $\dfrac{d\vartheta}{\sqrt{\cos\vartheta - \cos\alpha}} = -\sqrt{\dfrac{2}{l}}\,g\,dt$ puis :

$$t(\vartheta) = -\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_\vartheta^\alpha \frac{d\lambda}{\sqrt{\cos\lambda - \cos\alpha}} \quad (0 \leqslant \vartheta \leqslant \alpha) \tag{2}$$

La fonction à intégrer n'a pas de primitive explicite. Le recours aux méthodes numériques s'impose donc, mais non sans transformation préalable car la fonction devient infinie en $x = \alpha$.

Classiquement, on fait le changement de variable :

$$\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin x$$

car :

$$\cos\lambda - \cos\alpha = 2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\lambda}{2}\right).$$

Le calcul donne alors :

(3) $$t(\vartheta) = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_u^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k \sin^2 x}}$$

avec : $k = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ et $\sin u = \frac{\sin \vartheta/2}{\sin \alpha/2}$, $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Cette intégrale qualifiée d'elliptique est d'une importance telle en Mécanique qu'elle a été tabulée en k et u.

Nous en exposerons diverses méthodes de calcul.

2. EXPRESSION DE $t(\vartheta)$ PAR UNE SERIE.

Pour $|x| < 1$, on connaît le développement :

$$(1 + x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\ldots(n-n+1)}{n!} x^n.$$

Quand $m = -1/2$, le coefficient de x^n devient :

$$\frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2} = \frac{(-1)^n}{4^n} C_{2n}^{n}.$$

D'où :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k \sin^2 x}} = \sum_0^{\infty} \frac{C_{2n}^{n}}{4^n} k^n (\sin^2 x)^n$$

et la série annoncée donnant $t(\vartheta)$:

(4) $$t(\vartheta) = \sqrt{\frac{l}{g}} \sum_0^{\infty} \frac{C_{2n}^{n}}{4^n} k^n \int_u^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx$$

avec toujours $k = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ et $\sin u = \frac{\sin \vartheta/2}{\sin \alpha/2}$.

Nous commencerons le calcul de (4) par le cas plus simple de la période : $\vartheta = u = 0$, $T(\alpha) = 4\, t(0)$.

2.1. Calcul de la période $T(\alpha)$ du mouvement.

Si $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx$, une intégration par parties fournit :

$$2n\, I_n = (2n - 1)\, I_{n-1}.$$

Comme $I_0 = \pi/2$,

$$I_n = \frac{1 \times 3 \times \ldots \times 2n-1}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n} \frac{\pi}{2} = \frac{C_{2n}^n}{4^n} \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit la remarquable formule :

$$(5) \qquad T(\alpha) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{C_{2n}^n}{4^n}\right) \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)^n.$$

On retrouve alors :

$$T(0) = \lim_{\alpha \to 0} T(\alpha) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

et l'approximation $T(\alpha) \sim T(0)\,(1 + \alpha^2/16)$.

Un peu plus de calcul donne :

$$(6) \qquad T(\alpha) \sim T(0)\left(1 + \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^4}{48}\right) + \frac{9}{64}\frac{\alpha^4}{16}\right)$$

soit :

$$T(\alpha) \sim T(0)\left(1 + \frac{\alpha^2}{16} + \frac{11}{12}\left(\frac{\alpha^2}{16}\right)^2\right)$$

avec, bien sûr, α en radians.

Ceci fait, écrivons (5) sous la forme :

$$T(\alpha) = \sum_0^{\infty} V_n.$$

On a $V_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ et la relation de récurrence inespérée :

$$V_{n+1} = V_n \times \left(\frac{n+0{,}5}{n+1}\right)^2 \times \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

D'autre part, l'inégalité $V_{n+1} < V_n \times \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ entraîne une majoration simple du reste de la série (5) :

$$\sum_{p > n} V_p < \frac{V_{n+1}}{1 - \sin^2 \alpha/2} = V_{n+1}\left(1 + \mathrm{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right).$$

D'où l'encadrement $\sum_{0}^{n+1} V_p < T(\alpha) < \sum V_p + V_{n+1} \cdot tg^2 \frac{\alpha}{2}$

qui fournit aisément un test d'arrêt à la sommation.

Nous sommes en mesure de conclure par le programme :

Calcul de $T(\alpha)$ à 10^{-p} près par défaut

$$10 \quad A = (\sin A/2)^2 \quad T = 2 * \pi * \sqrt{\frac{L}{G}}$$

$$15 \quad V = T \quad N = 0 \quad E = 10^{-p} * \left(\frac{1}{A} - 1\right)$$

$$20 \quad N = N + 1 \quad V = V * A * (1 - 0{,}5/N)^2$$

(7) 30 T = T + V

40 IF V > E THEN 20

50 PRINT T

Mode opératoire :

Mettre l en L, g en G, p en P, α en A, puis actionner le programme, **dans le même mode angulaire que** α.

Exemple :

$l = 1$ m, $g = 9{,}81$ m.s^{-2}, $p = 2$, $\alpha = 50°$.

Après 2 itérations (N = 2), on lit : T = 2,10464 s avec une erreur $V \times tg^2\, 25 < 0{,}002$ s.

Faisons E = E/10 au clavier et déclenchons le programme à partir de la ligne 20. Cette fois : T = 2,105756 s, l'erreur étant $< 2{,}43 \times 10^{-4}$ s.

On adoptera donc :

$$T(50°) = 2{,}106 \text{ s} (*)$$

avec au total 3 itérations seulement, Mais nous verrons que la situation n'est pas toujours aussi favorable.

2.2. **Calcul de** $t(\vartheta)$.

Décomposons le terme général V_n de la série (4) en le produit $W_n \times I_n$:

(*) L'approximation (6) fournit 2,1057 s.

$$W_n = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{C_{2n}^n}{4^n}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^n \quad \text{et}$$

$$I_n = \int_u^{\pi/2} \sin^2 x\,dx \left(\sin u = \frac{\sin \vartheta/2}{\sin \alpha/2}\right).$$

L'algorithme de sommation repose sur les relations :

$$W_0 = \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{et} \quad W_{n+1} = W_n \times \frac{n+0{,}5}{n+1} \times \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$I_0 = \frac{\pi}{2} - u \quad \text{et} \quad I_{n+1} = \frac{n+0{,}5}{n+1}\,I_n + \frac{\cos u \cdot (\sin u)^{2n+1}}{2n+2}.$$

Pour accélérer l'itération, il est judicieux d'introduire :

$$J_n = \frac{1}{2n}\cos u \cdot (\sin u)^{2n+1}$$

$$J_1 = \frac{1}{2}\cos u \,\sin u \quad \text{et} \quad J_{n+1} = J_n \times \sin^2 u \times \frac{n}{n+1}.$$

Enfin, les inégalités $W_{n+1} < W_n \times \sin^2\frac{\alpha}{2}$ et $I_{n+1} < I_n$ permettent de conserver le même test d'arrêt.

Programme de calcul de $t(\vartheta)$

(8)

```
10   MODE RADIAN
20   INP X    X = SIN (X * π/360)   W = √(L/G)
30   I = COS⁻¹ (X/A)   J = X/A/2 * SIN I
40   T = W * I   N = 1   E = 10^-p * (1/A² — 1)
50   W = W * A² * (1 — 0,5/N)   I = I * (1 — 0,5/N) + J
60   T = T + W * I
70   IF W * ≤ E   PRINT T   END
80   N = N + 1   J = J * X² * (1 — 1/N)/A²
90   GOTO 50
```

Avant d'utiliser le programme, introduire l dans la mémoire L, g dans G, p dans P, $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ dans A, avec α en degrés.

Exemple :

Marche du pendule pour $\alpha = 50°$, $l = 1$ m, $g = 9{,}81$ m. s^{-2}. Avec P = 4, on obtient facilement :

	$\vartheta = 40°$	$t = 0{,}218$ s
	$\vartheta = 30°$	$t = 0{,}313$ s
	$\vartheta = 20°$	$t = 0{,}391$ s
	$\vartheta = 10°$	$t = 0{,}460$ s
et pour contrôle :	$\vartheta = 0°$	$t = 0{,}526$ s.

2.3. **Volume du calcul.**

Le test d'arrêt $V_{n+1} \times \mathrm{tg}^2 \dfrac{\alpha}{2} \leqslant 10^{-p}$ montre que la convergence de la série (4) est d'autant plus lente que α est voisin de 180°.

Pour évaluer V_{n+1}, utilisons la formule de STIRLING :

$$n! \simeq (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$$

laquelle entraîne l'approximation $\left(\dfrac{C_{2n}^{n}}{4^n}\right)^2 \simeq \dfrac{1}{\pi n}$.

D'où la condition : $2\pi \sqrt{\dfrac{l}{g}} \dfrac{(\sin^2 \alpha/2)^{n+1}}{\pi(n+1)} \mathrm{tg}^2\, \alpha/2 \simeq 10^{-p}$.

Avec $l = 1$ m et $g = 9{,}81$ m. s^{-2} :

— $p = 2$ et $\alpha = 170°$ demande $n > 400$,
— $p = 3$ et $\alpha = 178°$ implique $n > 15\,000$!

tandis que pour $\alpha \leqslant 90°$, $\sum_{0}^{6} V_p$ approche T (α) par défaut à moins de 10^{-3} près.

3. **DETERMINATION DE $t(\vartheta)$ PAR INTEGRATION NUMERIQUE.**

Rappelons que $$t(\vartheta) = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_u^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k \sin^2 x}},$$

$$\sin u = \frac{\sin \vartheta/2}{\sin \alpha/2}.$$

La fonction $x \to (1 - k \sin^2 x)^{-1/2}$ est continue et dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Il est donc possible de l'intégrer numériquement.

C'est même tentant si votre machine possède en mémoire morte un algorithme d'intégration (HP34C, HP15C, TI58 ou 59 avec le module « Math/Utilités »).

Dans le cas contraire, il vous faudra l'écrire. Sachez qu'il sera plus long que le programme (8), en raison de la complexité des tests d'arrêt. En contrepartie, votre programme sera peu sensible aux α voisins de 180°.

Exemple :

Calcul de T (178°) quand $l = 1$ m et $g = 9{,}81$ m.s^{-2}.

On a :

$$\mathrm{T}(178^\circ) = \frac{4}{\sqrt{9{,}81}} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - (\sin 89)^2 \sin^2 x}}.$$

Il faut 3 minutes à une HP15C travaillant en SCI3 pour afficher : 6,941106 ± 0,00154.

En réalité, l'erreur est 9 fois plus petite ; les 20 000 premiers termes de la série (5) n'y auraient pas suffi.

Autre avantage de l'intégration :

Pour dresser le tableau des $t(\vartheta)$, ϑ variant par degré de 1 à 177, on utiliserait la récurrence :

$$\begin{cases} t(178) = 0 \\ t(\vartheta - 1) = t(\vartheta) + \dfrac{1}{\sqrt{9{,}81}} \displaystyle\int_{u_{\vartheta-1}}^{u_\vartheta} \frac{dx}{\sqrt{1 - (\sin 89 \cdot \sin x)^2}} \end{cases}$$

dont chaque étape serait brève compte tenu de la petitesse de l'intervalle d'intégration.

Toutefois, il faudra veiller à la non-accumulation des erreurs, par exemple en comparant $t(0)$ avec $\frac{1}{4}\mathrm{T}(\alpha)$.

4. METHODES DE LA MOYENNE ARITHMETICO-GEOMETRIQUE DE GAUSS.

A partir de deux réels positifs a et b, fabriquons les suites définies par :

$$a_0 = a \quad b_0 = b \quad a_{n+1} = (a_n + b_n)/2 \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}.$$

Pour $n \geqslant 1$, b_n croît tandis que a_n décroît ; de plus :

$$0 \leqslant a_{n+1} - b_{n+1} \leqslant \frac{a_n - b_n}{2}.$$

Ces deux suites ont donc une limite commune, notée $m(a, b)$ et appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b.

La convergence est fulgurante comme le montre le programme :

```
10   INPUT A,B
20   C = (A + B)/2   B = √AB   A = C
30   IF A — B > 10-8 THEN 20
40   PRINT A,B
```

Maintenant, dans l'intégrale elliptique :

$$I = \int_u^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}}, \quad a > b > 0, \ 0 \leqslant u \leqslant \pi/2,$$

faisons le changement de variables défini par :

$$\sin x = \frac{2a \sin x_1}{a + b + (a - b) \sin^2 x_1}, \quad x_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Le calcul, laborieux, aboutit à l'étonnant résultat :

$$I = \int_{u_1}^{\pi/2} \frac{dx_1}{\sqrt{a_1^2 \cos^2 x_1 + b_1^2 \sin^2 x_1}}$$

où :

$$a_1 = (a + b)/2 \quad \text{et} \quad b_1 = \sqrt{ab}.$$

En réitérant ce processus :

$$I = \int_{u_{n+1}}^{\pi/2} \frac{dx_{n+1}}{\sqrt{a^2_{n+1} \cos^2 x_{n+1} + b^2_{n+1} \sin^2 x_{n+1}}}$$

avec :

$$a_{n+1} = (a_n + b_n)/2 \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \qquad \text{et}$$

(9)
$$\sin u_n = \frac{2 a_n \sin u_{n+1}}{a_n + b_n + (a_n - b_n) \sin^2 u_{n+1}}.$$

On sait que (a_n) et (b_n) convergent très vite vers $m\,(a, b)$. D'autre part, l'étude de (9) révèle que $\sin u_n$ décroît.

Donc :

$$\mathrm{I} = \frac{\pi/2 - (\lim u_n)}{m\,(a, b)}.$$

Or :

$$t\,(\vartheta) = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_u^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k \sin^2 x}}$$

$$= \sqrt{\frac{l}{g}} \int_u^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\cos^2 x + \cos^2 \alpha/2 \sin^2 x}}.$$

On obtient alors :

(10)
$$t\,(\vartheta) = \sqrt{\frac{l}{g}}\; \frac{\pi/2 - \lim\, u_n}{m\,(1, \cos \alpha/2)}.$$

Pour la période, $u = u_n = 0$:

(11)
$$\mathrm{T}\,(\alpha) = \frac{\mathrm{T}\,(0)}{m\,(1, \cos \alpha/2)}.$$

Posons $s_n = \sin u_n$ et résolvons (9) :

$$s_{n+1} = \frac{a_n - \sqrt{a_n^2 - (a_n^2 - b_n^2)\, s_n^2}}{(a_n - b_n)\, s_n}$$

(l'autre solution est à rejeter).

Mais cette écriture est numériquement instable ; en la multipliant par la « quantité conjuguée » du numérateur :

$$s_{n+1} = \frac{(a_n + b_n)\, s_n}{a_n + \sqrt{a_n^2 - (a_n^2 - b_n^2)\, s_n^2}}$$

la valeur initiale s_0 étant $\dfrac{\sin \vartheta/2}{\sin \alpha/2}$.

(10) devient :

$$t(\vartheta) = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{\pi/2 - \sin^{-1}(s)}{m(1, \cos \alpha/2)}, \qquad s = \lim s_n.$$

En mode DEGRÉ : $t(\vartheta) = \sqrt{\dfrac{l}{g}} \times \dfrac{\pi}{180} \times \dfrac{\cos^{-1}(s)}{m(1, \cos \alpha/2)}$.

Nous concluons cette étude par deux programmes.

Calcul du rapport T (α)/T (0)

(12)

```
10    INPA    A = COS (A/2)    B = 1
20    C = (A + B)/2    B = √(A * B)    A = C
30    IF A — B > 10^-8    THEN 20
40    PRINT 1/A
```

(13)

$\alpha°$	T (α)/T (0)	$\alpha°$	T (α)/T (0)
10	1,001 907	100	1,232 229
20	1,007 669	110	1,295 340
30	1,017 409	120	1,372 881
40	1,031 341	130	1,469 819
50	1,049 783	140	1,594 446
60	1,073 182	150	1,762 204
70	1,102 145	160	2,007 507
80	1,137 493	170	2,439 363
90	1,180 341	179	3,901 065

$\boxed{\text{Calcul de } t(\vartheta)}$

$$
(14)\quad
\begin{array}{ll}
10 & \mathrm{INP\ S} \quad \mathrm{S = SIN(S/2)/SIN(A/2)} \\
20 & \mathrm{X = 1} \quad \mathrm{Y = COS(A/2)} \\
30 & \mathrm{S = S * (X + Y)/(X + \sqrt{X^2 - S^2 * (X^2 - Y^2)})} \\
40 & \mathrm{Z = (X + Y)/2} \quad \mathrm{Y = \sqrt{X * Y}} \quad \mathrm{X = Z} \\
50 & \mathrm{IF\ X - Y > 10^{-8}} \quad \mathrm{THEN\ 30} \\
60 & \mathrm{PRINT} \quad \mathrm{\sqrt{L/G} * (\pi/180) * COS^{-1}(S)/X}
\end{array}
$$

Exemple :

On met $l = 1$ m dans L, $g = 9{,}81$ m. s^{-2} dans G, $\alpha = 100^{c}$ dans A. En mode degré :

$\vartheta°$	$t(\vartheta)$ en s	$\vartheta°$	$t(\vartheta)$ en s
90	0,190	40	0,467
80	0,268	30	0,507
70	0,328	20	0,545
60	0,379	10	0,582
50	0,425	0	0,618

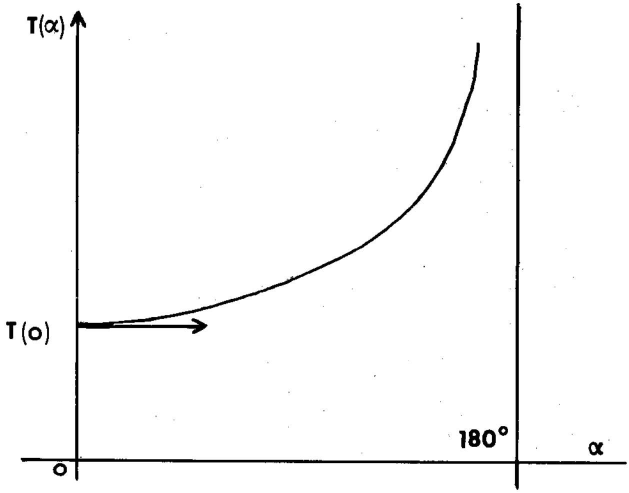
5. RESOLUTION DE L'EQUATION T (α) = T.

On se donne T en secondes, supérieur à $T(0) = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, et on cherche α, en degrés, vérifiant $T(\alpha) = T$.

On utilise la courte et performante formule (11) :

$$T(\alpha) = \frac{T(0)}{m(1, \cos\alpha/2)},$$

dont voici la représentation graphique :



En toute rigueur, la tangente horizontale et l'asymptote rendent la recherche difficile pour T voisine de T (0) ou T grande, mais ces difficultés sont davantage mathématiques que physiques.

Commençons par encadrer l'inconnue α au moyen des deux suites convergeant vers $m\,(1, \cos\alpha/2)$.

D'abord,

$$\sqrt{\cos\alpha/2} < m\,(1, \cos\alpha/2) < (1 + \cos\alpha/2)/2$$

entraîne :

$$\alpha > 2\cos^{-1}(T_0^2/T^2).$$

Ensuite, la majoration :

$$m\,(1, \cos\alpha/2) < 1/2\left(\sqrt{\cos\alpha}/2 + \frac{1+\cos\alpha/2}{2}\right) = \ldots$$

$$\ldots (1 + \sqrt{\cos\alpha}/2)^2/4$$

implique :

$$2\sqrt{\frac{T(0)}{T}} - 1 < \sqrt{\cos\alpha}/2,$$

ce qui n'est pertinent d'ailleurs que si $T < 4\,T(0)$.

Or, le tableau (13) nous enseigne que si $T > 4\,T_0$, alors α dépasse 179°, cas limite.

On a donc, si $T < 4\,T_0$:

$$2\cos^{-1}(T(0)^2/T^2) < \alpha < 2\cos^{-1}[(2\sqrt{T_0/T} - 1)^2].$$

Exemples :

$T_0/T = 0{,}9 \qquad 71{,}8° < \alpha < 72{,}7°$,

$T_0/T = 0{,}6 \qquad 137{,}8° < \alpha < 144{,}9°$,

$T_0/T = 0{,}3 \qquad 169{,}7° < \alpha < 179°$.

Si $T \geqslant 4\,T_0$, on sait que $179° < \alpha < 180°$. La détermination de α demande alors des décimales peut-être irréalistes.

Dans le cas général, $T < 4\,T_0$, l'encadrement de α est assez étroit pour permettre au lecteur de calculer α par la méthode de son choix. Le programme qui suit le fait par dichotomie.

Il suffit d'introduire le rapport $T/T(0)$ et d'attendre l'affichage de α (en degrés).

Résolution de $T(\alpha)/T(0) = T$

```
10   INP T     T = 1/T
20   B = 2 * COS⁻¹(T²)     C = 2 * COS⁻¹[(2 √T — 1)²]
30   A = (B + C)/2
40   IF C — B < 10⁻³    PRINT A    END
50   X = COS (A/2)    Y = 1.
60   Z = (X + Y)/2    Y = √(X • Y)    X = Z
70   IF X — Y > 10⁻⁸    THEN 60
80   IF X < T    C = A    GOTO 30
90   B = A    GOTO 30
```

Exemples :

$T/T_0 = 1{,}001 \qquad \alpha = 7{,}24°$,

$T/T_0 = 1{,}01 \qquad \alpha = 22{,}8°$,

$T/T_0 = 1{,}2 \qquad \alpha = 94{,}0°$,

$T/T_0 = 1{,}5 \qquad \alpha = 132{,}7°$,

$T/T_0 = 3 \qquad \alpha = 175{,}9°$.

6. DETERMINATION NUMERIQUE DE LA FONCTION ϑ.

Maintenant que nous sommes dotés de programmes calculant $t(\vartheta)$, il est permis d'envisager l'équation :

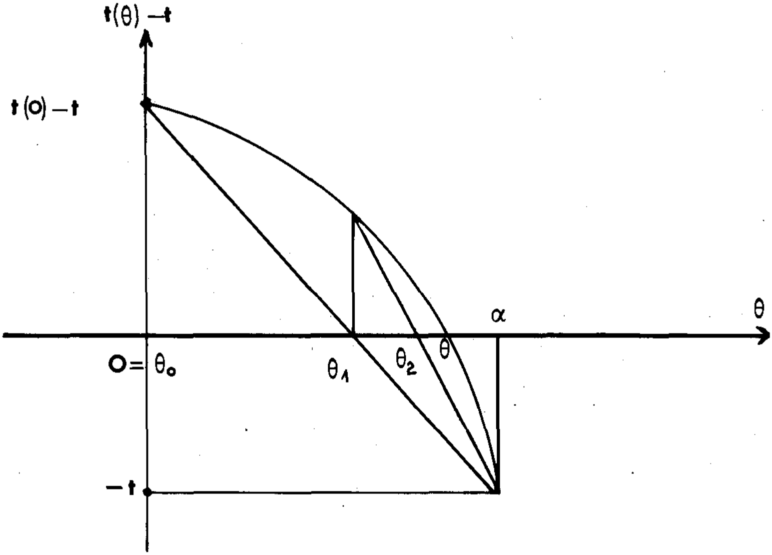
$$t(\vartheta) = t$$

t donné en secondes, $0 \leqslant t \leqslant 1/4\ T(\alpha)$, ϑ étant l'inconnue en degrés, $0 \leqslant \vartheta \leqslant \alpha$; α, g, l sont connues à l'avance.

Cette tâche nécessite :

— le calcul préalable de $t(0)$, au moyen de (12) ou (14),

— le choix d'un algorithme de résolution d'équation ; on peut adopter la méthode dite des parties proportionnelles, plus rapide ici que la dichotomie.



La suite ϑ_n, convergeant, par défaut, vers ϑ est définie par :

$$\vartheta_0 = 0^{\circ}$$

$$\vartheta_{n+1} = \alpha + \frac{t}{t(\vartheta_n)}(\vartheta_n - \alpha)$$

$t(\vartheta_n)$ se calculant par (14). On se rappellera que :

$$t(\vartheta) = \frac{t(0)}{90}\cos^{-1}(S).$$

Quant au test d'arrêt, on utilise d'abord (1) :

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\vartheta - \cos\alpha)$$

puis

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 < \frac{2g}{l}(1 - \cos\alpha) = \frac{4g}{l}\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

et enfin le théorème des accroissements finis :

$$|\vartheta - \vartheta_n| \leqslant |t - t(\vartheta_n)| \times 2\sqrt{\frac{g}{l}}\sin\frac{\alpha}{2}$$

où ϑ et ϑ_n sont en radians.

Donc : $$|\vartheta^\circ - \vartheta^\circ{}_n| \leqslant |t - t(\vartheta_n)| \times \frac{360}{\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\sin\frac{\alpha}{2},$$

et l'algorithme :

0. Mettre α, g, l dans A, G, L ; calculer $t(0)$ et le conserver dans T ; mettre $\dfrac{10^{-p}}{360/\pi \times \sqrt{G/L} \times \sin\alpha/2}$ dans E ; se donner t, $0 \leqslant t < T$.
1. $X \leftarrow 0$ et $Y \leftarrow T$.
2. $X \leftarrow X + \dfrac{t}{Y}(X - A)$.
3. $Y \leftarrow t(X)$.
4. Si $Y > t + E$ aller en 2.
5. Si $Y \leqslant t + E$ afficher X.

Je laisse au lecteur le soin de rédiger le programme correspondant.

Voici des résultats pour $\alpha = 100°$, $g = 9{,}81$ m.s^{-2} et $l = 1$ m.

Le programme (12) fournit :

$$t(0) = 0{,}617\,983\,4835$$

décimales utiles pour ne pas aggraver l'erreur sur $t(\vartheta)$.

J'ai obtenu :

$t = 0{,}1$ s $\quad \vartheta = 97{,}2°$,

$t = 0{,}2$ s $\quad \vartheta = 88{,}9°$,

$t = 0{,}3$ s $\quad \vartheta = 74{,}9°$,

$t = 0{,}4$ s $\quad \vartheta = 55{,}6°$,

$t = 0{,}5$ s $\quad \vartheta = 31{,}7°$,

$t = 0{,}6$ s $\quad \vartheta = 4{,}94°$.

7. BIBLIOGRAPHIE.

[1] B. DEMIDOVITCH et I. MARON, *Eléments de calcul numérique*, Editions Mir. (Exposé remarquable, clair et très accessible).

[2] A. ENGEL, *Mathématique élémentaire d'un point de vue algorithmique*, Cedic. (Nombreux programmes en Basic couvrant l'arithmétique, l'analyse et le calcul des probabilités ; très talentueux). Réédité par Nathan sous le titre « Mathématique et informatique ».

[3] L. SOLOMON et M. HOCQUEMILLER, *Mathématiques appliquées et calculatrices programmables*, Masson. (Bourré d'exemples ; chapitres substantiels sur les accélérations de convergence et sur les équations différentielles).

[4] I. ZELDOVITCH et A. MYCHKIS, *Eléments de mathématiques appliquées*, Editions Mir. (Ecrit par un physicien et un mathématicien ; un chapitre bienvenu sur le calcul des variations et ses applications).

D'un niveau plus élevé :

[5] N. BAKHVALOV, *Méthodes numériques*, Editions Mir. (Difficile mais passionnant ; je garantis la surprise au lecteur devant le ton personnel de l'auteur).

Pour une bibliothèque de programmes :

[6] Alan R. MILLER, *Programmes en Basic pour ingénieurs et scientifiques*, Sybex. (Il existe une transcription de ce livre avec programmes en Pascal).