

## Proposition d'expériences pour l'étude de la propagation d'ondes dans un milieu cristallin

par Christian BROUSSEAU,  
17000 La Rochelle.

---

### Résumé.

L'utilisation d'appareils à oscillations tels que l'échelle de perroquet ou l'ondoscope permet une approche visuelle et originale de l'étude de la vibration et de la propagation dans un milieu cristallin. L'objet de cet article est de présenter au vu d'une analogie mathématique les raisons physiques de cette affirmation ainsi que de proposer plusieurs possibilités expérimentales dans le but d'introduire des notions telles que celles de modes de vibration, de dispersion, de vitesse de phase et de coupure.

### 1. INTRODUCTION.

Il est souvent utile en Physique d'associer à un concept, un modèle qui puisse le décrire au mieux. Pour introduire les vibrations de réseaux à une dimension (ce sujet a fait l'objet de nombreux problèmes de concours en classes préparatoires), on utilise généralement un système de masses couplées par des ressorts (les masses représentant les atomes ou ions ; les ressorts représentant les interactions de liaisons).

Si cette idée n'est pas neuve, la réalisation expérimentale d'un tel dispositif reste difficile à mettre en œuvre. L'objet de cette note est de proposer plusieurs expériences faisant usage non plus d'un système de masses mais d'une échelle de perroquet (ou ondoscope) dont l'utilisation est à l'heure actuelle généralisée dans les lycées pour l'enseignement de la Mécanique.

L'idée de base d'une telle étude repose sur l'analogie mathématique dans le traitement des deux problèmes : vibrations d'un système de masses et oscillations des barreaux d'une échelle de perroquet.

### 2. PRESENTATION DE L'ANALOGIE.

Dans un modèle classique, simple, généralement admis de la vibration des atomes (ou des ions) autour de leur position d'équi-

libre (nœud du réseau), on utilise des ressorts pour décrire les interactions de liaisons. Prenons l'exemple d'un système cubique pour simplifier, les ressorts sont tous identiques puisque les trois directions de l'espace sont équivalentes ; chaque atome peut vibrer suivant trois degrés de liberté (pour  $n$  atomes, on a  $3n$  degrés de liberté).

La fig. 1 montre que pour un atome A donné, celui-ci est relié à ses six premiers voisins  $V_i$ ,  $i \in \langle 1,6 \rangle$  par six ressorts identiques appartenant à deux plans orthogonaux P et P'. Pour une liaison dans le plan P par exemple, la mise en vibration de A entraîne la mise en mouvement de proche en proche de tous les atomes. Le traitement d'un système à trois dimensions étant complexe, utilisons un modèle unidimensionnel et considérons la file finie d'atomes de la fig. 2. Les atomes, tous de même type, espacés d'une longueur  $l$  à l'équilibre et de masse  $m$  ne peuvent vibrer par hypothèse que parallèlement à la chaîne autour de leur position d'équilibre  $O_i$ ,  $i \in \langle 1, n \rangle$ .

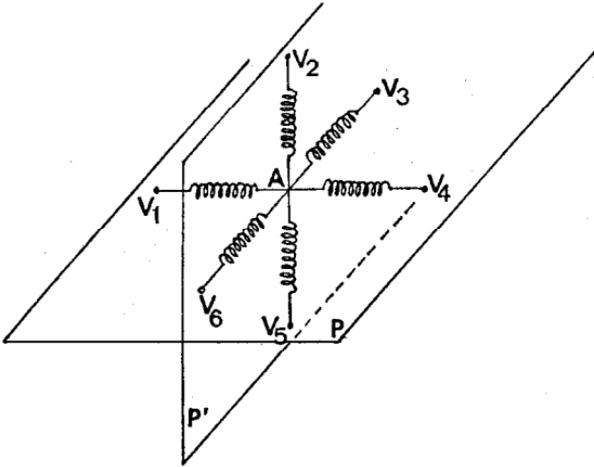


Fig. 1. — Modèle d'étude de la vibration des atomes.

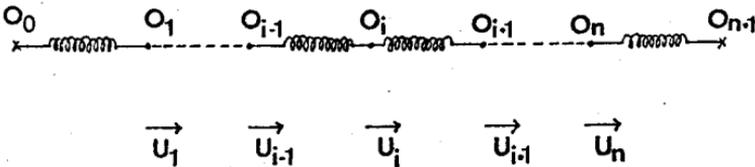


Fig. 2. — Chaîne finie d'atomes représentant un cristal à une dimension.

Les équations du mouvement (1) des  $n$  atomes sont obtenues en supposant le problème décrit par une seule constante de

force  $K$  et en ne tenant compte que des interactions entre premiers voisins [1]. Si  $U_i$  est le déplacement de l'atome indicé  $i$  par rapport à sa position d'équilibre  $O_i$ , alors l'équation différentielle qui traduit le comportement du système s'écrit :

$$m \ddot{U}_i = K (U_{i+1} + U_{i-1} - 2U_i). \quad (1)$$

Les conditions aux limites sont :  $U_0 = U_{n+1} = 0$ .

Pour une excitation sinusoïdale de pulsation  $\omega$ , on trouve que la relation de dispersion prend la forme suivante (d'après [1]) :

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{K}{m}} \left| \sin \frac{kl}{2} \right| \quad (2)$$

avec  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  représentant le module du vecteur d'onde.

Pour les faibles valeurs de  $k$ , la vitesse de phase  $V_\phi = \frac{\omega}{k}$

tend vers la vitesse d'une onde élastique  $V_s = l \sqrt{\frac{K}{m}}$  qui

pour un cristal représente la vitesse de propagation du son dans ce milieu (approximation d'un milieu continu).

Dans un précédent article du B.U.P. n° 628 [2], les auteurs mettaient en évidence les équations du mouvement (3) des  $n$  composantes d'une échelle de perroquet (fig. 3).

$$J \ddot{\theta}_i = C (\theta_{i+1} + \theta_{i-1} - 2\theta_i) \quad (3)$$

$J$ ,  $\theta_i$  désignant respectivement le moment d'inertie et l'angle du barreau  $i$  avec sa position d'équilibre.  $C$  est la constante de torsion des fils.

La relation de dispersion s'écrit d'après [2] :

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{C}{J}} \left| \sin \frac{kl}{2} \right|. \quad (4)$$

Il est très clair que les équations (1) et (3) ainsi que (2) et (4) sont équivalentes. En posant  $\omega_0^2 = \frac{\beta}{\alpha}$  et en faisant usage du tableau suivant, elles se généralisent en :

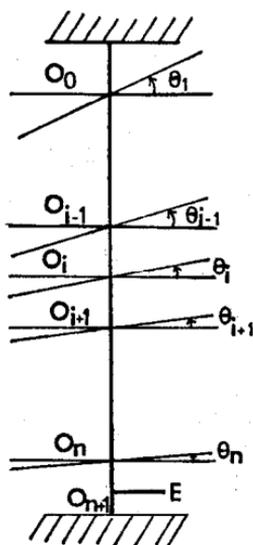


Fig. 3. — Echelle de perroquet.

$\alpha$	$m$	J
$\beta$	K	C
$x$	U	$\theta$

$$\ddot{x}_i = \omega_0^2 (x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i) \quad (5)$$

$$\omega = 2\omega_0 \left| \sin \frac{kl}{2} \right|. \quad (6)$$

### 3. RECHERCHE DES MODES NORMAUX.

Pour décrire un système à grand nombre de degrés de liberté ( $n$ ), on utilise généralement une représentation par modes normaux associés à chaque degré de liberté. Pour cela, la méthode consiste à prendre comme solutions de l'équation (5) la forme sinusoïdale suivante (correspondant à la propagation d'ondes progressives) :

$$i \in \langle 1, n \rangle \quad x_i = A_i \cos(\omega t + \Phi_i). \quad (7)$$

En introduisant ces solutions dans (5), il vient :

$$\frac{A_{i-1} + A_{i+1}}{A_i} = \frac{2\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2}. \quad (8)$$

Posons maintenant :

$$A_i = A \sin(i\theta). \quad (9)$$

On impose au système les conditions aux limites suivantes :

$$A_0 = A_{n+1} = 0. \quad (10)$$

On sait, d'autre part, que le comportement d'une chaîne finie avec conditions aux limites peut se traiter suivant la méthode de BORN-VON KARMAN pour une chaîne infinie : nous pouvons donc « oublier » pour le moment les réflexions aux extrémités et la formation possible d'ondes stationnaires.

Les relations (8), (9) et (10) entraînent que :

$$\vartheta_p = p \frac{\pi}{n+1}$$

ainsi que :

$$\omega_p = 2\omega_0 \left| \sin p \frac{\pi}{2(n+1)} \right|. \quad (11)$$

Nous définissons ainsi un indice de mode  $p$ .

#### a) Propriétés.

i) Le déplacement le plus général est représenté par :

$$x_i(t) = \sum_{p=1}^n A_{pi} \cos(\omega_p t + \Phi_{pi}) \quad (12)$$

avec  $A_{pi}$  représentant l'amplitude de l'élément  $i$  quand le mode  $p$  est excité. Les modes normaux forment une base commode pour représenter les déplacements possibles.

ii) Nous pouvons vérifier l'existence de  $n$  modes normaux différents depuis  $p = 1$  jusqu'à  $p = n$ .

iii) La fréquence maximale qui ne saurait être atteinte (car  $A_{pi} = 0$ ,  $\forall_i$  lorsque  $p = n+1$ , et  $\vartheta_{n+1} = \pi$ ) est obtenue pour  $p = n+1$  ;

$$\omega_{n+1} = 2\omega_0. \quad (13)$$

#### b) Condition de résonance.

D'un point de vue physique, ces modes normaux sont les ondes stationnaires qui peuvent exister dans la structure précédente compte tenu des conditions aux limites. La propagation d'ondes progressives sinusoïdales avec réflexions aux extrémités de la chaîne induit la formation d'ondes stationnaires à la résonance ( $\omega = \omega_p$ ).

La condition de stationnarité pour des modes de vibration d'un milieu borné s'obtient de façon très classique (voir par exemple [3]) :

$$L = p \frac{\lambda}{2} \quad (14)$$

L étant la longueur totale du système. Ici :

$$L = (n + 1)l \quad (15)$$

Dans ces conditions, l'équation (11) s'écrit:

$$v_p = 2 v_0 |\sin l \sigma \pi| \quad (16)$$

dans laquelle  $\sigma = \frac{1}{\lambda}$  et  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$  désignent respectivement le

nombre d'ondes (en  $\text{cm}^{-1}$ ) et la fréquence. La relation (16) est classique dans l'étude de la dynamique des vibrations d'un réseau. Le graphe discret de cette relation concernant la chaîne finie tend par continuité vers le graphe continu d'une chaîne infinie pour les mêmes conditions lorsque  $n$  devient grand.

#### 4. PROPOSITION D'EXPERIENCES.

Nous avons vu précédemment toute la richesse du modèle pour simuler le comportement de la propagation d'une onde dans un cristal à une dimension. Je propose ici un certain nombre de manipulations pour les collègues qui seraient intéressés de mettre à profit l'analogie présentée afin d'en tester la faisabilité expérimentale. Tout d'abord, il serait très instructif d'établir la courbe de dispersion du système. D'après ce qui précède, il est nécessaire de se placer dans les conditions d'ondes stationnaires (nombre entier de demi-longueurs d'ondes).

L'excitateur E de la fig. 3 est un oscillateur sinusoïdal qui génère des ondes progressives. Le paramètre de commande est la pulsation  $\omega$ .

Dans une première étape, il est nécessaire d'établir la correspondance entre  $p$  indice de mode et  $\omega$ . Puis en se plaçant sur un mode donné, il faut mesurer la vitesse de phase  $V_0$  qui permettra de connaître le nombre d'ondes  $\sigma$ . L'utilisation de capteurs optoélectroniques reliés à une horloge digitale devrait permettre d'obtenir une meilleure précision sur les résultats que celle de la référence [2].

Ces différents points de mesure devraient permettre d'apprécier l'ordre de grandeur du mode à partir duquel naît la non-linéarité du graphe  $v_p(\sigma)$  ainsi que la valeur de la fréquence de coupure (incapacité pour un milieu dispersif à transmettre des ondes au-delà d'une certaine fréquence critique). Cette expérience peut ainsi visualiser le comportement d'un oscillateur mécanique qui agit comme un filtre passe-bas.

L'étude du modèle linéaire à deux types d'atomes (molécule AB linéaire par exemple) peut être simulé par une distribution alternée de petits et grands barreaux. Cette nouvelle disposition a pour effet de doubler le nombre de degrés de liberté (donc de modes) du système et doit conduire à une dégénérescence de la courbe de dispersion.

Cette anomalie s'explique par la forme de l'équation de dispersion (d'après [1]) :

$$v_p = \alpha \{ 1 \pm [1 - \beta \sin^2(l \sigma \pi)]^{1/2} \}^{1/2} \quad (17)$$

avec :

$$\alpha = \frac{(\omega_0^2 + \omega'_0{}^2)^{1/2}}{2\pi} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{4\omega_0^2\omega'_0{}^2}{(\omega_0^2 + \omega'_0{}^2)^2}$$

en posant  $\omega_0 = \frac{C}{J}$ ,  $\omega'_0 = \frac{C}{J'}$  correspondant aux deux types de barreaux utilisés.

Par la même technique de mesure que celle décrite précédemment, outre la détermination de la courbe de dispersion, il s'agirait de mettre en évidence et de mesurer la bande interdite en fréquences qui confère au système un comportement de filtre coupe-bande ; de vérifier que la largeur de cette bande augmente

lorsque le rapport des moments d'inertie  $\frac{J'}{J}$  augmente...

Il va de soi qu'une extension possible est l'étude de « systèmes polyatomiques » (barreaux de plusieurs longueurs) à plusieurs branches dans la courbe de dispersion.

Il semble également intéressant comme prolongement de ces expériences d'étudier à l'aide de ce modèle le rôle et l'influence des défauts ponctuels (rupture de périodicité dans un réseau) que l'on peut créer expérimentalement en remplaçant par exemple un grand barreau (GB) par un petit barreau (PB).

La fig. 4 illustre ainsi un système à un défaut.

## 5. CONCLUSION.

Nous avons examiné tout au long de cet article les possibilités d'étude de la dynamique des vibrations dans un cristal unidimensionnel au moyen d'un appareil original : l'échelle de perroquet (ou ondoscope).

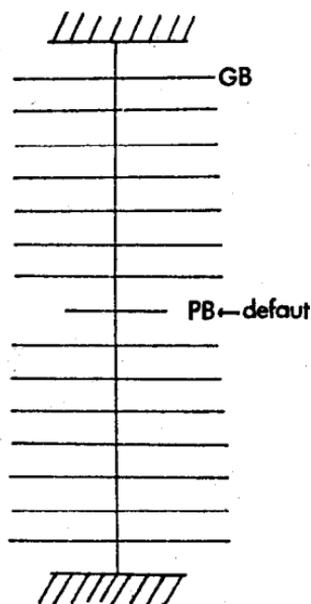


Fig. 4. — Modèle expérimental pour l'étude des défauts ponctuels.

Ce support expérimental se révèle être d'une richesse insoupçonnée et constitue un véritable simulateur dans l'étude de la vibronique des milieux cristallins. A notre connaissance, cette analogie n'a pas été à l'heure actuelle exploitée et il paraît souhaitable de confronter ces prévisions théoriques avec les résultats expérimentaux de plusieurs manipulations que nous suggérons ici.

#### REFERENCES

- [1] B.U.P. n° 548 : H. GIÉ, pages 1-20.
- [2] B.U.P. n° 628 : A. DURUPHY, M. CLEMENTE, N. GEIGER, pages 179-187.
- [3] Cours de Physique : Mécanique - Ondes, J. BOK et P. MOREL (Hermann).