L'oscillateur harmonique de translation

par M. BARBASTE,
Lycée technique, Talence.

QUELQUES REMARQUES ET PRECISIONS

Le fait de se cantonner à l'étude des oscillations d'un corps fixé à un ressort et assujetti à se déplacer sur une tige horizontale au lieu de le laisser osciller verticalement, fait que l'on « escamote » certaines difficultés qui peuvent prêter à confusion et donc engendrer par la suite des erreurs.

Avant de rentrer dans les détails de nos considérations, faisons quelques rappels concernant :

* la force exercée par le ressort sur un corps contribuant à sa déformation, force communément dénommée « tension $\vec{T}$ du ressort » et
* l' « énergie potentielle du ressort » lors de sa déformation.

Par ailleurs, nous utiliserons au maximum l'écriture vectorielle pour exprimer certaines relations, car elle nous semble plus expressive des phénomènes étudiés en ayant constamment présentes à l'esprit les propriétés utilisées.

I. TENSION D'UN RESSORT.

Soit un ressort (r) à spires non jointives, de raideur k, à réponse linéaire, déformé successivement de manière à déplacer son extrémité o (fig. 1) :

* en A_1, lors d'une compression ; alors :

$$\vec{F}_{1\,(r)/doigt} = \vec{T}_1 = -k\,\overrightarrow{oA_1},$$

* en A_2, lors d'une dilatation ; alors :

$$\vec{F}_{2\,(r)/doigt} = \vec{T}_2 = -k\,\overrightarrow{oA_2}.$$

Ainsi, d'une manière générale : $\vec{T} = -k\,\overrightarrow{oA}$, relation qui exprime :

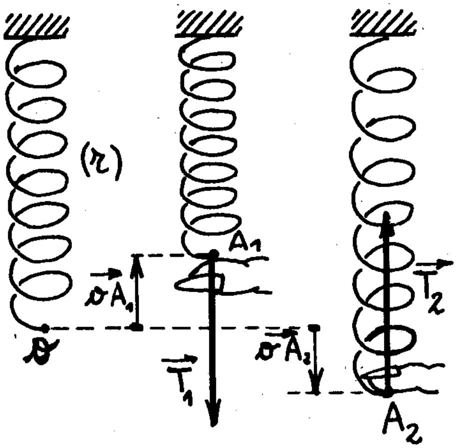


Fig. 1

— que les vecteurs tension $\vec{T}$ et déplacement $\overrightarrow{oA}$ de l'extrémité du ressort (r) sont de sens opposé et

— qu'il existe une relation simple de proportionnalité entre leurs normes.

II. ENERGIE POTENTIELLE DU RESSORT.

Cette énergie « mise en réserve » par le ressort dès qu'il est déformé sera toujours exprimée en prenant comme « état de référence » l'état initial du ressort non déformé : l'extrémité libre occupe la position o ; elle est essentiellement de nature élastique et nous noterons :

$$Ep_{el}(A)/o = \frac{1}{2} k \, \overrightarrow{oA}^2.$$

III. ETUDE DYNAMIQUE DE L'OSCILLATEUR.

Le système étudié sera le corps sphérique homogène dont le centre de gravité G coïncide avec l'extrémité du ressort.

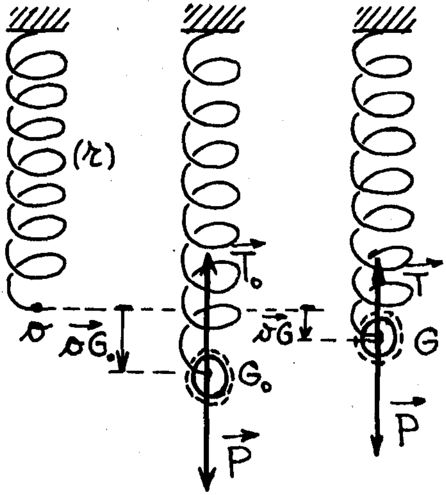
Nous aurons successivement (fig. 2) :

à l'équilibre :

$$\vec{P} + \vec{T_0} = \vec{0}, \quad \text{ou :} \quad \vec{P} - k\,\overrightarrow{oG_0} = \vec{0} \qquad (1)$$

en mouvement :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\,\vec{a_G}, \quad \text{ou :} \quad \vec{P} - k\,\overrightarrow{oG} = m\,\ddot{\overrightarrow{oG}}. \qquad (2)$$



à vide à l'équilibre en mouvement

Fig. 2

Retranchons (1) de (2) :

$$-k\,(\overrightarrow{oG}-\overrightarrow{oG_0}) = m\,\ddot{\overrightarrow{oG}}. \qquad (3)$$

La relation de CHASLES donne :

$$\overrightarrow{oG}-\overrightarrow{oG_0} = \overrightarrow{G_0G}.$$

En dérivant deux fois :

$$\ddot{\overrightarrow{oG}} = \overrightarrow{a}_G = \ddot{\overrightarrow{G_0G}}.$$

Ainsi, nous sommes conduits à prendre comme origine des espaces non plus le point o, mais G_0 : nous avons fait un « changement de variable ».

Par ailleurs, la relation (3) ainsi écrite :

$$-k\,\overrightarrow{oG}-(-k\,\overrightarrow{oG_0}) = m\,\dot{\overrightarrow{oG}}$$

fera mieux apparaître la « résultante » :

$$-k\,\overrightarrow{G_0G} = \overrightarrow{T}-\overrightarrow{T_0} = \overrightarrow{f}.$$

Ainsi, cette force $\vec{f}$ appelée « force de rappel » :

— de sens opposé à celui du vecteur-déplacement $\overrightarrow{G_0G}$ du point G, dont la position G_0 occupée lorsque le corps est au repos est prise comme origine des espaces,

— de norme proportionnelle à celle de $\overrightarrow{G_0G}$,

ne peut plus être confondue avec l'expression de la tension $\vec{T} = k\,\overrightarrow{oG}$, confusion inéluctable faite lorsque le corps oscille horizontalement.

La relation (3) s'écrira encore : $-k\,\overrightarrow{G_0G} = m\,\ddot{\overrightarrow{G_0G}}$, soit :

$$\ddot{\overrightarrow{G_0G}} + \frac{k}{m}\,\overrightarrow{G_0G} = \vec{0}.$$

En projetant sur un axe $x'x$ dont nous ne nous sommes pas préoccupés jusqu'ici, nous obtenons l'équation différentielle bien connue :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\,x = 0. \tag{4}$$

IV. ETUDE ENERGETIQUE DE L'OSCILLATEUR.

Le système étudié sera formé du corps (c), du ressort (r), de la Terre ($\mathcal{T}$) que nous noterons : (S) $= \{(c)\,;\,(r)\,;\,(\mathcal{T})\}$ considéré comme isolé (fig. 3).

L'énergie mécanique totale E de (S) est la somme :

— de l'énergie cinétique de (c) dépendant, outre la masse m de (c) de sa vitesse $\vec{V}$ déterminée dans un référentiel que nous supposerons galiléen, soit :

$$E_c = \frac{1}{2}\,mV^2\,;$$

— de l'énergie potentielle élastique du ressort établie au §. II et qui, ici, s'exprimera :

$$Ep_{el}(G)/o = \frac{1}{2}\,k\,\overrightarrow{oG}^2\,;$$

— de l'énergie potentielle de pesanteur de (c) dans le champ de pesanteur et qui s'exprimera, en prenant arbitrairement G_0 pour origine de ce type d'énergie :

$$Ep_{pes}(G)/G_0 = -m\vec{g}\cdot\overrightarrow{G_0G}$$

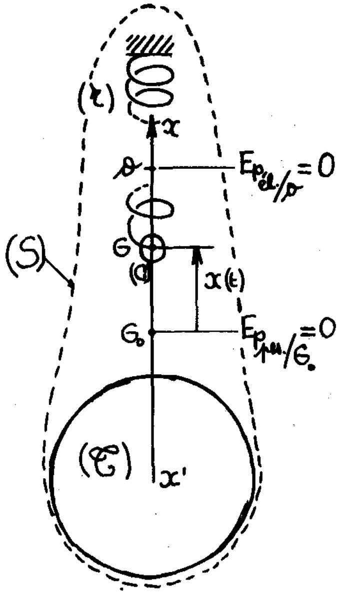


Fig. 3

- énergie positive lorsque G est au-dessus de G_0,
- énergie négative lorsque G est au-dessous de G_0.

Ainsi :

$$E = E_c + Ep_{el}(G)/o + Ep_{pes}(G)/G_0$$

donnera :

$$E = \frac{1}{2}\, mV^2 + \frac{1}{2}\, k\, \overrightarrow{oG}^2 - m\vec{g} \cdot \overrightarrow{G_0G}.$$

De la relation (1) du § II, nous tirons : $m\vec{g} = k\,\overrightarrow{oG_0}$, ainsi :

$$E = \frac{1}{2}\, mV^2 + \frac{1}{2}\, k\,(oG_0 + G_0G)^2 - k\,\overrightarrow{oG_0} \cdot \overrightarrow{G_0G}$$

développons :

$$E = \frac{1}{2}\, mV^2 + \frac{1}{2}\, k\,\overrightarrow{oG_0}^2 + \frac{1}{2}\, k\,\overrightarrow{G_0G}^2 + \ldots$$

$$\ldots k\,\overrightarrow{oG_0} \cdot \overrightarrow{G_0G} - k\,\overrightarrow{oG_0} \cdot \overrightarrow{G_0G} \qquad (5)$$

Or l'équation différentielle (4) admet comme solution :

$$x = G_0G = X \sin(\omega_0 t + \varphi) \qquad \text{avec} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

d'où :

$$\dot{x} = V = \omega_0 X \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

ainsi l'équation (5) deviendra :

$$E = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \ldots$$
$$\ldots \frac{1}{2} k X^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} k \overrightarrow{oG_0}^2$$

ou :

$$E = \frac{1}{2} m \frac{k}{m} X^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \ldots$$
$$\ldots \frac{1}{2} k X^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} k \overrightarrow{oG_0}^2$$

finalement :

$$E = \frac{1}{2} k X^2 + \frac{1}{2} k \overrightarrow{oG_0}^2.$$

Il ne faut pas s'étonner de ne pas trouver le résultat classique obtenu lorsque l'oscillateur est horizontal : $E = \frac{1}{2} k X^2$, car nous savons que l'énergie potentielle de pesanteur est définie à une constante près due au choix du niveau de référence. Il nous a donc paru intéressant de déterminer ce niveau qui rendait nul le terme constant $\frac{1}{2} k \overrightarrow{OG_0}^2$. Désignons par A ce point particulier situé sur l'axe $x'x$ et intéressons-nous seulement à :

$$Ep = Ep_{el}/o + Ep_{pes}/A$$

$$Ep = \frac{1}{2} k \overrightarrow{oG}^2 - k \overrightarrow{oG_0} \cdot \overrightarrow{AG}$$

$$Ep = \frac{1}{2} k (\overrightarrow{oG_0} + \overrightarrow{G_0G})^2 - k \overrightarrow{oG_0} (\overrightarrow{AG_0} + \overrightarrow{G_0G})$$

$$Ep = \frac{1}{2}\,k\,\overrightarrow{oG_0}^2 + \frac{1}{2}\,k\,\overrightarrow{G_0G}^2 + k\,\overrightarrow{oG_0}\cdot\overrightarrow{G_0G}$$

$$- k\,\overrightarrow{oG_0}\cdot\overrightarrow{G_0G} - k\,\overrightarrow{oG_0}\cdot\overrightarrow{AG_0}$$

$$Ep = \frac{1}{2}\,k\,\overrightarrow{G_0G}^2 + \frac{1}{2}\,k\,\overrightarrow{oG_0}\,(\overrightarrow{oG_0} - 2\,\overrightarrow{AG_0})$$

Ainsi, en prenant : $\overrightarrow{oG_0} = 2\,\overrightarrow{AG_0} \Rightarrow \overrightarrow{AG_0} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{oG_0}$ c'est-à-dire

en choisissant A au milieu du vecteur $\overrightarrow{oG_0}$ (fig. 4), alors :

$$E = \frac{1}{2}\,mV^2 + \frac{1}{2}\,k\,\overrightarrow{G_0G}^2 = \frac{1}{2}\,k\,X^2 = C^{te}.$$

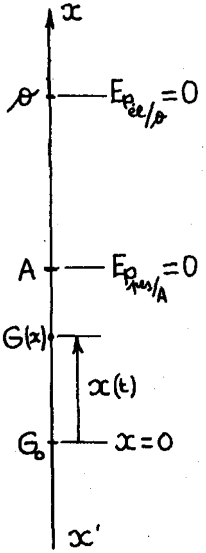


Fig. 4

Donc, si l'on veut montrer que l'énergie mécanique totale du système (S) défini au début de ce paragraphe IV s'exprime simplement, il nous faudra choisir le niveau de référence de l'énergie potentielle de pesanteur non plus de manière quelconque, mais en A milieu de oG.

Reprenons les calculs, avec ce point A, de :

$$\mathrm{E}p = \mathrm{E}p_{el}/o + \mathrm{E}p_{pes}/\mathrm{A}$$

$$\mathrm{E}p = \frac{1}{2}\, k\, \overrightarrow{o\mathrm{G}}^2 - m\vec{g} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AG}}$$

$$\mathrm{E}p = \frac{1}{2}\, k\, (\overrightarrow{o\mathrm{G}_0} + \overrightarrow{\mathrm{G}_0\mathrm{G}})^2 - k\, \overrightarrow{o\mathrm{G}_0}\, (\overrightarrow{\mathrm{AG}_0} + \overrightarrow{\mathrm{G}_0\mathrm{G}})$$

$$\mathrm{E}p = \frac{1}{2}\, k\, \overrightarrow{o\mathrm{G}_0}^2 + \frac{1}{2}\, k\, \overrightarrow{\mathrm{G}_0\mathrm{G}}^2 + k\, \overrightarrow{o\mathrm{G}_0} \cdot \overrightarrow{\mathrm{G}_0\mathrm{G}}$$

$$- k\, \overrightarrow{o\mathrm{G}_0} \cdot \overrightarrow{\mathrm{G}_0\mathrm{G}} - k\, \overrightarrow{o\mathrm{G}_0} \cdot \frac{1}{2}\, \overrightarrow{o\mathrm{G}_0}$$

$$\mathrm{E}p = \frac{1}{2}\, k\, \overrightarrow{\mathrm{G}_0\mathrm{G}}^2.$$

Nous pourrons donc conclure de la manière suivante :

En suppoasnt que les pertes d'énergie dues aux frottements visqueux et à la déformation du ressort soient négligeables, l'énergie mécanique totale E du système constitué par le ressort ($\mathcal{R}$), le corps (C) fixé à ce dernier, et la Terre ($\mathcal{T}$) est :

1. Constante du cours du temps,
2. Proportionnelle au carré de l'amplitude X à condition de prendre comme niveau de référence pour évaluer l'énergie potentielle de pesanteur le milieu A de l'allongement $o\mathrm{G}_0$ du ressort à l'équilibre, alors :

$$\mathrm{E}p = \mathrm{E}_c + \mathrm{E}p_{el}/o + \mathrm{E}p_{pes}/\mathrm{A} = \frac{1}{2}\, k\, \mathrm{X}^2.$$