

Détermination de facteur de qualité d'éléments oscillants

par Michel BRISSAUD, Lucien EYRAUD
et Henri KLEIMANN,
I.N.S.A., Villeurbanne.

Résumé.

La caractérisation d'un élément de transducteur électromécanique consiste à déterminer les paramètres du circuit oscillant motionnel (R, L, C) du schéma équivalent autour d'une fréquence de résonance propre. Lorsque le coefficient de surtension mécanique $Q_m \geq 100$, on utilise la courbe module de l'impédance en fonction de la fréquence. La découverte et l'application de matériaux à faible coefficient de surtension mécanique ($Q_m \leq 20$) du type PbNb_2O_6 remettent en cause l'utilisation des formules approchées de la méthode précédente.

L'exposé suivant décrit une méthode plus générale de caractérisation à partir des deux diagrammes d'impédance et d'admittance.

I. SCHEMA EQUIVALENT D'UN ELEMENT VIBRANT (1).

Les équations régissant le fonctionnement d'un transducteur ultrasonore peuvent, autour d'une fréquence de résonance, être soit résolues directement sous forme analytique, soit représentées par un schéma électrique équivalent. Cette dernière méthode est très souvent utilisée car elle a l'avantage de traduire, sous forme électrique, des grandeurs mécaniques et acoustiques liées au matériau de l'élément vibrant ainsi qu'aux milieux avec lesquels il est couplé. A partir du schéma équivalent, on déterminera divers paramètres caractérisant le transducteur. On peut, par exemple, calculer :

- Ses pertes mécaniques,
- Son aptitude à convertir l'énergie électrique en énergie mécanique,

— Sa bande passante globale et l'acuité de la résonance.

Le schéma équivalent le plus général d'un élément vibrant autour d'une fréquence de résonance est donné fig. 1 et est constitué par la mise en parallèle :

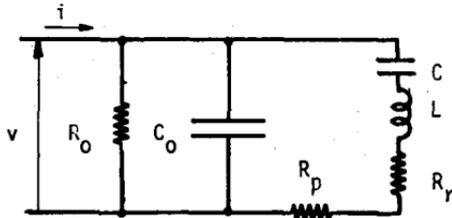


Fig. 1. — Schéma équivalent d'un transducteur.

- a) d'une résistance R_0 qui représente les pertes diélectriques du matériau. Cette résistance est généralement mesurée à une fréquence très inférieure à la première résonance du transducteur ;
- b) d'une capacité C_0 qui est la capacité propre de l'élément vibrant à la fréquence de résonance considérée ;
- c) d'un ensemble L, R, C connectées en série. Dans le cas où l'élément vibrant émet dans l'air, on peut montrer [2] que :

- L représente la masse dynamique du système,
- R est l'image des pertes mécaniques R_p et de rayonnement R_r , avec $R = R_p + R_r$,
- C correspond à l'élasticité du matériau de l'élément vibrant. Le transducteur réalise la conversion de l'énergie électrique en énergie mécanique. L'énergie électrique prise par C représente en fait l'énergie transformée sous forme élastique par le transducteur. On caractérise l'aptitude du transducteur à effectuer cette conversion par un coefficient k appelé coefficient de couplage dynamique [1], [5] et relié à C par la relation :

$$\frac{C}{C_0} = \frac{k^2}{1 - k^2}. \quad (1-1)$$

L'ensemble L, R, C série est appelé branche motionnelle du transducteur parce qu'elle représente la partie vibratoire du transducteur.

Soit Z_m l'impédance série de la branche motionnelle. On peut écrire Z_m sous la forme :

$$Z_m = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right). \quad (1-2)$$

Pour la pulsation de résonance série ω_s , telle que :

$$L\omega_s - \frac{1}{C\omega_s} = 0$$

ou encore : $LC\omega_s^2 = 1$ (1-3), l'impédance de la branche motionnelle est réelle, minimale et égale à R.

Si on écrit l'équation (1-2) en faisant intervenir ω_s , on a :

$$Z_m = R + j \left(L\omega_s \frac{\omega}{\omega_s} - \frac{\omega_s}{C\omega_s \omega} \right)$$

ou encore puisque d'après (1-3) : $L\omega_s = \frac{1}{C\omega_s}$ et en mettant R en facteur :

$$Z_m = R \left[1 + j \frac{L\omega_s}{R} \left(\frac{\omega}{\omega_s} - \frac{\omega_s}{\omega} \right) \right] = R [1 + j Q_m \delta] \quad (1-4)$$

$$\text{où on a posé : } Q_m = \frac{L\omega_s}{R} = \frac{1}{RC\omega_s} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (1-5),$$

Q_m est appelé : facteur de qualité ou de surtension du circuit résonant motionnel.

$$\delta = \frac{\omega}{\omega_s} - \frac{\omega_s}{\omega} \quad (1-6)$$

δ est appelée la dissonance.

On peut aussi écrire, si Q_m est grand, δ sous la forme :

$$\delta \approx \frac{2\Delta\omega}{\omega_s} \quad (1-6')$$

avec : $\omega = \omega_s + \Delta\omega$.

On définit la bande passante du circuit motionnel comme étant l'écart relatif de fréquence :

$$|Z_m| = \sqrt{2} |Z_m|_{\text{résonance}} \quad (1-7)$$

Le module de l'impédance est :

$$|Z| = R [1 + Q_m^2 \delta^2]^{1/2} \quad (1-8)$$

A la résonance : $\delta = 0$ et $|Z_m|_{\text{résonance}} = R$, d'où :

$$[1 + Q_m^2 \delta^2]^{1/2} = \sqrt{2} \quad (1-9)$$

La relation (7) est vérifiée pour deux valeurs de δ c'est-à-dire deux valeurs de ω telles que :

$$Q_m^2 \delta^2 = 1. \quad (1-10)$$

Finalement, en développant (10), on montre que la bande passante à 3 dB du circuit motionnel est donnée par la relation :

$$\Delta f = \frac{f_s}{Q_m}. \quad (1-11)$$

Cette dernière relation montre que plus Q_m est grand, plus la bande passante du circuit motionnel sera faible. La courbe donnant l'évolution de $|Z_m|$ en fonction de la fréquence sera très étroite. L'acuité de la résonance est donc liée directement au facteur de qualité Q_m .

Pratiquement, il est impossible d'isoler la branche motionnelle pour déterminer la valeur de ces trois paramètres, il faut les calculer à partir de la mesure de l'impédance, ou de l'admittance, globale du circuit de la fig. 1. Lorsque l'on a affaire à des transducteurs ayant des facteurs de qualité de l'ordre de 100 et plus, la procédure de détermination de Q_m consiste à mesurer la fréquence qui rend maximum le module de l'impédance complète du circuit fig. 1 puis les deux fréquences f_1 et f_2 telles que le module de l'impédance complète a varié de 3 dB et à appliquer la relation (11). Cette procédure donne pour Q_m élevé, de bons résultats [4] (cf. Annexes 1 et 2).

En échographie ultrasonore [6] [7] pour avoir des images de qualité, il faut avoir une résolution axiale importante, c'est-à-dire pouvoir séparer aisément des petits objets rapprochés. Il est alors nécessaire d'utiliser des signaux de très courte durée. Le transducteur qui devra transmettre ces signaux sans déformation notable devra avoir une très large bande passante et, par suite, un très faible facteur de qualité Q_m (typiquement $Q_m \leq 10$).

Si on utilise la même procédure que précédemment pour déterminer la valeur de Q_m , on va commettre des erreurs importantes sur les valeurs des paramètres L, C et R. Nous avons alors été amené à développer une nouvelle méthode de mesure pour déterminer avec une bonne précision les valeurs de tous les paramètres du schéma de la fig. 1.

Nous supposons, dans une première approche, que les divers modes de fonctionnement sont découplés, c'est-à-dire qu'ils n'interfèrent pas entre eux. Dans le cas contraire, il faudra tenir compte des autres modes ce qui obligera à ajouter en parallèle, sur le schéma de la fig. 1, d'autres branches de type L, R, C série caractérisant l'oscillation du système autour de ces modes.

Nous supposons également que l'impédance de rayonnement est purement réelle et caractérisée par une résistance R_r .

Cela est vérifié si les dimensions géométriques du transducteur sont grandes devant la longueur d'onde. Si ce n'est pas le cas, on a une partie réactive non nulle qui pourra être caractérisée par une self ou une capacité supplémentaire. Les paramètres L ou C , ne représenteront plus dans ce cas les propriétés intrinsèques de l'élément vibrant.

Nous allons rappeler les principaux résultats relatifs au transducteur à grand facteur de qualité puis nous décrirons la nouvelle méthode proposée.

II. ELEMENT VIBRANT A GRAND FACTEUR DE QUALITE Q_M .

L'admittance du montage de la fig. 1 est :

$$Y = \frac{i}{v} = \frac{1}{R_o} + j C_o \omega + \frac{1}{R + j L \omega + \frac{1}{j C \omega}} = G + j B \quad (2-1)$$

Si on trace l'évolution de Y en fonction de ω , on trouve une courbe qui a l'allure de celle donnée fig. 2.

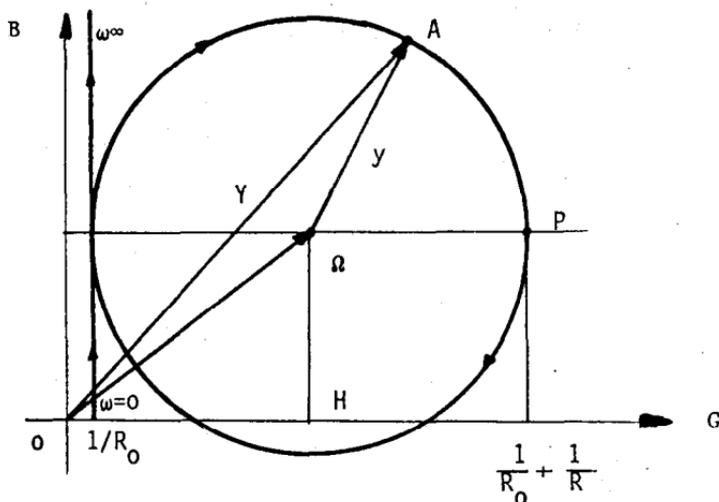


Fig. 2. — Diagramme d'admittance d'un transducteur.

Si le facteur de qualité de l'élément oscillant est grand, on a un cercle presque parfait. Si, au contraire, le facteur de qualité est faible, on a une boucle qui s'écarte beaucoup du cercle.

Pour montrer que l'on obtient un cercle lorsque $Q_m = \frac{L\omega_s}{R}$ est grand, effectuons le changement d'origine :

$$\overline{OA} = Y = \overline{O\Omega} + \overline{\Omega A} = \overline{O\Omega} + y. \quad (2-2)$$

Avec :

$$\overline{O\Omega} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{2R} + j C_0 \omega_s \quad (2-3)$$

et :

$$\omega_s = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (2-4)$$

D'où :

$$y = \frac{1}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} - \frac{1}{2R} + j C_0 (\omega - \omega_s). \quad (2-5)$$

Soit, en réduisant les deux premiers termes au même dénominateur :

$$y = \frac{-[1 - LC\omega^2 - jRC\omega]}{2R[1 - LC\omega^2 + jRC\omega]} + j C_0 (\omega - \omega_s). \quad (2-6)$$

Si $Q_m = \frac{L\omega_s}{R}$ est grand, le cercle entier est parcouru pour

une excursion de pulsation très faible ($\Delta\omega = \omega - \omega_s$) et on a alors :

$$y \approx \frac{-1[1 - LC\omega^2 - jRC\omega]}{2R[1 - LC\omega^2 + jRC\omega]} = \frac{-1}{2R} e^{j\vartheta} \quad (2-7)$$

avec :

$$\vartheta = 2 \text{ Arc tg } \frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}. \quad (2-8)$$

Le rapport des deux crochets est toujours égal à 1 en module, seule la phase ϑ varie, d'où :

$$\text{Arg } y = \underline{|y|} = \text{Arg} \left(\frac{-1}{2R} \right) + \vartheta = +\pi + \vartheta \quad (2-9)$$

soit, finalement :

$$\text{Arg } y = \underline{|y|} = \pi - 2 \text{ Arc tg } \frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}.$$

2.1. Résonance série ou résonance de la branche motionnelle.

Lorsque $1 - LC\omega_s^2 = 0$ (2-11), on a : $\text{Argt} \vartheta = \text{Argt} \infty$, soit :

$$\vartheta = \pm \frac{\pi}{2} \text{ et } \text{Arg} y = 0 \text{ ou } 2\pi; \text{ à cette pulsation } \omega_s :$$

$$y = \frac{1}{2R} \text{ et } Y = \frac{1}{R_o} + jC_o\omega_s + \frac{1}{R}. \quad (2-12)$$

Le point représentatif se trouve en P sur le cercle.

Le maximum de la partie réelle de l'admittance se produit pour la pulsation de résonance série ω_s de la branche motionnelle.

Pour la résonance de la branche motionnelle, l'admittance y a une partie imaginaire égale à $C_o\omega_s$. De la mesure de la partie imaginaire et de la partie réelle de y , on peut aisément déduire C_o et R car R_o est en général mesurée à basse fréquence.

2.2. Fréquences quadrantales.

Ce sont les deux fréquences pour lesquelles le déphasage ϑ

de y est égal à $\pm \frac{\pi}{2}$ (fig. 3), d'où :

$$\text{Arg} y = \pm \frac{\pi}{2} = \pm \left[\pi - 2 \text{Arc} \text{tg} \frac{RC\omega_q}{1 - LC\omega_q^2} \right]. \quad (2-13)$$

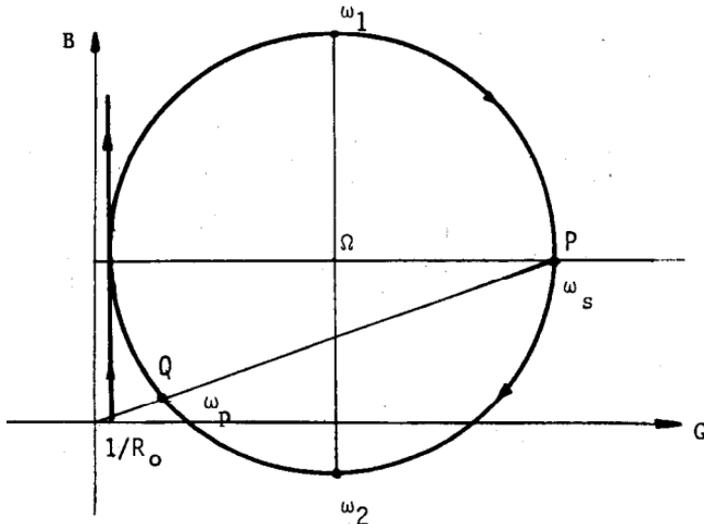


Fig. 3. — Diagramme d'admittance : Disposition des fréquences de résonance ω_s , ω_p et quadrantales (ω_1 et ω_2).

La résolution des deux relations (2-13) conduit à :

$$LC\omega_q^2 \pm RC\omega_q^2 - 1 = 0. \quad (2-14)$$

En conservant dans chaque cas les valeurs de $\omega_q > 0$, on a finalement :

$$\omega_{1,2} = \frac{\pm RC + \sqrt{R^2 C^2 + 4 LC}}{2 LC}. \quad (2-15)$$

Ou encore, compte tenu de l'équation (1-5) de définition du facteur de qualité du circuit :

$$\omega_{1,2} = \frac{R}{2L} \left[\pm 1 + \sqrt{1 + 4 Q_m^2} \right] \quad (2-16)$$

Si Q_m est grand, on a :

$$\omega_{1,2} \approx \frac{R}{2L} [\pm 1 + 2 Q_m]. \quad (2-17)$$

2.3. Résonance parallèle ou résonance de l'ensemble.

Considérons à nouveau Y dans laquelle on néglige $1/R_o$. Il vient :

$$Y = j C_o \omega + \frac{1}{R + j L \omega + \frac{1}{j C \omega}}. \quad (2-18)$$

Réduisons au même dénominateur, il vient :

$$Y = \frac{-C_o \omega \left[L \omega - \left(\frac{1}{C \omega} + \frac{1}{C_o \omega} \right) \right] + j R C_o \omega}{R + j \left(L \omega - \frac{1}{C \omega} \right)}. \quad (2-19)$$

Le numérateur de Y est minimal lorsque sa partie réelle s'annule. Soit ω_p la pulsation qui annule la partie réelle du numérateur de Y.

On a :

$$L \omega_p - \left(\frac{1}{C \omega_p} + \frac{1}{C_o \omega_p} \right) = 0 \quad (2-20)$$

que l'on peut encore écrire :

$$LC \omega_p^2 = \left(1 + \frac{C}{C_o} \right). \quad (2-21)$$

Mais, $LC\omega_s^2 = 1$, d'où :

$$\frac{\omega_p^2}{\omega_s^2} = 1 + \frac{C}{C_o} \quad \omega_p^2 = \omega_s^2 \left(1 + \frac{C}{C_o} \right) \quad (2-22)$$

ou, si on calcule C_o connaissant C , on obtient :

$$\frac{C}{C_o} = \frac{\omega_p^2 - \omega_s^2}{\omega_s^2} \quad (2-23)$$

ou encore :

$$\frac{C}{C_o} = \frac{f_p^2 - f_s^2}{f_s^2} \quad (2-24)$$

Si on exprime z au lieu de y , on obtient :

$$z = \frac{1}{y} = r + jx = \frac{R}{(1 - RC_o\omega Q_m \delta)^2 + R^2C_o^2\omega^2} + \dots \\ \dots j \frac{[Q_m \delta - RC_o\omega (1 + Q_m^2 \delta^2)]}{(1 - RC_o\omega Q_m \delta)^2 + R^2C_o^2\omega^2} R. \quad (2-25)$$

La partie réelle de z est maximale lorsque son dénominateur est minimal c'est-à-dire lorsque $1 - RC_o\omega Q_m \delta = 0$, ce qui donne finalement :

$$\omega_p^2 \neq \frac{1}{L} \frac{C + C_o}{CC_o} = \omega_s^2 \left[1 + \frac{C}{C_o} \right]. \quad (2-26)$$

Le calcul de la dérivée du dénominateur de l'expression de la partie réelle de z donne :

$$\omega_p^2 = \omega_s^2 \left[1 + \frac{C}{C_o} - \frac{1}{2Q_m^2} \right]. \quad (2-27)$$

Lorsque Q_m est grand, on retrouve l'expression simplifiée (2-26).

Si on trace dans le plan complexe le diagramme d'impédance, on aura aussi un cercle et pour ω_p le point représentatif sera le point Q. Ce point se trouve, dans le diagramme d'admittance, sur la droite OP. De même, le point P correspondant au maximum de la partie réelle d' y sera situé sur la droite OQ dans le diagramme d'impédance.

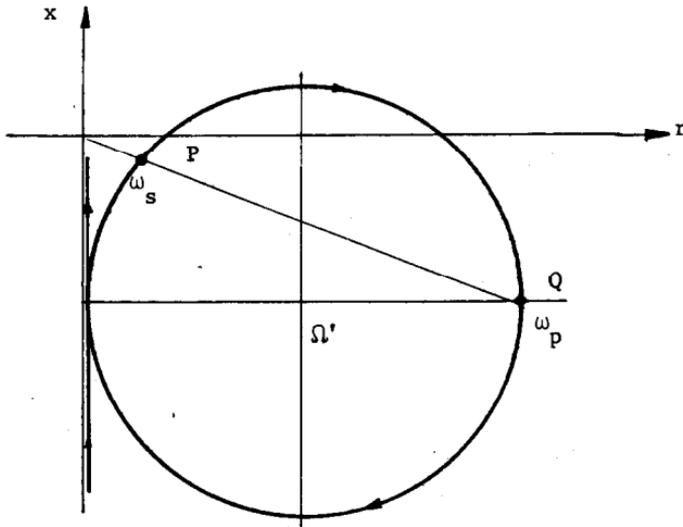


Fig. 4. — Disposition des fréquences de résonances série et parallèle sur le diagramme d'impédance.

III. ELEMENT VIBRANT AYANT UN FACTEUR DE QUALITE Q_M FAIBLE.

Dans ce cas, on ne peut plus assimiler les diagrammes d'impédance et d'admittance à des cercles [3].

On négligera encore l'influence du terme $1/R_o$. L'admittance du circuit s'écrit dans ces conditions :

$$Y = j C_o \omega + \frac{1}{R + j L \omega + \frac{1}{j C \omega}}$$

Transformons le dénominateur pour faire apparaître Q_m , il vient :

$$Y = R + j L \omega + \frac{1}{j C \omega} = R + j L \omega \frac{\omega_s}{\omega_s} + \frac{\omega_s}{C \omega_s \omega} \quad (3-1)$$

Soit :

$$Y = R \left[1 + j Q_m \left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right) \right] \quad (3-2)$$

Comme précédemment, posons :

$$\delta = \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \quad (1-6)$$

Y s'écrit :

$$Y = j C_o \omega + \frac{1}{R [1 + j Q_m \delta]} \quad (3-3)$$

Ce qui peut encore s'écrire, en séparant les parties réelles et imaginaires :

$$Y = \frac{1}{R (1 + \delta^2 Q_m^2)} + \left[C_o \omega - \frac{Q_m \delta}{1 + Q_m^2 \delta^2} \right] = G + j B. \quad (3-4)$$

Les parties réelles et imaginaires de Y sont donc :

$$G = \frac{1}{R [1 + Q_m^2 \delta^2]} \quad (3-5)$$

$$B = C_o \omega - \frac{Q_m \delta}{R [1 + Q_m^2 \delta^2]} \quad (3-6)$$

3.1. Etude de la partie réelle de Y.

La partie réelle de l'admittance est maximale lorsque $\delta = 0$, c'est-à-dire pour :

$$\frac{\omega_r}{\omega_s} - \frac{\omega_s}{\omega_r} = 0 \quad (3-7)$$

$$\omega_r^2 = \omega_s^2 = \frac{1}{LC} \quad (3-8)$$

Pour cette pulsation :

$$G = \frac{1}{R} \quad (3-9)$$

et :

$$B = C_o \omega_s.$$

Ce résultat a déjà été obtenu dans le cas des fortes valeurs de Q_m . Il est donc encore valable si Q_m est petit.

Le calcul de la dérivée de la partie réelle montre qu'elle ne s'annule que pour $\omega = \omega_r$. Par suite, il n'y a pas de seconde pulsation rendant minimale la partie réelle de l'admittance.

3.2. Etude de la partie imaginaire.

$$B = C_o \omega - \frac{Q_m \delta}{R [1 + Q_m^2 \delta^2]} \quad (3-6)$$

On peut écrire :

$$B = C_o \omega \frac{\omega_s \left[\frac{\omega}{\omega_s} - \frac{\omega_s}{\omega} \right]}{R \left[1 + Q_m^2 \left[\frac{\omega}{\omega_s} - \frac{\omega_s}{\omega} \right]^2 \right]} \quad (3-10)$$

Développons la valeur de B par rapport à :

$$u = \frac{\omega}{\omega_s}, \quad (3-11)$$

soit encore :

$$B = C_o \omega_s u \frac{Q_m u^{-1} [u^2 - 1]}{R [1 + Q_m^2 u^{-2} [u^2 - 1]^2]}, \quad (3-12)$$

soit finalement :

$$B = C_o \omega_s u \left[1 - q \frac{u^2 - 1}{u^2 + Q_m^2 (u^2 - 1)^2} \right] \quad (3-13)$$

avec :

$$q = \frac{Q_m}{RC_o \omega_s} = \frac{Q_m}{RC_o \omega_s} \frac{C}{C} \text{ soit } q = Q_m^2 \frac{C}{C_o} \quad (3-14)$$

La partie imaginaire de l'admittance s'annule lorsque le crochet devient égal à zéro. La résolution directe de la relation (3-13) est très lourde et donne :

$$u^2 + Q_m^2 (u^2 - 1)^2 = q (u^2 - 1). \quad (3-15)$$

Effectuons le changement de variable :

$$v^2 = u^2 - 1 \quad \text{ou} \quad u^2 = 1 + v^2.$$

Il vient :

$$qv^2 = v^2 + 1 + Q_m^2 v^4$$

soit encore :

$$v^4 + v^2 \left(\frac{1 - q}{Q_m^2} \right) + \frac{1}{Q_m^2} = 0. \quad (3-16)$$

On obtient une expression bicarrée dont les racines sont :

$$v_{1,2}^2 = \frac{q - 1}{2 Q_m^2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1 - q}{Q_m^2} \right)^2 - \frac{4}{Q_m^2}} \quad (3-17)$$

Ici les deux solutions ont un sens physique. En revenant en u , on obtient :

$$u^2 = v^2 + 1$$

soit :

$$u^2 = \frac{q-1+2Q_m^2}{2Q_m^2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1-q}{Q_m^2}\right)^2 - \frac{4}{Q_m^2}} \quad (3-18)$$

Pour que la relation (3-18) ait un sens, il faut que le second membre soit positif ou nul. D'où :

$$\frac{q-1+2Q_m^2}{2Q_m^2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1-q}{Q_m^2}\right)^2 - \frac{4}{Q_m^2}} \geq 0 \quad (3-19)$$

Le cas du signe - conduit à :

$$\frac{q}{Q_m^2} + 1 > 0. \quad (3-20)$$

Le cas du signe + conduit à la relation :

$$k^2 \leq \frac{2Q_m^2 - 1}{Q_m^2 - 1}. \quad (3-21)$$

La relation (3-20) est toujours vérifiée. Par contre (3-17) qui donne v^2 peut ne pas être vérifiée si :

$$\frac{q-1}{2Q_m^2} < 0. \quad (3-22)$$

Cette relation devient, en tenant compte de la valeur de :

$$q = Q_m^2 \frac{C}{C_o} \quad (3-14) : \frac{C}{C_o} \leq \frac{1}{Q_m^2}. \quad (3-23)$$

Mais on montre que l'on peut exprimer $\frac{C}{C_o}$ par la relation :

$$\frac{C}{C_o} = \frac{k^2}{1-k^2} \quad (1-1) \quad \text{d'où :} \quad \frac{k^2}{1-k^2} \leq \frac{1}{Q_m^2}. \quad (3-24)$$

Si la relation (3-24) est vérifiée, v^2 n'a plus de sens, donc u non plus. Mais $u = \frac{\omega}{\omega_s}$ représente la pulsation réduite.

La relation (3-24) montre que si elle est vérifiée, le cercle (ou la boucle d'admittance) ne coupe plus l'axe réel. Elle est par

suite située entièrement au-dessus de l'axe réel. La boucle vient tangenter l'axe réel lorsque on a l'égalité stricte c'est-à-dire :

$$\frac{k_{lim}^2}{1 - k_{lim}^2} = \frac{1}{Q_m^2}. \quad (3-25)$$

Les relations (3-24) et (3-25) lient le facteur de qualité et le coefficient de couplage limite k_{lim} .

Supposons $Q_m = 10$, la relation (3-25) donne la valeur maximale de k_{lim} au-dessus de laquelle la boucle ne coupera plus l'axe réel, d'où :

$$k_{lim} = \frac{1}{1 + Q_m^2}.$$

Avec la valeur de Q_m fixée, on trouve :

$$k_{lim} = \frac{1}{101} = 0,0995$$

- si $k < k_{lim}$: pas intersection,
 $k = k_{lim}$: tangence,
 $k > k_{lim}$: deux points d'intersection.

Il faut remarquer que la relation (3-24) a été établie sans tenir compte de la valeur plus ou moins élevée de Q_m . Par suite, les relations précédentes sont très générales.

Recherchons maintenant pour quelles valeurs de la pulsation ω , la partie réelle de y est égale à la moitié de la partie réelle maximale. Pour cela, on va utiliser le changement d'origine qui va nous amener en Ω au centre de la boucle (fig. 5).

La relation (2-6) donnant la nouvelle écriture de l'admittance est :

$$y = -\frac{1}{2R} \frac{[1 - LC\omega^2 - jRC\omega]}{[1 - LC\omega^2 + jRC\omega]} + jC_o(\omega - \omega_s). \quad (2-6)$$

En multipliant le dénominateur du premier terme par sa quantité conjuguée et en séparant les parties réelles et imaginaires, on a :

$$y = -\frac{1}{2R} \frac{(1 - LC\omega^2)^2 - R^2C^2\omega^2}{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2} - \frac{2j(1 - LC\omega^2)RC\omega}{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2} \dots$$

$$\dots + jC_o(\omega - \omega_s) \quad (3-26)$$

ou encore : $y = a + jb$.

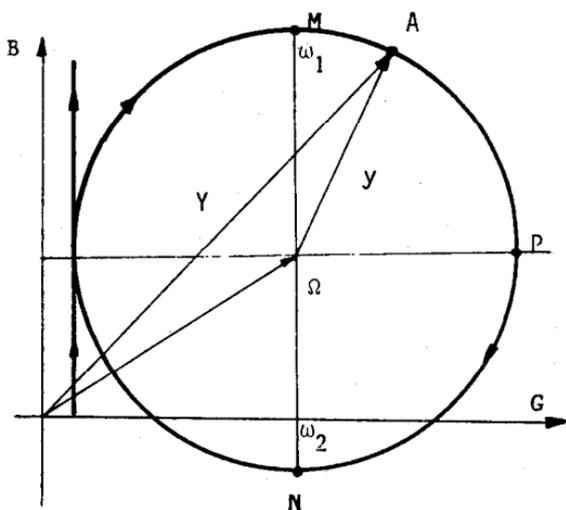


Fig. 5. — Détermination des pulsations ω_1 et ω_2 pour lesquelles la partie réelle de Y est égale à $1/2 R$.

Mais en M et en N , y est imaginaire pure. Par suite, sa partie réelle est nulle, d'où : $a = 0$, avec :

$$a = -\frac{1}{2R} \frac{(1 - LC\omega^2)^2 - R^2C^2\omega^2}{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}. \quad (3-27)$$

On en déduit alors que :

$$(1 - LC\omega^2)^2 - R^2C^2\omega^2 = 0,$$

ce qui donne finalement :

$$LC\omega^2 \pm RC\omega - 1 = 0. \quad (3-28)$$

Les deux solutions de (3-28) compatibles avec $\omega > 0$ sont :

$$\omega_{1,2} = \frac{\pm RC + \sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC} \quad (3-29)$$

que l'on peut encore écrire :

$$\omega_{1,2} = \frac{R}{2L} [\pm 1 + \sqrt{1 + 4Q_m^2}]. \quad (3-30)$$

La relation (3-30) est identique à la relation (2-17) établie dans le cas où Q_m est grand.

La relation (3-27) a été établie en annulant la partie réelle de y , elle n'indique pas que sa partie imaginaire soit maximale ou minimale. De la mesure de ω_1 et ω_2 on pourra déduire la valeur de Q_m . Pour cela, effectuons le rapport ω_1/ω_2 , il vient :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 Q_m^2}}{1 + \sqrt{1 + 4 Q_m^2}}. \quad (3-31)$$

En résolvant (3-31) par rapport à Q_m , on obtient :

$$Q_m^2 = \frac{1}{4} \left[\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \right]^2 - 1 \right] \quad (3-32)$$

Développons la différence des carrés. Il vient :

$$Q_m^2 = \frac{1}{4} \left[\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{\Delta\omega} \right] - 1 \right] \left[\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{\Delta\omega} \right] + 1 \right]$$

avec : $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, d'où :

$$Q_m^2 = \frac{1}{4} \left[\frac{(2\omega_1 + \Delta\omega)}{\Delta\omega} - 1 \right] \left[\frac{(2\omega_1 + \Delta\omega)}{\Delta\omega} + 1 \right].$$

D'où finalement :

$$\boxed{Q_m^2 = \frac{\omega_1 \omega_2}{\Delta\omega^2}} \quad (3-33)$$

Ce qui donne aussi :

$$\boxed{Q_m^2 = \left(\frac{\omega_1}{\Delta\omega} \right)^2 \left[1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_1} \right]} \quad (3-34)$$

La relation (3-34) est générale et par conséquent valable quelque soit la valeur du facteur de qualité du transducteur. Toutefois, la procédure de mesure est un peu différente de celle que l'on a coutume de faire.

IV. PROCEDURE DE MESURE DES FAIBLES FACTEURS DE QUALITE.

On doit tout d'abord disposer d'un appareil qui fournit séparément la partie réelle et la partie imaginaire d'une impédance ou d'une admittance.

La procédure de mesure Q_m est alors la suivante :

a) On mesure dans un premier essai la fréquence f_s qui rend maximale la partie réelle de y . Pour cette pulsation, on mesure aussi la valeur de la partie imaginaire. On en déduit alors à partir de la relation (2-12) les valeurs de R et C_o .

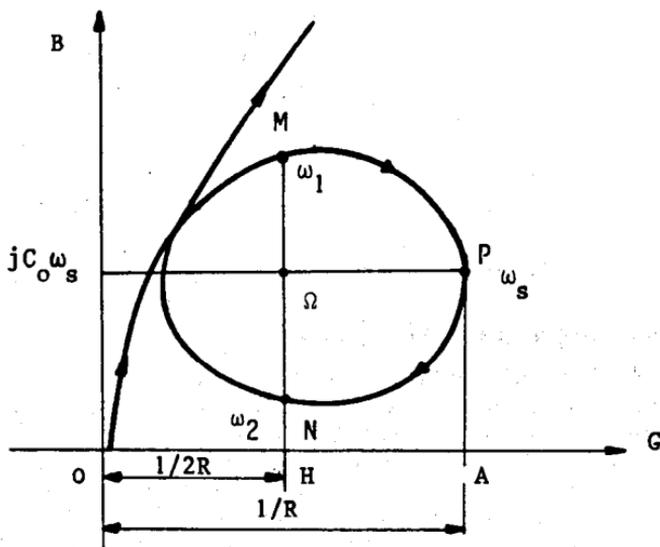


Fig. 6. — Détermination pratique des paramètres du schéma équivalent d'un transducteur.

On mesure également la fréquence f_p qui rend maximale la partie réelle de z .

En effet, soit OA la valeur maximale de la partie réelle de y . On a sensiblement $OA = 1/2 R$ en négligeant R_o qui est toujours très grand, d'où $R = OA/2$.

La partie imaginaire pour ω_s est égale à AP avec $AP = C_o \omega_s$, d'où :

$$C_o = \frac{AP}{\omega_s}$$

b) On mesure ensuite les fréquences f_1 et f_2 lorsqu'on se place à $OA/2$ c'est-à-dire aux points M et N .

En utilisant la relation (3-35), on obtient Q_m . Mais :

$$Q_m = \frac{L\omega_s}{R} \quad \text{avec} \quad \omega_s = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

d'où :

$$L = \frac{RQ_m}{\omega_s}$$

et :

$$C = \frac{1}{L\omega_s^2}$$

V. PRECISION SUR LES RESULTATS.

Afin de déterminer l'erreur commise par la procédure classique lors de la mesure des paramètres du transducteur, nous avons effectué une simulation, sur un microcalculateur du schéma électrique donnée fig. 1. On peut alors fixer les valeurs de C_0 , C , L par exemple et faire varier Q_m par l'intermédiaire de R . Le calculateur détermine tous les points de la courbe d'admittance et recalcule ensuite la bande passante à 3 dB pour évaluer le facteur de qualité selon la méthode classique. Il calcule également Q_m par la méthode proposée (correspondant à la moitié de la partie réelle maximale).

Le tableau ci-après donne pour Q_m variant de 1 à 100 l'erreur relative de chaque méthode de mesure.

Q_m	5	10	20	100
Méthode classique à -3 dB	# 50 %	32 %	16 %	2 %
Méthode proposée .	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}

Il est à remarquer que la méthode à moins trois décibels (ou à moins un décibel quand Q_m est ≤ 15) conduit toujours à des valeurs de Q_m plus petites que la valeur vraie (6,8 pour 10 par exemple).

BIBLIOGRAPHIE

-
- [1] D. A. BERLINCOURT, D. R. CURRAN, H. JAFFE. — *Piezoelectric and Piezomagnetic Materials and their Function in Transducers*. Physical Acoustics. Vol. 1. Part. A. Edité par W. P. Mason, Academic Press, 1964.
- [2] M. BRISSAUD. — *Conversion électromécanique*. Applications sous-marines. I.N.S.A., 1975.
- [3] M. BRISSAUD. — *Détermination du facteur de qualité des éléments vibrants*. Rapport interne. I.N.S.A., 1980.
- [4] I R E. — *Standards on Piezoelectric ; Measurements of Piezoelectric Ceramics*, 1961.
- [5] L. EYRAUD, M. BRISSAUD. — *Les matériaux piézoélectriques nouveaux et leurs applications récentes dans le cadre du Génie Bio-Médical*. B.U.P. n° 607, juillet 1978.
- [6] L. E. KINSLER, A. R. FREY. — *Fundamentals of Acoustics*. J. Wiley, 1962.
- [7] P. ALAIS, A. F. METHERELL. — *Acoustical Imaging*. Vol. 10. Plenum Press, 1982.
-

ANNEXES

I. DEFINITION DU BEL ET DU DECIBEL.

Le bel (B) est une unité sans dimension exprimant le rapport de deux grandeurs de même nature. Pour les grandeurs P énergétiques, l'écart en bels entre P_1 et P_2 est par définition le logarithme décimal du rapport P_1/P_2 . Un rapport dix correspond ainsi à un écart de un bel et un rapport 10^x à un écart de x bel.

Dans la pratique, on utilise plutôt le décibel (dB) : 1 dB = 0,1 B. L'écart x mesuré en dB entre P_1 et P_2 est alors défini par :

$$x(\text{dB}) = 10 \log \frac{P_1}{P_2}.$$

Un décibel correspond à un rapport de $10^{0,1} = 1,259$. A un rapport de 2, il correspond un écart $10 \log 2 \approx 3$ dB. Pour les grandeurs G telles que l'intensité du courant dans une résistance où la tension à ses bornes ou encore, la surpression et l'amplitude d'une onde sonore qui sont proportionnelles à la racine carrée de la grandeur énergétique P , l'écart en dB sera :

$$x(\text{dB}) = 20 \log \frac{G_1}{G_2}.$$

On utilise également le neper qui est défini à partir des logarithmes naturels (ou neperiens). L'écart entre deux grandeurs énergétiques est défini par :

$$x(\text{neper}) = \ln \frac{P_1}{P_2}.$$

Il en résulte que 1 neper = 8,686 dB.

II. DEFINITION DE LA BANDE PASSANTE.

Soit $P(\nu)$ la réponse en puissance d'un système S en fonction de la fréquence ν . Si P_M est le maximum de $P(\nu)$, la bande passante à x bels de S est l'intervalle (ν_1, ν_2) dans lequel P reste

supérieure à $\frac{P_M}{n}$ avec $\log n = x$.

Une bande passante à 3 dB correspond à un rapport 2 de grandeurs énergétiques. Dans le cas de la réponse en intensité d'un dipôle RLC série (résonance d'intensité), les limites de la bande passante habituellement utilisée correspondent à $I_M/\sqrt{2}$ puisque la grandeur énergétique est proportionnelle à I^2 .