

Module pour l'étude et l'analyse des phénomènes transitoires dans les circuits RC, RL et RLC

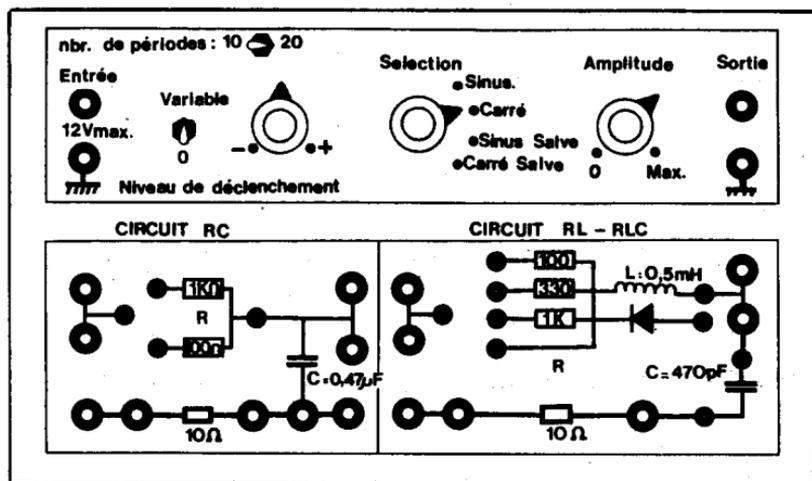
par R. LAAGEL et M. LEHMANN,

Institut Universitaire de Haute-Alsace, Mulhouse.

L'étude expérimentale en régime transitoire des circuits électriques consiste principalement en deux cas particuliers :

- réponse à un échelon de tension,
- réponse à mise sous tension sinusoïdale.

Dans un article paru précédemment (*), cette étude se faisait à l'aide d'un micro-ordinateur associé à un convertisseur analogique digital. Ce montage permettait la mémorisation et l'analyse d'un phénomène unique.



Face avant du module d'étude des transitoires.

(*) B.U.P. n° 672, mars 1985, p. 781 : « Etude expérimentale des régimes transitoires dans les circuits R-C, R-L et R-L-C à l'aide d'un micro-ordinateur », par Claude RABALLAND.

A l'aide du module proposé, on rend récurrent le régime transitoire qui peut être ainsi facilement visualisé sur un oscilloscope conventionnel. Cette méthode a l'avantage de permettre l'observation en temps réel de l'influence des divers paramètres qui régissent le régime transitoire.

Le module complet comprend trois parties essentielles (schéma en annexe) :

- une partie générant quatre formes d'ondes caractéristiques ;
- les circuits étudiés les plus courants : RC, RL et RLC ;
- une alimentation, rendant l'ensemble autonome à partir du secteur.

1. DESCRIPTION DE LA PARTIE GENERATEUR D'ONDES CARACTERISTIQUES, DU MODULE.

1.1. Utilisation et performances.

L'entrée du module doit être connectée à un générateur délivrant une tension sinusoïdale de 1 à 10 V_{eff} et de fréquence variant au moins entre 20 Hz et 400 kHz.

A partir du générateur sinusoïdal, le module délivre les tensions suivantes :

- tension sinusoïdale en régime continu, disponible sous faible impédance (10 ohms - 20 V càc maximum) ;
- tension rectangulaire en régime permanent, avec possibilité de réglage du rapport cyclique (0,25 à 0,75) ;
- salve de sinusoïdes, avec possibilité de réglage de l'instant d'enclenchement entre $-T/4$ et $T/4$;
- salve d'impulsions, avec possibilité de réglage du rapport cyclique.

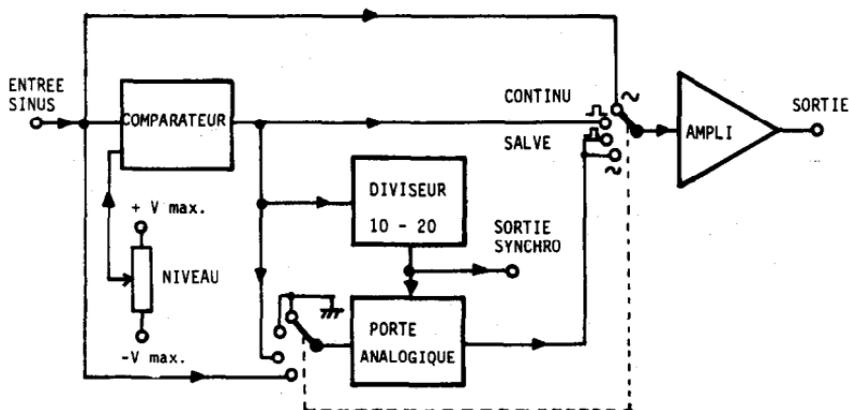
Chaque type de salve comporte 10 ou 20 périodes, rendant ainsi possible l'observation des phénomènes transitoires jusqu'à l'établissement du régime permanent.

2. PRINCIPE DU GENERATEUR D'ONDES CARACTERISTIQUES.

En régime salve, le découpage est fait par une porte analogique. Le signal de commande de la porte est issu d'un diviseur de fréquence pouvant sélectionner 10 ou 20 impulsions provenant d'un comparateur qui transforme la sinusoïde d'entrée en signal rectangulaire à rapport cyclique réglable.

En régime permanent, la porte analogique est déconnectée :

- le signal rectangulaire provient directement de la sortie du comparateur ;



Bloc diagramme du générateur d'ondes caractéristiques.

— le signal sinusoïdal est celui délivré par le générateur connecté à l'entrée du montage.

Un amplificateur de gain unité permet de disposer des signaux décrits sous basse impédance. L'amplitude du signal de sortie est réglable par un potentiomètre de zéro à 10 volts crêtes.

Un signal de synchronisation est prévu pour déclencher le balayage de l'oscilloscope lors de l'utilisation du module en mode « SALVE ».

3. EXEMPLES D'UTILISATION.

3.1. Possibilités d'expérimentation du module d'étude de transitoires.

Les possibilités d'expérimentation du module sont très étendues. Pour limiter la longueur de l'exposé, on s'est borné à l'étude des circuits RC et RLC dans les cas les plus démonstratifs.

En intégrant les équations différentielles, la solution permet de calculer la forme des tensions à obtenir, en réponse à une excitation donnée. On observera dans la suite de l'exposé l'accord entre l'expérimentation et le calcul théorique.

3.2. Analogie des circuits RL et RC série.

Du fait de l'analogie entre les circuits RC et RL, on a limité l'étude présentée ci-après au circuit RC. On peut en effet, montrer l'analogie entre ces deux circuits de la façon suivante :

il vient :

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2a \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v = \omega_0^2 e(t).$$

L'équation différentielle sera étudiée dans le cas correspondant au régime oscillatoire amorti, avec les conditions initiales suivantes :

$$\text{à } t = 0 \quad v(t) = 0 \quad \text{et} \quad i(t) = 0.$$

Le module d'étude permet d'observer la réponse du circuit pour deux types de signaux d'attaque :

- échelon de tension $e(t) = E$,
- tension sinusoïdale, $e(t) = E \sin(\omega_1 t + \varphi)$.

4.2.1. TENSION D'ATTAQUE : $e(t) = E$.

La réponse d'un circuit RLC série à un échelon de tension est une question classique traitée dans tous les manuels.

Rappel de la solution :

$$v(t) = E \left[1 - \frac{\omega_0}{\omega} e^{-at} \cos(\omega t - \beta) \right]$$

avec :

$$\omega^2 = \omega_0^2 - a^2 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

$$\beta = \text{Arc tg } \frac{a}{\omega} = \text{Arc tg } \frac{R/2L}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} = \dots$$

$$\dots \text{Arc tg } \frac{1}{\sqrt{\frac{4L}{R^2C} - 1}}$$

Observation expérimentale : $R_{total} = 10 + 0,5$ (générateur : 10Ω) ; $C = 5,17 \text{ nF}$ ($4700 + 470 \text{ pF}$) (fig. 9).

Le signal observé est conforme au calcul théorique : il apparaît une sinusoïde amortie aux bornes du condensateur. Le signal tend vers une valeur constante comme le prévoit la limite de $v(t)$ quand t devient très grand.

L'exponentielle enveloppe de la sinusoïde a pour expression e^{-at} . Le décrement logarithmique déterminé expérimentalement est :

Remarque.

Si L , C et R_1 sont déterminés, il suffira d'ajuster R_2 .

4. ETUDE DES CIRCUITS RC ET RLC A L'AIDE DU MODULE PROPOSE.**4.1. Circuit RC ($R = 100 \Omega$ $C = 0,47 \mu\text{F}$).****4.1.1. TENSION D'ATTAQUE $e(t) = E$ (ÉCHELON).****4.1.1.1. Tension aux bornes du condensateur C .**

La solution est $u = E [1 - \exp(-t/RC)]$.

La charge exponentielle du condensateur s'observe à l'oscilloscope selon la méthode habituelle.

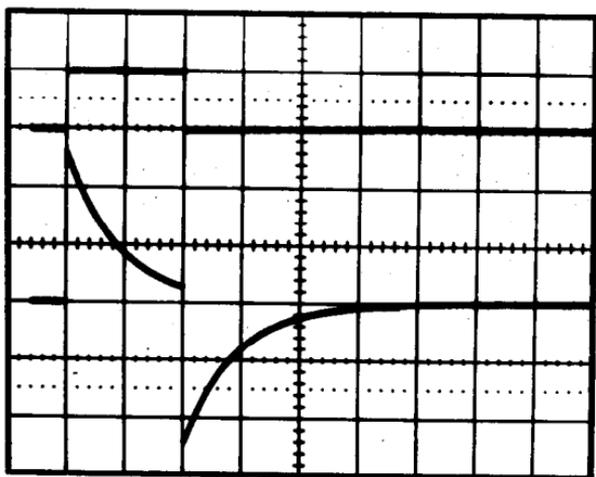
4.1.1.2. Tension aux bornes de la résistance R .

Fig. 1. — Réponse à une impulsion.

Y_1 (sup.) : 5 V/div; Y_2 (inf.) : 2 V/div.

B.d.T. : 50 $\mu\text{s}/\text{div}$.

Voir fig. 1. La durée de l'impulsion est de 100 μs alors que la constante de temps est de 47 μs .

On observe qu'au bout de 100 μs , le courant n'est pas encore nul dans le circuit, alors que pour la décharge du condensateur, le courant sera pratiquement nul au bout de 150 μs .

4.1.2. LA TENSION D'ATTAQUE EST CONSTITUÉE PAR DES IMPULSIONS RECTANGULAIRES.**4.1.2.1. Tension aux bornes du condensateur C (fig. 2 et 3).**

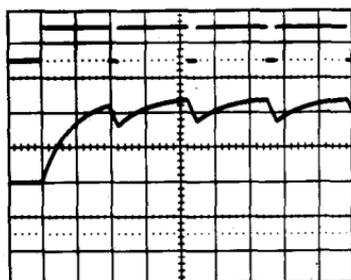


Fig. 2. — Réponse en régime d'impulsions.
 Y_1 (sup.) : 5 V/div ; Y_2 (inf.) : 2 V/div.
 B.d.T. : 50 μ s/div.

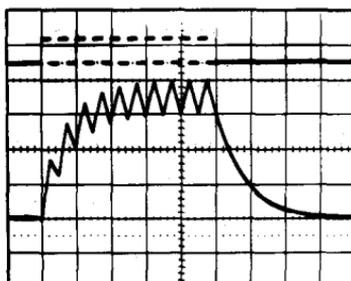


Fig. 3. — Réponse en régime d'impulsions.
 Y_1 (sup.) : 5 V/div ; Y_2 (inf.) : 0,5 V/div.
 B.d.T. : 50 μ s/div.

L'observation du signal obtenu met en évidence l'existence d'une période transitoire plus ou moins longue selon le rapport cyclique du signal d'attaque, pour un produit RC constant.

Caractéristiques de l'expérience (fig. 2) :

$$R = 100 \Omega \quad C = 0,47 \mu\text{F.}$$

Période des impulsions : $T = 113 \mu\text{s}$
 Largeur des impulsions (positives) : $T_1 = 97 \mu\text{s}$
 Hauteur des impulsions : 5 volts.

En calculant u en fonction du temps, on obtient :

t (μs)	0	97	113	210	226	323	339	436	452
u_2 (V)	0	4,36	3,10	4,76	3,39	4,80	3,41	4,80	3,41

Au bout de 226 μs (soit 5 constantes de temps), le phénomène a atteint le régime permanent ; c'est bien ce que l'on observe sur l'oscillogramme.

Sur la fig. 3, le phénomène transitoire est mieux mis en évidence. Le circuit n'est pas modifié. La largeur des impulsions est de 25 μ s et leur hauteur de 3,5 V (rapport cyclique : 1/2).

4.1.2.2. Tension aux bornes de la résistance R (fig. 4).

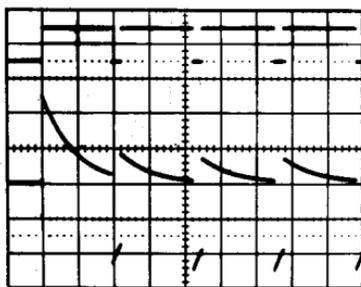


Fig. 4. — Réponse aux bornes de R en régime d'impulsions.

Y_1 (sup.) : 5 V/div; Y_2 (inf.) : 2 V/div.
B.d.T. : 50 μ s/div.

La tension d'attaque est la même qu'en 4.1.2. (fig. 2). On observe une tension proportionnelle au courant dans le circuit et on note que le régime permanent est atteint également après un temps de l'ordre de 5 constantes de temps.

4.1.3. TENSION D'ATTAQUE $e(t) = E \sin(\omega t + \varphi)$.

4.1.3.1. Tension aux bornes du condensateur C.

$$u + RC \frac{du}{dt} = E \sin(\omega t + \varphi).$$

Condition initiale : $u = 0$ à $t = 0$.

En posant $\alpha = \text{Arc tg } \frac{1}{RC\omega}$, il vient, après intégration :

$$u(t) = E \sin \alpha \left[\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \cos(\varphi + \alpha) - \cos(\omega t + \varphi + \alpha) \right].$$

On remarquera que pour $t = 0$, la tension $u(t)$ est nulle quels que soient φ et α .

Observations expérimentales : $R = 100 \Omega$; $C = 0,47 \mu\text{F}$ (fig. 5.1.).

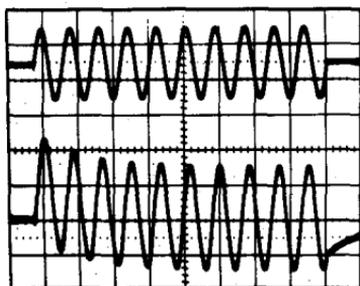


Fig. 5.1. — Réponse aux bornes de C en régime sinusoïdal.

Y_1 (sup) : 2 V/div ; Y_2 (inf.) : 0,2 V/div.
B.d.T. : 40 μ s/div.

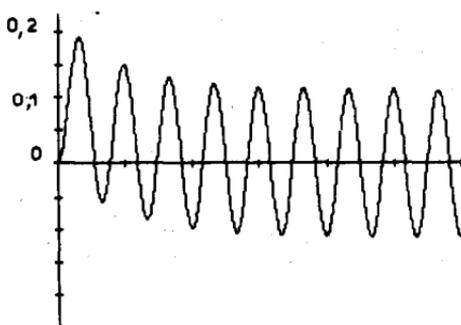


Fig. 5.2. — Réponse calculée avec les valeurs correspondant à l'expérimentation ($f = 30$ kHz). Pour le calcul, $E = 1$ volt.

Graduation verticale : 0,05 V/div.

Graduation horizontale : 50 μ s/div.

Pour $\varphi = 0$, on observe sur la figure que la tension sinusoïdale s'établit autour d'une valeur moyenne qui tend exponentiellement vers zéro avec une constante de temps $\tau = 47$ μ s. Après 176 μ s (soit pratiquement 4 constantes de temps), le régime permanent est atteint.

Le tracé théorique (fig. 5.2) est confirmé par l'expérimentation.

Sur la fig. 6, on remarquera que la tension aux bornes du condensateur semble s'établir sans période transitoire suivant la loi $u(t) = E \sin \alpha \sin \omega t$. Ceci implique que, dans l'expression de $u(t)$, on ait :

$$\varphi + \alpha = \frac{\pi}{2}$$

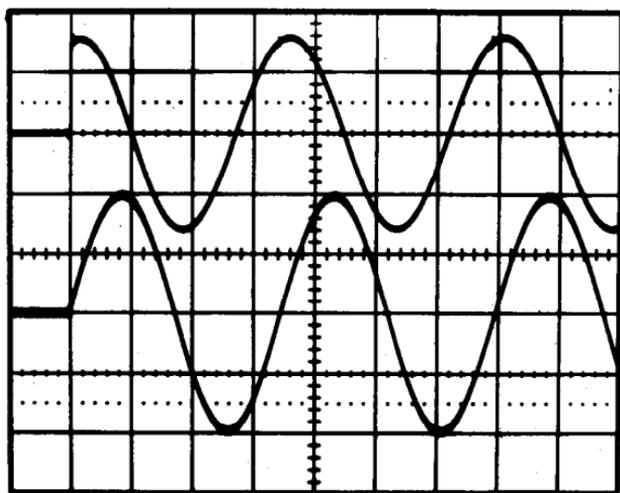


Fig. 6. — Réponse aux bornes de C en régime sinusoïdal, pour un réglage particulier de φ .

Y_1 (sup.) : 0,5 V/div ; Y_2 (inf.) : 0,1 V/div.
B.d.T. : 20 μ s/div.

$$u(t) = E \sin \alpha \left[-\cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right] = E \sin \alpha \sin \omega t \text{ soit}$$

aussi, compte tenu de $\text{tg } \alpha$:

$$u(t) = \frac{E}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \sin \omega t.$$

La solution ne comporte plus de terme correspondant au régime transitoire.

Lors d'une expérimentation à 14 kHz, on a obtenu :

$$RC\omega = 4,548 \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + 4,548^2}} = 0,215$$

$$\alpha \simeq 12,4^\circ \quad \varphi \simeq 90 - \alpha = 77,6^\circ.$$

A l'aide des oscillogrammes, on détermine :

- une atténuation égale à 0,24 au lieu de 0,215 ;
- un déphasage de 75° au lieu de $77,6^\circ$ (3,5 % d'écart).

L'écart relativement important (12 %) observé sur l'atténuation provient essentiellement de la résistance de 10 Ω en série

avec le circuit RC. Cette résistance sert à l'observation d'une tension proportionnelle au courant. Après correction, l'atténuation est égale à 0,233, soit un écart de 3 %.

L'expérimentation vérifie l'analyse théorique à 3 % près.

D'une façon plus générale, à l'instant $t = 0$, quelle que soit la valeur de $\varphi + \alpha$, la tension aux bornes du condensateur est :

$$u(t = 0) = E \sin \alpha [\cos(\varphi + \alpha) - \cos(\varphi + \alpha)] = 0.$$

Il n'y a jamais de discontinuité de tension aux bornes du condensateur, même pour $\varphi = 90^\circ$.

Remarque.

Nous avons montré au paragraphe 3.2. les conditions d'équivalence des circuits RC et RL. Il en résulte que l'expression de la tension observée aux bornes du condensateur correspond à l'image du courant dans l'inductance du circuit RL en série.

Au vu des exemples précédents (fig. 6 et 5.1.), on peut conclure que pour établir un courant sinusoïdal dans un circuit inductif (transformateur à vide) sans pointe d'intensité, il faut enclencher le circuit quand la tension est voisine du maximum.

4.1.3.2. Tension aux bornes de la résistance R.

Soit $v(t)$ la tension aux bornes de R. On a vu précédemment que :

$$v(t) = RC \frac{du}{dt}$$

d'où :

$$v(t) = E \left[-\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \sin \alpha \cos(\varphi + \alpha) + \cos \alpha \sin(\omega t + \varphi + \alpha) \right].$$

Cette tension représente l'image du courant dans le circuit RC série, ou de la tension aux bornes de l'inductance dans le circuit RL en série.

Pour $t = 0$; $v(t = 0) = E \sin \varphi$ quelles que soient les valeurs de φ et de α .

Observations expérimentales : $R = 100 \Omega$; $C = 0,47 \mu\text{F}$.
Fréquence du générateur : 480 Hz.

La fig. 7.1. représente une tension proportionnelle au courant dans le circuit pour $\varphi = 0^\circ$. Pour ce cas particulier, on a $v(t = 0) = 0$ tandis que, pour toute autre valeur de φ , on

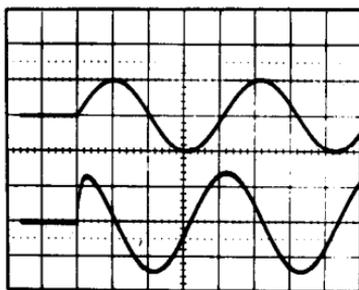


Fig. 7.1. — Réponse aux bornes de R en régime sinusoïdal pour $\varphi = 0^\circ$.
 Y_1 (sup.) : 2 V/div ; Y_2 (inf.) : 0,2 V/div.
 B.d.T. : 0,5 ms/div.

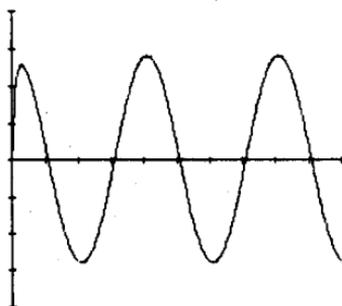


Fig. 7.2. — Réponse calculée avec les valeurs correspondant à l'expérimentation.
 Pour le calcul : $E = 1$ volt.
 Graduation verticale : 0,05 V/div.

observe une discontinuité aux bornes de R. La tension $v(t)$ prend naissance suivant une loi exponentielle.

La durée du phénomène transitoire (constante de temps : $47 \mu\text{s}$) est brève vis-à-vis de la période de la sinusoïde appliquée ($T = 2083 \mu\text{s}$).

Pour $\varphi = 0$:

$$v(t) = E \cos \alpha \left[-\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \sin \alpha + \sin(\omega t + \alpha) \right]$$

$$\alpha = \text{Arc tg} \left(\frac{1}{RC\omega} \right) = \text{Arc tg} \frac{1}{7,05} = 81,9^\circ$$

$$\sin \alpha = 0,990 ; \quad RC = 47 \mu\text{s}.$$

Cette expression de $v(t)$ peut s'écrire approximativement :

$$v(t) \simeq E \cos \alpha \left[-\exp\left(-\frac{t}{47}\right) + \sin\left(\frac{360 t}{2083} + 81,9\right) \right].$$

Le temps t est exprimé en microsecondes.

Pour t variant de 0 à 141 μ s (3 constantes de temps), le terme en sinus varie d'environ 3 % depuis la valeur 1. D'où une expression approchée de $v(t)$, valable durant les 140 premières microsecondes après le début du phénomène :

$$v(t) \simeq E \cos \alpha \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right].$$

Ceci correspond effectivement au signal observé : lors de l'établissement de $v(t)$, le déphasage, entre la tension sinusoïdale appliquée et le courant dans le circuit RC série, subit une transition rapide de 0 à environ $\pi/2$. Ce phénomène est d'autant plus visible que la période de la sinusoïde est grande vis-à-vis de la constante de temps et que l'enclenchement se fait au voisinage de $\varphi = 0^\circ$.

La fig. 8.1. représente $v(t)$ pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

L'expression de $v(t)$ devient dans ce cas :

$$v(t) = E \left[\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \sin^2 \alpha + \cos \alpha \cos(\omega t + \alpha) \right].$$

Pour $t = 0$, on a $v(t = 0) = E$.

Le courant dans le circuit est alors égal à $\frac{E}{R}$.

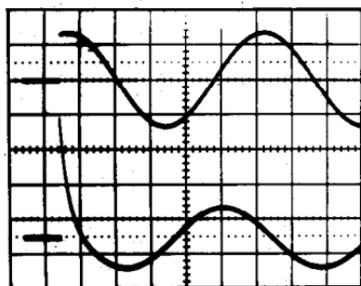


Fig. 8.1. — Réponse aux bornes de R en régime sinusoïdal, $\varphi \simeq 85^\circ$.

Y_1 (sup.) : 0,5 V/div ; Y_2 (inf.) : 0,2 V/div.

B.d.T. : 0,2 ms/div.

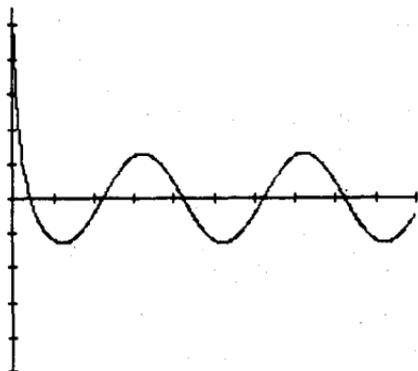


Fig. 8.2. — Réponse calculée (aux bornes de R) avec les valeurs correspondant à l'expérimentation.

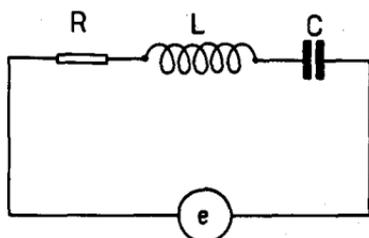
Pour le calcul : $E = 1$ volt.

Graduation verticale : $0,2$ V/div.

Pour un enclenchement au voisinage du maximum ($\varphi = \pi/2$), il se produit, en plus de la transition de phase précédente, une forte pointe de courant transitoire.

Ce phénomène trouve son application lors de la connection d'une batterie de condensateurs pour relever le facteur de puissance d'une installation électrique. Il est nécessaire de prévoir une résistance limitant le courant transitoire.

4.2. Circuit RLC série.



Soient v la tension aux bornes du condensateur et i le courant dans le circuit :

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = e \quad i = C \frac{dv}{dt}$$

En posant :

$$a = \frac{R}{2L} \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

il vient :

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2a \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v = \omega_0^2 e(t).$$

L'équation différentielle sera étudiée dans le cas correspondant au régime oscillatoire amorti, avec les conditions initiales suivantes :

$$\text{à } t = 0 \quad v(t) = 0 \quad \text{et} \quad i(t) = 0.$$

Le module d'étude permet d'observer la réponse du circuit pour deux types de signaux d'attaque :

- échelon de tension $e(t) = E$,
- tension sinusoïdale, $e(t) = E \sin(\omega_1 t + \varphi)$.

4.2.1. TENSION D'ATTAQUE : $e(t) = E$.

La réponse d'un circuit RLC série à un échelon de tension est une question classique traitée dans tous les manuels.

Rappel de la solution :

$$v(t) = E \left[1 - \frac{\omega_0}{\omega} e^{-at} \cos(\omega t - \beta) \right]$$

avec :

$$\omega^2 = \omega_0^2 - a^2 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

$$\beta = \text{Arc tg } \frac{a}{\omega} = \text{Arc tg } \frac{R/2L}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} = \dots$$

$$\dots \text{Arc tg } \frac{1}{\sqrt{\frac{4L}{R^2C} - 1}}$$

Observation expérimentale : $R_{\text{total}} = 10 + 0,5$ (générateur : 10Ω) ; $C = 5,17 \text{ nF}$ ($4700 + 470 \text{ pF}$) (fig. 9).

Le signal observé est conforme au calcul théorique : il apparaît une sinusoïde amortie aux bornes du condensateur. Le signal tend vers une valeur constante comme le prévoit la limite de $v(t)$ quand t devient très grand.

L'exponentielle enveloppe de la sinusoïde a pour expression e^{-at} . Le décrement logarithmique déterminé expérimentalement est :

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{v(t)}{v(t+nT)} = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{18}{4} \right) = 0,501.$$

Comme :

$$\delta = aT \quad a = \frac{\delta}{T} = \frac{R}{2L} \quad R = \frac{2\delta L}{T}$$

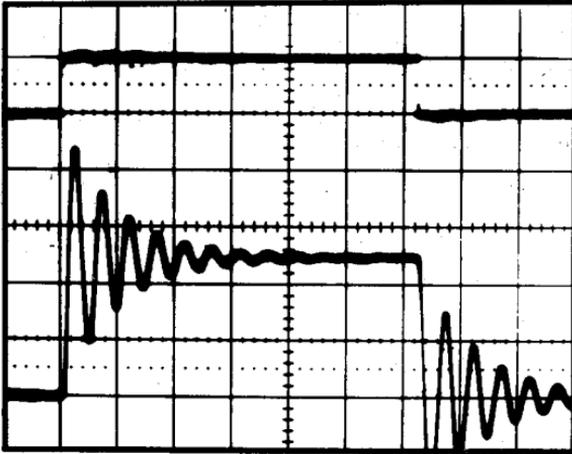


Fig. 9. — Réponse aux bornes de C du circuit RLC, en régime transitoire.

Y_1 (sup.) : 5 V/div ; Y_2 (inf.) : 2 V/div.

B.d.T. : 20 μ s/div.

$$R = \frac{2 \cdot 0,501 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}}{1,01 \cdot 10^{-5}} \simeq 50 \Omega \quad (T \simeq 2\pi\sqrt{LC} = 1,01 \cdot 10^{-5} \text{ s}).$$

La valeur de R ainsi déterminée est très supérieure à la résistance totale en série dans le circuit. Cela provient du fait que le terme R représente l'ensemble des pertes effectives dans le circuit.

La pseudo-fréquence de l'oscillation est :

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{10^{12}}{0,5 \cdot 5,17} - \frac{26,7}{2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}}} = 99 \text{ kHz.}$$

On observe une oscillation amortie de l'ordre de 100 kHz.

4.2.2. TENSION D'ATTAQUE : $e(t) = E \sin(\omega_1 t + \varphi)$.

Dans ce cas, on étudie la réponse d'un circuit RLC à une tension sinusoïdale de pulsation ω_1 . La valeur de φ définit l'instant (au cours d'une période) auquel on applique $e(t)$ au circuit.

L'équation différentielle à résoudre est :

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2a \frac{dv}{dt} + \omega_0 v = \omega_0^2 E \sin(\omega_1 t + \varphi).$$

On remarque dans cette équation la présence des termes ω_0 et ω_1 qui n'ont aucun lien entre eux. Le terme ω_0 , défini au paragraphe précédent, caractérise le circuit tandis que le terme ω_1 est la pulsation du générateur sinusoïdal. Dans ce qui suit, on envisagera ultérieurement le cas particulier où $\omega_1 = \omega_0$.

Pour résoudre l'équation différentielle, il est commode de poser les conventions suivantes :

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{2a\omega_1} \quad E_0 = \frac{\omega_0^2 E}{\sqrt{4a^2\omega_1^2 + (\omega_0^2 - \omega_1^2)^2}}$$

il vient alors :

$$v = E_0 e^{-at} \left[\cos(\varphi + \psi) \cos \omega t + \dots \right. \\ \left. \dots \left[\frac{a}{\omega} \cos(\varphi + \psi) - \frac{\omega_1}{\omega} \sin(\varphi + \psi) \right] \sin \omega t \right] \\ - E_0 \cos(\omega_1 t + \varphi + \psi).$$

Pour $t = 0$: $v(t = 0) = E_0 \cos(\varphi + \psi) - E_0 \cos(\varphi + \psi) = 0$ quelles que soient les valeurs de φ et ω_1 .

Pour tous les cas possibles, la tension aux bornes du condensateur est toujours nulle à l'instant $t = 0$.

On peut s'interroger sur la possibilité d'une réponse sans apparition de phénomène transitoire. Il faudrait alors que :

$$\cos(\varphi + \psi) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{a}{\omega} \cos(\varphi + \psi) - \frac{\omega_1}{\omega} \sin(\varphi + \psi) = 0.$$

Ces deux conditions devraient être vérifiées simultanément ; c'est-à-dire que : $\cos(\varphi + \psi) = 0$ et $\sin(\varphi + \psi) = 0$ simultanément.

Ce système n'ayant pas de solution, la réponse du circuit RLC à une sinusoïde comportera toujours un phénomène transitoire de durée plus ou moins longue.

Pour le circuit RC, il avait été possible de trouver une condition sur φ pour laquelle la solution ne comporte plus de terme correspondant au régime transitoire.

L'expression de la solution générale ne permet pas, *a priori*, de prévoir des cas particuliers intéressants. A partir de l'expression de $\text{tg } \psi$, on peut envisager trois domaines d'étude de la solution :

1. $\omega_1 \ll \omega_0$.
2. $\omega_1 = \omega_0$.
3. $\omega_1 > \omega_0$.

1. Domaine où $\omega_1 \ll \omega_0$.

On peut arriver à une solution relativement simple en supposant que :

$$\varphi + \psi = 0 \quad \text{et} \quad a \ll \omega_0.$$

Ces hypothèses correspondent à un circuit RLC avec de faibles pertes, attaqué par un générateur sinusoïdal de fréquence très inférieure à la fréquence de résonance du circuit.

On peut montrer, dans ce cas, que :

$$v(t) \simeq E [(e^{-at} \cos \omega_0 t) - \cos \omega_1 t] \quad (\text{expression approchée}).$$

L'expérimentation montre une tension aux bornes du condensateur ayant l'allure prévue (fig. 10.1). Le module d'étude permet d'agir sur la valeur de φ et d'observer en temps réel, l'évolution de la réponse du circuit.

A l'aide de l'expression de la solution générale, on a calculé un tracé théorique (fig. 10.2). Il y a concordance entre la théorie et l'expérience.

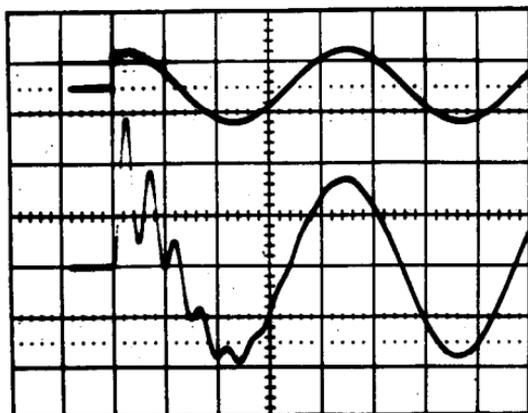


Fig. 10.1. — Réponse aux bornes de C du circuit RLC, attaqué par une tension sinusoïdale; $f_1 = 11,5$ kHz.

Y_1 (sup.) : 5 V/div; Y_2 (inf.) : 0,1 V/div.

B.d.T. : 20 μs /div.

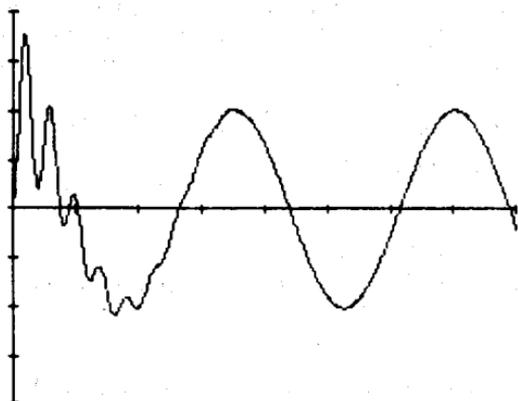


Fig. 10.2. — Réponse calculée avec les valeurs correspondant à l'expérimentation ($f_1 = 11,5$ kHz).

Graduation verticale : 0,5 V/div.

Graduation horizontale : 25 μ s/div.

2. Le générateur d'attaque est tel que $\omega_1 = \omega_0$ (résonance du circuit).

$$\text{Si } \omega_1 = \omega_0 \quad \text{tg } \psi = \frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{2 a \omega_1} = 0 \quad \text{soit } \psi = 0.$$

La solution s'écrit alors :

$$v(t) = E_0 e^{-at} \left[\cos \varphi \cos \omega t + \dots \left(\frac{a}{\omega} \cos \varphi - \frac{\omega_1}{\omega} \sin \varphi \right) \sin \omega t \right] - E_0 \cos (\omega_1 t + \varphi).$$

Par hypothèse : $\omega^2 = \omega_0^2 - a^2$ mais, pour l'inductance disposée sur le module d'étude, on a : $\omega \simeq \omega_0$ (faibles pertes), ce qui se caractérise aussi par le coefficient :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{\omega_0}{2a} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{\omega_0} = \frac{1}{2Q}.$$

D'où une expression approchée de $v(t)$:

$$v(t) = E_0 e^{-at} \left[\cos \varphi \cos \omega_0 t + \dots \left(\frac{\cos \varphi}{2Q} - \sin \varphi \right) \sin \omega_0 t \right] - E_0 \cos (\omega_0 t + \varphi)$$

en posant $\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{2Q} - \operatorname{tg} \varphi$:

$$v(t) = E_0 e^{-at} \frac{\cos \varphi}{\cos \gamma} [\cos(\omega_0 t - \gamma)] - E_0 \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Pour $Q \gg 1$ on pourra admettre, pour la plupart des valeurs de φ , que :

$$\operatorname{tg} \gamma \simeq -\operatorname{tg} \varphi \quad \text{soit} \quad \gamma \simeq -\varphi$$

auquel cas :

$$v(t) \simeq E_0 (e^{-at} - 1) \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

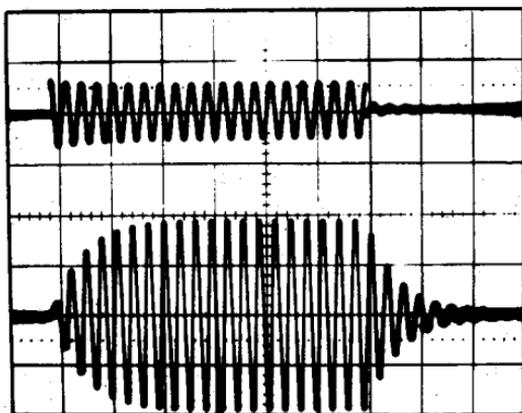
Remarque sur E_0 quand $\omega_1 = \omega_0$:

$$E_0 = \frac{\omega_0^2 E}{\sqrt{4a^2 \omega_1^2 + (\omega_0^2 - \omega_1^2)^2}} = \frac{\omega_0^2 E}{2a\omega_1} = \frac{\omega_0 E}{2a} = QE.$$

Résultat que l'on porte dans l'expression de $v(t)$:

$$v(t) \simeq -QE(1 - e^{-at}) \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Sur la fig. 11.2., on obtient par le calcul une sinusoïde dont la valeur maximum s'établit progressivement suivant une loi exponentielle telle que cette expression approchée permet de le prévoir.



Réponse 11.1. — Réponse aux bornes de C du circuit RLC. La fréquence de la salve est la fréquence de résonance.

Y_1 (sup.) : 5 V/div ; Y_2 (inf.) : 10 V/div.

B.d.T. : 20 μ s/div.

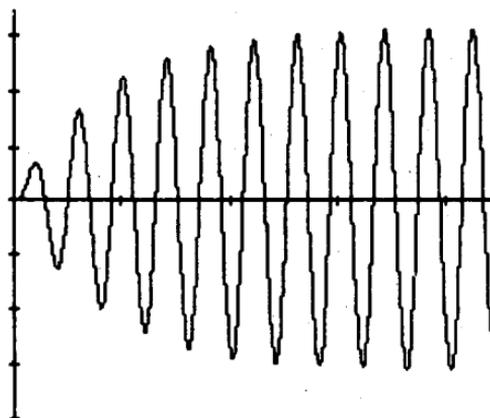


Fig. 11.2. — Réponse calculée avec les valeurs correspondant à l'expérimentation ($f_1 = f_0$ fréquence de résonance).

Retard à l'enclenchement : $\varphi = 0^\circ$.

Graduation verticale : 2 volts/div.

Graduation horizontale : 25 μ s/div.

Le calcul numérique a cependant été fait avec l'expression exacte de la solution générale. Il est ainsi possible en modifiant les grandeurs d'entrée (ω_1 et φ) d'envisager les différents cas pour ω_1 et φ . L'observation expérimentale (fig. 11.1.) confirme les hypothèses précédentes mais permet en plus d'observer la modification de la réponse lorsque φ varie : l'effet est mineur. Ceci tiendrait à montrer que l'hypothèse $\gamma \simeq \varphi$ reste valable même aux faibles valeurs de φ .

L'étude de ce cas ($\omega_1 = \omega_0$) trouve son application lors de l'excitation d'un transducteur piézoélectrique. Sa réponse à une tension sinusoïdale n'atteint le régime permanent qu'après un certain délai, correspondant au phénomène transitoire.

3. Domaine où $\omega_1 > \omega_0$.

Il n'a pas été possible de trouver une simplification de la solution générale. Seule, l'expérimentation ou la simulation par calcul numérique correspondant à chaque cas, permet d'observer le régime transitoire qui présente généralement une forme très irrégulière comme le montre la fig. 12.

5. CONCLUSION. DEVELOPPEMENT.

Notre module d'étude permet d'observer en temps réel la réponse des circuits passifs aux excitations impulsionnelles et

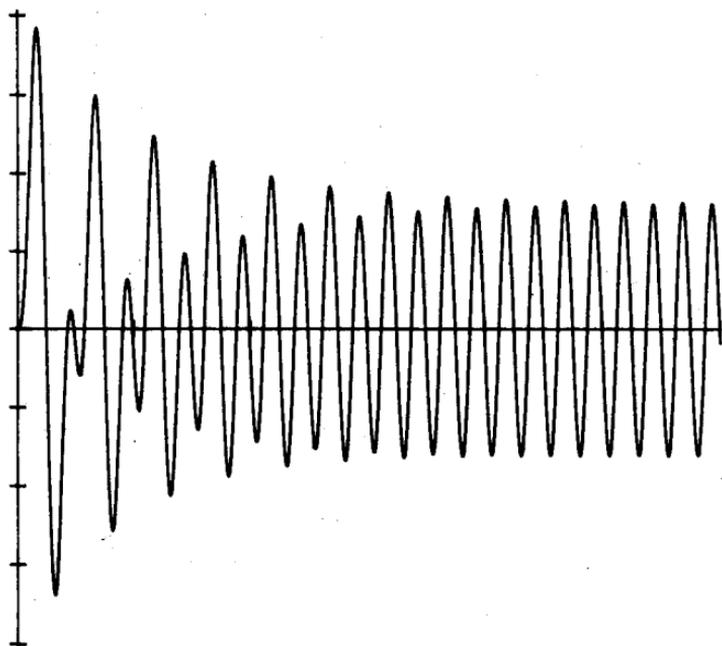


Fig. 12. — Réponse transitoire théorique aux bornes de C pour un circuit RLC série. Cette courbe est entièrement calculée et dessinée à l'aide d'une table traçante reliée à un micro-ordinateur. Cela explique le soin du tracé.

Fréquence de résonance du circuit : 100 kHz.

Fréquence d'excitation : 200 kHz.

Retard à l'enclenchement : $\varphi = 0^\circ$.

Graduation verticale : 0,2 V/div.

Graduation horizontale : 20 μ s/div.

sinusoïdales. Il serait intéressant de prévoir également l'excitation par un signal rampe, cas fréquent dans la pratique.

Par ailleurs, un cas réel important se présente quand les éléments du circuit ont des caractéristiques non linéaires en fonction du courant ou de la tension appliquée. L'exemple le plus courant est celui des bobinages à noyau ferromagnétique.

A cet effet, nous développons à l'heure actuelle, un circuit permettant l'étude des régimes transitoires sur des composants de puissance dans les conditions réelles de fonctionnement.

La fig. 13 représente le bloc diagramme de l'appareil qui permet d'enclencher le courant dans le circuit à étudier avec un

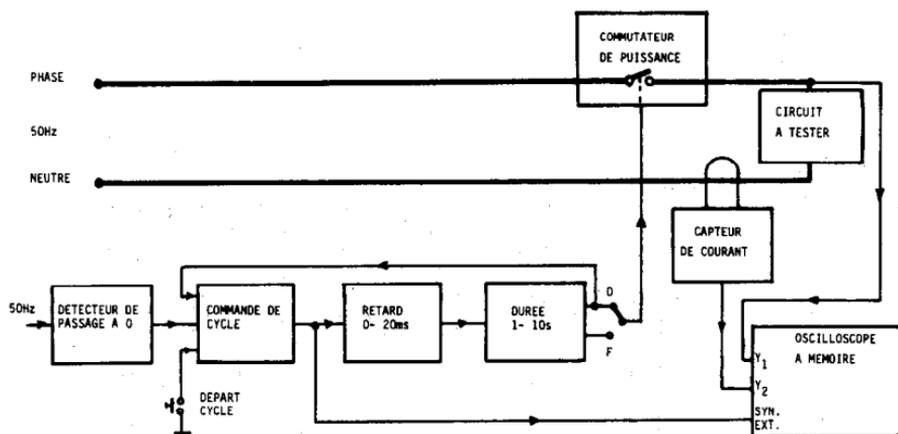
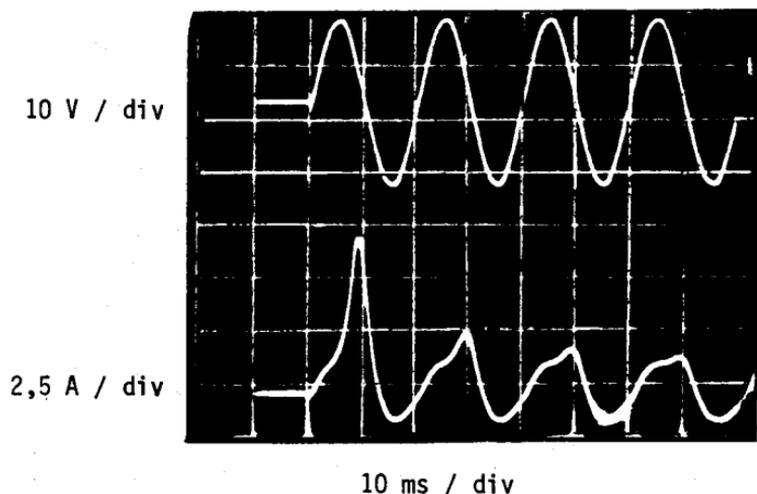


Fig. 13. — Bloc diagramme du montage utilisé pour l'étude du courant transitoire au primaire d'un transformateur.

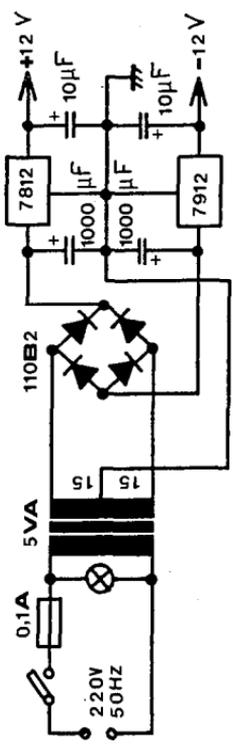
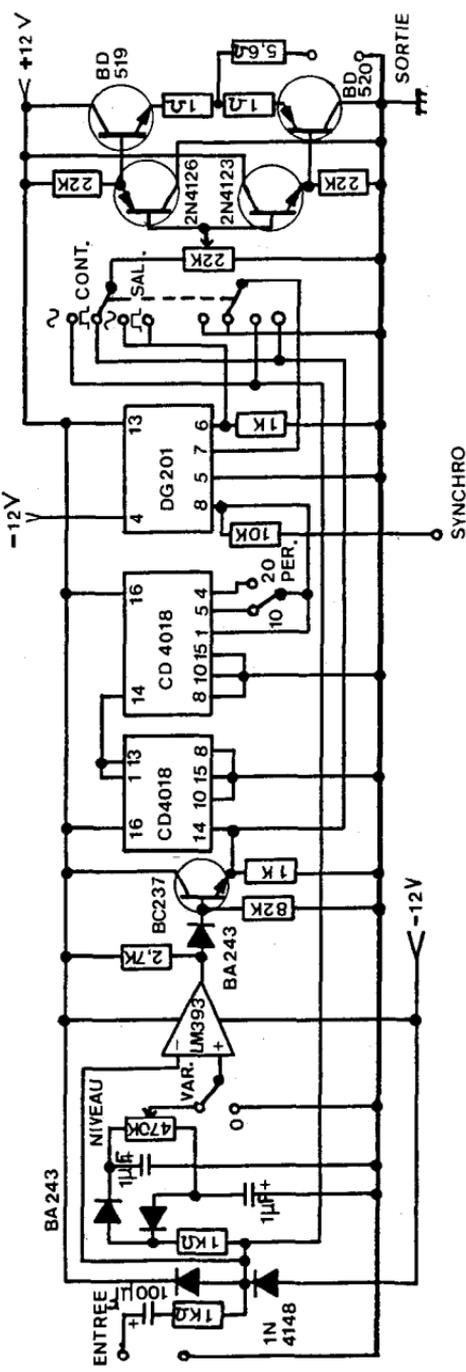
retard variable de 0 à 20 ms par rapport au début de l'alternance secteur.

Le régime transitoire est visualisé à l'aide d'un oscilloscope à mémoire dont le balayage est déclenché par le début du cycle.

La photo ci-après montre l'établissement du courant au primaire d'un transformateur 12/220 V de 25 VA, secondaire non chargé.



On constate une pointe d'intensité pendant la première demi-alternance et une forme de courant non sinusoïdale en régime permanent.



SCHEMA DE PRINCIPE DU GENERATEUR D'ONDES CARACTERISTIQUES pour l'étude des transitoires dans les circuits passifs