

L'anamorphose

par Charles RUHLA,

Institut de Physique Nucléaire de Lyon,
Villeurbanne.

du grec $\left\{ \begin{array}{l} \text{ana : en haut} \\ \text{morphè : forme.} \end{array} \right.$

*Image, représentation grotesque, difforme,
quand elle est vue d'un certain point.*

LAROUSSE.

I. LINEARITE ET LOIS PHYSIQUES.

La loi physique $y = \varphi(x)$ qui relie deux grandeurs est *a priori* d'une forme mathématique absolument quelconque. Mais, si l'on peut la transformer en une loi linéaire, sa mise en évidence puis son utilisation en seront grandement facilitées. *C'est cette opération de linéarisation que l'on appelle anamorphose.*

L'exemple classique est celui des lois de décroissance exponentielles du type $y = y_0 e^{-\alpha x}$, telles que :

- la loi de décroissance radioactive $N = N_0 e^{-\lambda t}$,
- l'équation barométrique $p = p_0 e^{-mgz/kT}$,
- la loi de décharge d'un condensateur $U = U_0 e^{-t/RC}$.

On peut transformer cette loi exponentielle en une loi linéaire par passage en coordonnées semi-logarithmiques.

$$\ln y = -\alpha x + \ln y_0.$$

Le graphe qui représente cette loi linéaire permet de déterminer la constante α par mesure de la pente $-\alpha$, et la valeur de y_0 par mesure de l'ordonnée à l'origine $\ln y_0$. Ces opérations peuvent se faire simplement en utilisant du papier semi-logarithmique avec échelle logarithmique en ordonnée.

L'opération de lissage des points expérimentaux doit donc se ramener à la recherche d'une droite de régression si l'on a au préalable transformé les points expérimentaux par une anamor-

phose appropriée. La méthode des moindres carrés appliquée à une loi linéarisée par anamorphose ne donnera pas des résultats aussi précis que lorsqu'on l'applique directement à la relation physique $y = \varphi(x)$, mais elle donnera encore des résultats de bonne qualité. Un exemple concret va nous permettre d'en juger.

II. LA DECHARGE D'UN CONDENSATEUR.

Le schéma du dispositif et les résultats expérimentaux sont représentés sur la fig. 1.

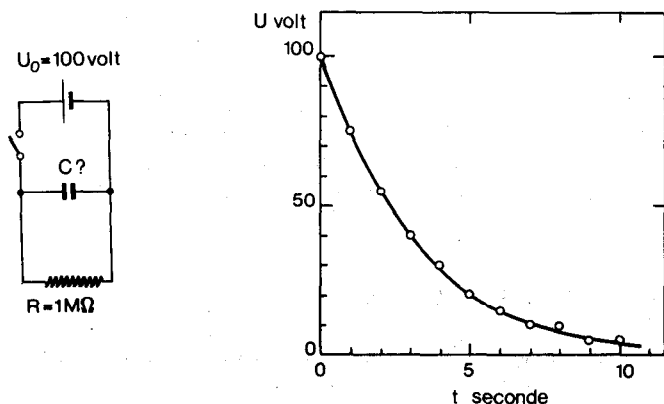


Fig. 1. — Décharge d'un condensateur.

Problème :

Pour mesurer la capacité d'un condensateur, on le charge sous une tension $U_0 = 100$ volts, puis on le décharge dans une grande résistance $R = 1 \text{ M}\Omega$. On étudie la variation de la tension $U(t)$ aux bornes du condensateur en fonction du temps t . Les résultats expérimentaux sont rassemblés sur le tableau ci-après (*).

t seconde	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U volt	100	75	55	40	30	20	15	10	10	5	5

On demande la valeur de la capacité C .

Solution :

La loi de décharge d'un condensateur est $U = U_0 e^{-t/RC}$ que nous écrirons : $U = U_0 e^{-at}$.

(*) Valeurs numériques données dans l'ouvrage de H. VENTSEL, *Théorie des probabilités*, Editions Mir. Moscou 1973.

Nous en tirons $\ln U = -\alpha t + \ln U_0$ et nous allons chercher le coefficient $\alpha = 1/RC$ en présentant par la même occasion les deux méthodes simples utilisables dans ce cas, l'une graphique, l'autre algébrique.

III. METHODE GRAPHIQUE :

UTILISATION DU PAPIER SEMI-LOGARITHMIQUE.

Sur ce papier (fig. 2), les abscisses sont portées en échelle linéaire de 0 à 10 secondes, et les ordonnées sont portées en échelle logarithmique de 1 à 100 volts. En appréciant à l'œil, on place le mieux possible une règle qui passe entre tous les points, ce qui permet le tracé de la droite $\ln U = -\alpha t + \ln U_0$.

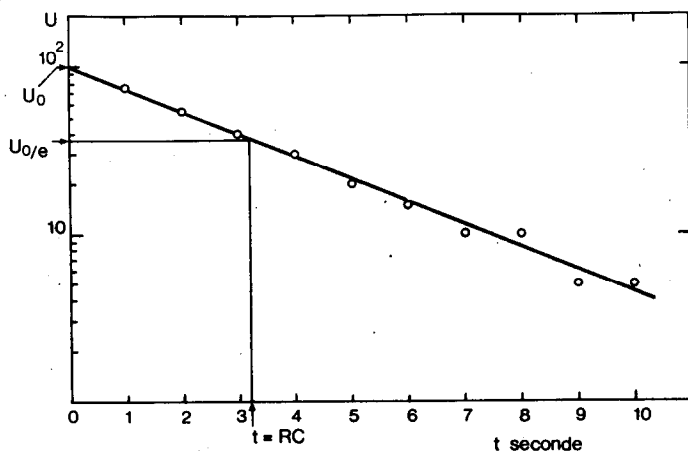


Fig. 2. — Utilisation d'une échelle semi-logarithmique.

On remarquera que pour $t = RC$, on a : $\alpha = t/RC = 1$ et $U/U_0 = e^{-1} = 1/e$.

On en déduit que pour $t = RC$, on a : $U = 100/e = 36,79$ V. Sur le papier logarithmique, on estime graphiquement que $U = 36,79$ V correspond à $t = 3,2$ secondes. On a donc $RC = 3,2$ s et comme $R = 10^6 \Omega$, on en déduit $C = 3,2 \cdot 10^{-6}$ F, soit :

$$C = 3,2 \mu\text{F.}$$

Au passage, on retiendra que $RC = 3,2$ s donne :

$$\alpha = 1/RC = 0,3125 \text{ s}^{-1}.$$

Tous les chiffres donnés pour α ne sont pas significatifs, mais ils serviront à comparer mathématiquement la méthode graphique à la méthode algébrique.

IV. METHODE ALGEBRIQUE : ANAMORPHOSE SUIVIE DE REGRESSION LINEAIRE.

Les calculs, longs en principe, se font très rapidement avec une calculette de poche HP 32 E. La programmation interne de la calculette permet de mener de front l'opération d'anamorphose représentée par la touche LN (logarithme népérien) et l'opération de régression linéaire représentée par la touche LR (linear regression). Voici la suite des opérations avec les affichages correspondants :

f	CLEAR ALL	0,0000
100 f	LN ENTER	4,6052
0 Σ^+		1,0000
75 f	LN ENTER	4,3175
1 Σ^+		2,0000
55 f	LN ENTER	4,0073
2 Σ^+		3,0000
40 f	LN ENTER	3,6889
3 Σ^+		4,0000
30 f	LN ENTER	3,4012
4 Σ^+		5,0000
20 f	LN ENTER	2,9957
5 Σ^+		6,0000
15 f	LN ENTER	2,7081
6 Σ^+		7,0000
10 f	LN ENTER	2,3026
7 Σ^+		8,0000
10 f	LN ENTER	2,3026
8 Σ^+		9,0000
5 f	LN ENTER	1,6094
9 Σ^+		10,0000
5 f	LN ENTER	1,6094
10 Σ^+		11,0000
f LR		4,6130
x $\rightleftharpoons$ y		-0,3126
g r		-0,9950

Analysons les résultats obtenus.

a) 4,6130 est l'ordonnée à l'origine $\ln U_0$, d'où l'on tire :
 $U_0 = 100,79$ V, ajustage correct de la valeur expérimentale

$U_0 = 100$ V, et qui sert de contrôle à la validité de l'ensemble du calcul.

b) $-0,3126$ est la valeur cherchée de la pente $-\alpha$. On en tire : $RC = 1/\alpha = 3,1990$ s et enfin C :

$$C = 3,2 \text{ } \mu\text{F.}$$

c) $-0,9950$ est le coefficient de corrélation. Il est très proche de -1 , ce qui est l'indice d'un bon ajustage par régression linéaire.

V. COMPARAISON DES DEUX METHODES.

Précisons d'abord que nous avons commencé par la méthode graphique afin que le résultat obtenu ne soit pas « influencé » par la méthode algébrique. Nous avons trouvé ainsi :

— Méthode graphique : $\alpha = -0,3125 \text{ s}^{-1}$.

— Méthode algébrique : $\alpha = -0,3126 \text{ s}^{-1}$.

On peut en déduire que la méthode algébrique est un raffinement, mais que la méthode graphique est déjà excellente. Soulignons toutefois que l'utilisation de la calculette est au moins aussi rapide — sinon plus — que le tracé de la droite en coordonnées semi-logarithmiques.

Il faut ajouter enfin que l'utilisation de la méthode des moindres carrés sur la loi anamorphosée, donc linéaire, ne donne pas exactement le même résultat que pour la loi d'origine, c'est-à-dire l'exponentielle décroissante. Un calcul complet (*), mais long, dans ce dernier cas, donnerait $\alpha = -0,307 \text{ s}^{-1}$, ce qui conduit à $C = 3,25 \text{ } \mu\text{F}$. Les deux méthodes précédentes, issues de l'anamorphose, ont donné $C = 3,2 \text{ } \mu\text{F}$. Il faut donc, dans cette expérience, consentir à une perte de précision de $0,05/3 = 1,7 \%$ si l'on veut se limiter à des calculs simples. Ce sacrifice est raisonnable dans le cadre d'une séance de travaux pratiques. Il ne serait pas légitime s'il s'agissait d'une expérience de métrologie, mais dans ce cas l'expérimentateur dispose d'un programme tout prêt, sur un ordinateur conséquent, et il pourra appliquer rapidement la méthode des moindres carrés, avec n'importe quelle loi physique, aussi complexe soit-elle.

(*) Le calcul complet par la méthode des moindres carrés est donné par H. VENTSEL, ouvrage cité.