82e Année - N° 702 Publication mensuelle Mars 1988

Bulletin de l'Union des Physiciens

Association de professeurs de Physique et de Chimie

Utilisation de l'analyse dimensionnelle

par Jean SIVARDIÈRE,

Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble.

Résumé :

Nous présentons diverses applications de l'analyse dimensionnelle. Pour chacune d'elles, nous insistons sur le rôle de l'intuition physique dans le dénombrement des variables décrivant le phénomène étudié, et dans le choix des variables réduites.

R. GARNIER (B.U.P. n° 511) et M. SERRERO (B.U.P. n° 518) (*) ont souligné l'intérêt de l'analyse dimensionnelle. Cette méthode mathématique est comparable à l'utilisation des propriétés de symétrie physique. Elle permet en effet, avant toute mise en équations et tout calcul, d'obtenir certaines propriétés qualitatives du système étudié. Bien entendu, la mise en équations et la résolution de ces équations restent nécessaires pour obtenir des résultats quantitatifs.

Après avoir rappelé brièvement le principe de la méthode, nous en présentons diverses applications mettant en évidence l'intérêt de combiner l'intuition physique avec l'approche mathématique.

PRINCIPES DE L'ANALYSE DIMENSIONNELLE.

1° Pour décrire un phénomène physique, on doit tout d'abord dénombrer les N grandeurs qui sont susceptibles d'y participer : grandeurs physiques caractéristiques du système étudié (volume, pression...) et des perturbations extérieures (champs), constantes dimensionnées (accélération de la pesanteur g, constante de NEWTON G, constante électrostatique $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$,...). Le dénombre-

(*) Voir aussi l'article de M. SERRERO (B.U.P. n° 699, p. 1237) reçu après le présent article.

ment de ces grandeurs relève de l'intuition et de l'expérience du physicien, qui peut procéder par *approximations successives* et, dans un premier temps, négliger certaines d'entre elles.

2° Si les N grandeurs retenues $G_1, G_2, \ldots G_N$ font intervenir n grandeurs fondamentales, on peut construire $N - n$ grandeurs indépendantes π_i sans dimension appelées *variables réduites.* Les π_i sont des fonctions monomes des N grandeurs initiales, il en existe une infinité de jeux possibles. Comme nous le vérifierons, on peut généralement construire un jeu de π_i à partir de remarques physiques simples, évitant ainsi tout calcul algébrique.

3° La loi $\psi(G_i) = 0$ décrivant le phénomène physique est invariante dans tout changement des unités fondamentales et peut s'écrire en n'utilisant que les variables réduites : $\phi(\pi_j) = 0$. C'est le *théorème π de Vaschy-Buckingham.*

4° Si $N - n = 1$, la loi s'écrit : $\pi_1 = c$, c est une constante qui reste indéterminée. Si $N - n = 2$, elle s'écrit : $\phi(\pi_1, \pi_2) = 0$ ou $\pi_1 = f(\pi_2)$, la fonction $f(\pi_2)$ restant indéterminée. Si $N - n = 3$, elle s'écrit : $\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3), \ldots$

PROBLEMES A UNE SEULE VARIABLE REDUITE.

Exemple 1 : Soit à calculer la norme de la vitesse v d'un satellite de masse m sur une orbite circulaire de rayon r. D'après le théorème de GAUSS, on peut supposer la masse M_T de la Terre concentrée en son centre, le rayon de la Terre n'intervient pas, d'où la relation : $\psi(v, m, GM_T, r) = 0$; $N = 4$, $n = 3$ (L, M et T), $N - n = 1$. On remarque que $1/2\, m v^2$ et $\dfrac{GM_T m}{r}$ sont des énergies, on peut donc choisir $\pi_1 = \dfrac{v^2 r}{GM_T}$, d'où la loi : $v^2 = c\,\dfrac{GM_T}{r}$. Le calcul donne $c = 1$.

Exemple 2 : Soit à calculer la pression électrostatique p à la surface d'une sphère conductrice de rayon R portant la charge Q, d'où la densité de charge superficielle $\sigma = \dfrac{Q}{4\pi R^2}$; $\psi\left(p, \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}, R, Q\right) = 0$; $N = 4$, $n = 3$ $\left(L, \dfrac{M}{T^2} \text{ et } Q\right)$. D'après la loi de COULOMB, $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q^2}{R^2}$ est une force donc $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q^2}{R^4}$ est une pression. On peut donc choisir $\pi_1 = \dfrac{p\,\varepsilon_0}{\sigma^2}$ d'où la loi

$p = c\,\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon_0}$. Le calcul donne $c = 1/2$.

Soit de même à calculer la pression p au centre de la Terre (masse M_T, rayon R_T, $g = \dfrac{GM_T}{R_T^2}$). D'après la loi de NEWTON, $\dfrac{GM_T^2}{R_T^2}$ est une force donc $\dfrac{GM_T^2}{R_T^4} = \dfrac{g^2}{G}$ est une pression. On choisit donc : $\pi_1 = \dfrac{pG}{g^2}$ d'où $p = c\,\dfrac{g^2}{G}$. Le calcul donne : $c = \dfrac{3}{8\pi}$.

PROBLEMES A DEUX VARIABLES REDUITES.

Exemple 3 : Un projectile de masse m, et de vitesse v_1, percute une cible immobile de masse m_2. Le choc est supposé frontal. Cherchons la vitesse v'_2 de la cible après le choc.
$\psi\,(m_1, m_2, v_1, v'_2) = 0$: $N = 4$, $n = 2$ (M et $\dfrac{L}{T}$). On choisit de manière évidente : $\pi_1 = \dfrac{v'_2}{v_1}$ (de manière systématique, on fera figurer la variable à calculer dans π_1) et $\pi_2 = \dfrac{m_2}{m_1}$. D'où la loi :

$v'_2 = v_1\, f\left(\dfrac{m_2}{m_1}\right)$. Le calcul donne : $f\left(\dfrac{m_2}{m_1}\right) = \dfrac{2}{1 + \dfrac{m_2}{m_1}}$.

Exemple 4 : Une particule de masse m et de charge q, ayant initialement (à l'infini) la vitesse v, pénètre dans une région de l'espace où agit un champ de gravitation, électrique ou magnétique. Elle subit la déviation angulaire ϑ, qu'on veut exprimer. Comme on peut le vérifier, deux variables réduites jouent un rôle : $\pi_1 = \vartheta$ et le rapport entre une certaine énergie potentielle ou autre, caractéristique du champ, et l'énergie cinétique initiale de la particule $\dfrac{1}{2}\,mv^2$.

a) La particule est une comète hyperbolique déviée par le Soleil de masse M_S. Comme dans tous les cas où les forces de gravitation interviennent seules, m ne joue aucun rôle. Soit b le paramètre d'impact (distance du centre attractif ou répulsif au support de la vitesse initiale).

$\psi(\vartheta, v, b, GM_S) = 0$: $N = 4$, $n = 2$ (L, T) ; $\dfrac{GM_S m}{b}$ est une énergie, on choisit donc $\pi_2 = \dfrac{GM_S}{bv^2}$ d'où la loi : $\vartheta = f\left(\dfrac{GM_S}{bv^2}\right)$; f est *a priori* une fonction croissante, le calcul donne :

$$f\left(\frac{GM_S}{bv^2}\right) = 2 \text{ Arc tg } \frac{GM_S}{bv^2}.$$

b) Dans le cas de la diffusion coulombienne par une charge immobile Q, on a : $\psi\left(\vartheta, v, b, \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}, \dfrac{q}{m}\right) = 0$; $N = 5$, $n = 3$ $\left(L, T, \dfrac{Q}{M}\right)$; $\dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 b}$ est une énergie, on choisit donc : $\pi_2 = \dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 b m v^2}$ d'où la loi $\vartheta = f\left(\dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 b m v^2}\right)$. Le calcul donne : $f\left(\dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 b m v^2}\right) = 2 \text{ Arc tg } \dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 b m v^2}$.

c) Si la particule parcourt la distance l perpendiculairement à un champ électrique $\vec{E}$, de norme E, $q l E$ est une énergie d'où la loi $\vartheta = f\left(\dfrac{q l E}{m v^2}\right)$; le calcul donne :

$$f\left(\frac{q l E}{m v^2}\right) = \text{Arc tg } \frac{q l E}{m v^2}.$$

d) Si on remplace $\vec{E}$ par un champ magnétique $\vec{B}$, de norme B, $q v B l$ est une énergie d'après l'expression de la force de LORENTZ, d'où la loi $\vartheta = f\left(\dfrac{q B l}{m v}\right)$, f est une fonction linéaire.

Exemple 5 : Une particule de masse m est soumise à la force de rappel harmonique $\vec{F} = -k\vec{r}$. On admet que la trajectoire est une ellipse de demi-axes a et b. Soit à calculer P la période du mouvement : $\psi(P, m, k, a, b) = 0$; $N = 5$, $n = 3$ (M, L, T) ; ka et $\dfrac{ma}{P^2}$ sont des forces, on choisit donc $\pi_1 = P\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $\pi_2 = \dfrac{b}{a}$ ou, mieux, $\pi_2 = \sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}} = e$, excentricité de l'ellipse. D'où la loi : $P = \sqrt{\dfrac{m}{k}}\, f(e)$. La période est donc indépendante de la *taille* de l'orbite ; *a priori*, elle dépend de sa forme par e. Le calcul donne $f(e) = 2\pi$: P ne dépend ni de la taille, ni de la *forme* de l'orbite.

Considérons de même le calcul de la période P de révolution d'une planète de masse m autour du Soleil supposé immobile : $\psi(P, GM_S, a, b) = 0$; $N = 4$, $n = 2$ (L et T) ; $\dfrac{GM_S m}{a^2}$ et $\dfrac{ma}{P^2}$ sont des forces, on choisit donc : $\pi_1 = \dfrac{a^3}{GM_S P^2}$ et $\pi_2 = e$.

D'où la loi : $\dfrac{a^2}{P^2} = GM_S\, f(e)$. *A priori*, P dépend donc à la fois de la taille et de la forme de l'orbite. Le calcul donne $f(e) = \dfrac{1}{4\pi^2}$: la forme n'influe pas, c'est la troisième loi de KÉPLER.

PROBLEMES A TROIS VARIABLES REDUITES.

Exemple 6 : Soit à calculer la vitesse maximale d'un cycliste de masse m dans un virage de rayon r, relevé d'un angle α, le coefficient de frottement statique de COULOMB étant $\mu_c = \operatorname{tg}\beta$. $\psi(v, r, m, g, \alpha, \beta) = 0$: $N = 6$, $n = 3$ (M, L, T) ; m est la seule variable faisant intervenir la grandeur M, elle est donc absente des variables réduites ; $\dfrac{v^2}{r}$ et g sont des accélérations, donc on choisit : $\pi_1 = \dfrac{v^2}{gr}$, $\pi_2 = \alpha$, $\pi_3 = \beta$, d'où la loi $\dfrac{v^2}{gr} = f(\alpha, \beta)$. Le calcul donne : $f(\alpha, \beta) = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ (dans l'hypothèse où le cycliste est plus incliné, vers l'intérieur de la trajectoire, que la normale au sol).

Exemple 7 : La Terre tourne autour de son axe à la vitesse angulaire Ω. A la latitude ϑ, un corps en chute libre tombant de la hauteur h subit une déviation horizontale δ (vers l'Est dans l'hémisphère Nord) ; $\psi(\delta, \Omega, \vartheta, g, h) = 0$: N = 5, n = 2 (L et T) ; g est une accélération, $\Omega^2 h$ aussi, d'où le choix :

$$\pi_1 = \frac{\delta}{h}, \ \pi_2 = \frac{\Omega^2 h}{g}, \ \pi_3 = \vartheta$$

et la loi : $\delta = h f\left(\frac{\Omega^2 h}{g}, \vartheta\right)$. Le calcul donne :

$$f\left(\frac{\Omega^2 h}{g}, \vartheta\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{\Omega^2 h}{g}} \cos\vartheta \text{ (loi de Férel).}$$

Désignons de même par δ' la déviation du corps vers le Sud, liée à sa vitesse vers l'Est. Nous avons également : $\delta' = h f\left(\frac{\Omega^2 h}{g}, \vartheta\right)$. Le calcul donne :

$$f\left(\frac{\Omega^2 h}{g}, \vartheta\right) = \left(\frac{2}{3}\sin\vartheta\cos\vartheta\right)\frac{\Omega^2 h}{g}.$$

On montre de même qu'un corps lancé depuis le sol avec la vitesse V vers le haut retombe avec une déviation horizontale vers l'Ouest) : $\delta'' = \frac{V}{\Omega} f\left(\frac{\Omega V}{g}, \vartheta\right)$ avec :

$f\left(\frac{\Omega V}{g}, \vartheta\right) = \frac{4}{3}\cos\vartheta\left(\frac{\Omega V}{g}\right)^2$; (la variable réduite $\frac{\Omega V}{g}$ s'obtient à partir de $\frac{\Omega^2 h}{g}$ en remplaçant h par V/Ω).

Quand on étudie δ et δ', on peut chercher à comparer à g l'accélération de Coriolis pour une certaine vitesse de chute verticale, en pratique la vitesse V_{max} du corps quand il arrive au sol. On choisira donc comme variable réduite $\frac{\Omega V_{max}}{g}$. Or, $V^2_{max} = 2gh$, donc $\frac{\Omega V_{max}}{g} \sim \sqrt{\frac{\Omega^2 h}{g}}$; $\frac{\delta}{h}$ est bien proportionnel à $\sqrt{\frac{\Omega^2 h}{g}}$ et $\frac{\delta'}{h}$ proportionnel à $\frac{\Omega^2 h}{g}$ puisqu'il s'agit d'un effet du deuxième ordre. De même dans l'étude de δ'', $\frac{\Omega V}{g}$ est le rapport de l'accélération de CORIOLIS au lancement à g.

Exemple 8 : Soit à trouver l'ascension h d'un liquide de masse volumique ϱ et de tension superficielle A dans un tube capillaire de rayon r ; ϑ est l'angle de raccordement entre le liquide et la paroi du tube ; $\psi(h, g, \varrho, A, \vartheta, r) = 0$; $N = 6$, $n = 3$ (L, T, M) ; A est une énergie par unité de surface, $\pi r^2 h \varrho g$ est une force (poids de la colonne de liquide) donc Ah^2 et $\pi r^2 h^2 \varrho g$ sont des énergies. D'où : $\pi_2 = \frac{A}{r^2 \varrho g}$, $\pi_1 = \frac{h}{r}$, $\pi_3 = \vartheta$ et la loi : $h = r f\left(\frac{A}{r^2 \varrho g}, \vartheta\right)$. Le calcul donne : $h = \frac{A}{r \varrho g} \cos \vartheta$ (loi de JURIN). Si l'on tient compte de la masse volumique de l'air, il faut remplacer ϱ par $\varrho - \varrho(\text{air})$.

Le problème peut être abordé plus physiquement. En effet, l'ascension du liquide dans le tube capillaire n'a lieu de manière sensible que si r est assez petit. On doit donc pouvoir construire, à partir des grandeurs caractéristiques A et ϱ du fluide et de la constante g, une longueur caractéristique λ_c que nous appellerons « longueur capillaire » à laquelle r puisse être comparé. $[\varrho g] = \frac{M}{L^2 T^2}$ et $[A] = \frac{M}{T^2}$ donc $\lambda_c^2 = \frac{A}{\varrho g}$ d'où le choix : $\pi_2 = \frac{\lambda_c}{r}$, et la loi : $h = r f\left(\frac{\lambda_c}{r}, \vartheta\right)$. *A priori* $f\left(\frac{\lambda_c}{r}, \vartheta\right)$ est une fonction croissante de $\frac{\lambda_c}{r}$ et décroissante de ϑ.

L'analyse dimensionnelle permet également d'obtenir des résultats généraux sur des classes de problèmes.

Exemple 9 : Soit à calculer le champ électrique $\vec{E}$ créé par une distribution de charges (charge totale Q) caractérisée par p dimensions $R_1, R_2, \ldots, R_p$, en un point situé à la disatnce r ;

$$\psi\left(E, \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0}, R_1, R_2, \ldots, R_p, r\right) = 0.$$

$$\left[\frac{1}{4 \pi \varepsilon_0}\right] = \frac{ML^3}{Q^2 T^2}, [E] = \frac{ML}{QT^2} ; N = p + 3, n = 2 \left(L, \frac{M}{QT^2}\right),$$

donc $N - n = p + 1$.

$p = 0$. C'est le cas d'un plan (ou d'un fil) chargé uniformément, r est la distance du point au plan ou au fil ; $N - n = 1$; une seule variable réduite intervient. On introduit la densité de charge surfacique σ (ou linéaire λ) d'où : $\pi_1 = \dfrac{E\,\varepsilon_0}{\sigma}$ et $\pi_1 = \dfrac{E r\,\varepsilon_0}{\lambda}$ (en remplaçant σ par $\dfrac{\lambda}{r}$).

D'où $E = c\,\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ et $E = c\,\dfrac{\lambda}{r\,\varepsilon_0}$; le calcul donne $c = \dfrac{1}{2}$ et $c = \dfrac{1}{2\pi}$ respectivement.

$p = 1$. C'est le cas d'une distribution sphérique homogène de rayon R, ou d'un disque de rayon R chargé uniformément ; r est la distance au centre de la sphère ou du disque ; $N - n = 2$; $\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ a la dimension d'un champ, on prend donc :

$$\pi_1 = E/Q \cdot 4\pi\varepsilon_0 r^2 \qquad \pi_2 = \frac{r}{R},$$

d'où : $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, f\left(\dfrac{r}{R}\right)$.

La fonction $f\left(\dfrac{r}{R}\right)$ dépend de la *géométrie* du système. Le calcul donne pour la sphère :

$$f\left(\frac{r}{R}\right) = 1 \ (r \geqslant R) \quad \text{et} \quad f\left(\frac{r}{R}\right) = \left(\frac{r}{R}\right)^3 (r \leqslant R)$$

et pour le disque, en un point de son axe :

$$f\left(\frac{r}{R}\right) = 2\left(1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 + R^2}}\right) \cdot \frac{r^2}{R^2}.$$

$p = 2$. On a de même $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, f\left(\dfrac{r}{R_1}, \dfrac{R_2}{R_1}\right)$.

Dans le cas d'une sphère creuse (rayon intérieur R_2, rayon extérieur R_1), $f\left(\dfrac{r}{R_1}, \dfrac{R_2}{R_1}\right) = 0$ à l'intérieur de la cavité, 1 à l'extérieur de la sphère et $\dfrac{r^3 - R_2^3}{R_1^3 - R_2^3}$ dans la zone chargée.

Exemple 10 : Etudions de même le champ magnétique $\vec{B}$, de norme B, créé par un courant I caractérisé par p longueurs R_i ; R_i est par exemple le rayon d'une spire de courant. Si $p = 1$,

$$\psi\left(B, \frac{\mu_0 I}{4\pi}, R, r\right) = 0, \ N = 4, \ n = 2\left(L, \frac{M}{TQ}\right) ; \ \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \text{ est}$$

homogène à un champ B (théorème d'AMPÈRE), donc on choisit :

$$\pi_1 = B \cdot \frac{4\pi R}{\mu_0 I}, \ \pi_2 = \frac{r}{R} \text{ et on obtient : } B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} f\left(\frac{r}{R}\right).$$

Dans le cas d'une spire circulaire, on a pour un point sur l'axe (situé à la distance r d'un point quelconque de la spire) :

$$f\left(\frac{r}{R}\right) = 2\pi\left(\frac{R}{r}\right)^3.$$

Dans le cas d'une spire elliptique ($p = 2$), on aurait :

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} f\left(\frac{r}{a}, \frac{b}{a}\right)$$

a et b étant les demi-axes de la spire.

Exemple 11 : Soit à calculer la capacité C d'un conducteur ou d'un condensateur dépendant de p paramètres géométriques R_1, $R_2, \ldots, R_p$.

$$\psi\left(C, \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, R_1, R_2, \ldots, R_p\right) = 0 ; \ N = p + 2, \ n = 2\left(L, \frac{F}{Q^2}\right).$$

En effet : $[C] = \dfrac{Q^2}{FL}$ où F est une force (d'après l'expression de l'énergie d'un condensateur) et $\left[\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] = \dfrac{FL^2}{Q^2}$.

On choisit donc : $\pi_1 = \dfrac{C}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$, $\pi_2 = \dfrac{R_2}{R_1}, \ldots$ d'où :

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R_1 f\left(\frac{R_2}{R_1}, \frac{R_3}{R_1}, \ldots\right) \quad \text{où} \quad f\left(\frac{R_2}{R_1}, \frac{R_3}{R_1}, \ldots\right)$$

dépend de la géométrie du conducteur ou condensateur.

Pour une sphère isolée de rayon R_1, on a $C = c \cdot 4\pi\varepsilon_0 R_1$; le calcul donne $c = 1$. Pour un ellipsoïde allongé de demi-grand axe $a = R_2$ et de demi-distance entre foyers $c = R_1$, on a : $f\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = 2/ln \frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1}$. Pour un condensateur sphérique $(R_2 < R_1)$: $f\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{R_2}{R_1 - R_2}$. Pour un condensateur formé de deux cylindres excentrés distants de D, on a par unité de longueur : $C = 2\pi\varepsilon_0/\text{arg ch}\, \frac{D^2 - R_1^2 - R_2^2}{2R_1R_2}$.

L'analyse dimensionnelle est également utile quand on analyse un phénomène par approximations successives. En première approximation, N grandeurs sont prises en compte. Si $N - n = 1$, on a une loi $\pi_1 = C$. Une analyse plus fine amène à introduire une $N + 1^e$ grandeur, n restant le plus souvent inchangé, d'où une loi :

$$\frac{\pi_1}{C} = f(\pi_2)$$

où $f(\pi_2)$ est une fonction inconnue dont on sait qu'elle varie peu avec π_2 et qu'elle vaut 1 si π_2 est égale à zéro.

Un développement limité donne :

$$f(\pi_2) = 1 + C_1\pi_2 + C_2\pi_2^2 + \ldots$$

Si π_2 est faible, un développement au 1er ordre suffit.

Exemple 12 : Reprenons le calcul de la période de révolution d'une planète autour du Soleil (exemple 5) en tenant compte du fait que le Soleil n'est pas immobile. $\psi(P, G, M_S, m, a, e) = 0$; $N = 6$, $n = 3$. La troisième variable réduite est choisie égale à $\frac{m}{M_S}$ d'où la loi : $\frac{a^3}{P^2} = \frac{GM_S}{4\pi^2} f\left(e, \frac{m}{M_S}\right)$. Le calcul donne : $f\left(e, \frac{m}{M_S}\right) = 1 + \frac{m}{M_S}$. La troisième loi de KÉPLER n'est valable que si $\pi_3 = \frac{m}{M_S} \ll 1$.

Exemple 13 : Considérons une particule de masse m placée dans le potentiel à une dimension : $U = \frac{1}{2} kx^2$. Elle oscille à la période P qu'on veut obtenir ; $\psi(P, m, k) = 0$: $N = 3, n = 2$ (T, M) d'où la seule variable réduite $\pi_1 = P\sqrt{\frac{k}{m}} = c$. Le calcul donne $c = 2\pi$. Le fait que la dimension d'une longueur n'intervienne pas est lié à l'absence de toute longueur de référence puisque la force est harmonique quelle que soit l'amplitude du mouvement.

Si le potentiel est anharmonique : $U = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} \alpha x^3$, la période dépend de l'amplitude maximale a ; $\vartheta(P, m, k, \alpha, a) = 0$; $N = 5, n = 3$ (T, M, L) ; les deux termes de U sont homogènes, d'où le choix : $\pi_2 = \frac{\alpha a}{k}$ et la loi :

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \cdot f\left(\frac{\alpha a}{k}\right).$$

Le calcul donne : $f\left(\frac{\alpha a}{k}\right) = 1 + \frac{5}{12}\frac{\alpha a^2}{k}$.

De même, si $U = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{4} \beta x^4$, on obtient :

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \cdot f\left(\frac{\beta a^2}{k}\right).$$

Le calcul donne : $f\left(\frac{\beta a^2}{k}\right) = 1 + \frac{3}{8}\frac{\beta a^2}{k}$. Ce dernier cas est celui du pendule simple de longueur l et d'amplitude ϑ_0 : $\psi(P, m, g, l, \vartheta_0) = 0$. La période est fonction paire de ϑ_0 ; on choisit $\pi_2 = \vartheta_0^2$, d'où :

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}(1 + C_2\vartheta_0^2 + C_4\vartheta_0^4 + \ldots).$$

Le calcul donne : $C_2 = \dfrac{1}{16}$ et $C_4 = \dfrac{11}{3072}$.

Exemple 14 : On considère un solide de révolution de dimension caractéristique R et de vitesse v parallèle à l'axe de révolution se déplaçant dans un liquide de masse volumique ϱ et de viscosité η. Il subit une force de freinage F qu'on se propose d'étudier en fonction de v. On sait que si v est faible, l'écoulement est laminaire ; si v est élevée, il est turbulent. On doit donc pouvoir construire une vitesse critique v_c à partir de R, ϱ et η. Effectivement $[\eta] = \dfrac{M}{LT}$, $[\varrho] = \dfrac{M}{L^3}$, d'où : $\left[\dfrac{\eta}{\varrho}\right] = \dfrac{L^2}{T}$ et

$v_c = \dfrac{\eta}{\varrho R}$, vitesse critique à laquelle on peut comparer v.

Si $v \ll v_c$, on sait expérimentalement que F dépend peu de ϱ ; $\psi(F, v, R, \varrho, \eta) = 0$: $N = 5$, $n = 3$; $[F] = \dfrac{ML}{T^2}$, $[\eta R v] = [F]$.

On choisit donc $\pi_1 = \dfrac{F}{\eta R v}$ et $\pi_2 = \dfrac{v}{v_c}$ (c'est le nombre de Reynolds) d'où :

$$F = C \eta R v f(\pi_2)$$

C dépend de la géométrie du solide : $C = 6\pi$ pour une sphère (loi de Stokes), $C = 16$ pour un disque plat. On prévoit que : $f(\pi_2) = 1 + C_1 \pi_2 + \ldots$ Effectivement : $f(\pi_2) = 1 + \dfrac{3}{8} \dfrac{\varrho R v}{\eta} + \ldots$

Si $v > v_c$, un régime turbulent s'établit et η influe peu. On choisit donc $\pi_1 = \dfrac{F}{\varrho R^2 v^2}$ d'où la loi :

$$F = \frac{1}{2} \varrho R^2 v^2 f\left(\frac{v}{v_c}\right)$$

$f\left(\dfrac{v}{v_c}\right)$ n'est autre que le coefficient de pénétration C_x du solide. Si $v \gg v_c$, la compressibilité du fluide commence à jouer. Alors $N = 6$, $n = 3$: une troisième variable réduite s'introduit, on peut choisir $\pi_3 = \dfrac{v}{v_0}$ (nombre de Mach), v_0 étant la vitesse du son dans le liquide, d'où :

$$F = \frac{1}{2} \varrho R^2 v^2 f\left(\frac{v}{v_c}, \frac{v}{v_0}\right).$$

Exemple 15 : Etudions la vitesse v des vagues à la surface d'un liquide incompressible de masse volumique ϱ et de tension superficielle A. Soit h la profondeur du bassin et λ la longueur d'onde des vagues. Dans le cas général : $\psi(v, \lambda, h, A, \varrho, g) = 0$; $N = 6$, $n = 3$.

Pour une longueur d'onde moyenne ($\lambda_c = \sqrt{\frac{A}{\varrho g}} \ll \lambda \ll h$) la capillarité n'influe pas et on peut supposer la profondeur du bassin infinie. Alors $N = 4$, $n = 3$. On peut choisir $\pi_1 = \frac{v^2}{\lambda g}$ (carré du nombre de FROUDE) d'où $\frac{v^2}{\lambda g} = C$. La théorie donne $v^2 = \frac{\lambda g}{2\pi}$ pour les ondes de gravité (loi d'AIRY).

Pour les grandes longueurs d'onde s'introduit une deuxième variable réduite $\pi_2 = \frac{h}{\lambda}$ d'où :

$v^2 = \frac{\lambda g}{2\pi} f\left(\frac{h}{\lambda}\right)$. Le calcul de KELVIN donne :

$$f\left(\frac{h}{\lambda}\right) = \operatorname{th} 2\pi \frac{h}{\lambda}.$$

Enfin pour les petites longueurs d'onde, s'introduit la variable réduite $\pi_2 = \left(\frac{\lambda_c}{\lambda}\right)^2$ d'où : $v^2 = \frac{\lambda g}{2\pi}\left[1 + C_1\left(\frac{\lambda_c}{\lambda}\right)^2 + \dots\right]$.

Le calcul de KELVIN donne : $C_1 = 4\pi^2$. Remarquons que le produit $\pi_1 \pi_2$ est le carré du nombre de WEBER.

EN GUISE DE CONCLUSION.

La notion d'équation aux dimensions d'une grandeur physique permet d'aborder un grand nombre de problèmes que l'on peut classer en quatre catégories :

1° Le changement de système d'unités et le changement de système de grandeurs fondamentales.

2° La vérification *a posteriori* de la validité des équations (« l'homogénéité des formules »).

3° La prédiction de la forme des lois physiques, d'où :

a) l'écriture des lois avec des variables sans dimension ;

b) la réduction du nombre des variables à envisager dans une vérification expérimentale ;

c) la prédiction des ordres de grandeur (les coefficients numériques étant toujours de l'ordre de l'unité).

4° L'étude du comportement d'un système quand on modifie l'échelle, citons par exemple les applications suivantes :

a) le calcul des périodes du mouvement d'un corps sur des orbites homothétiques ;

b) la construction des maquettes ou modèles réduits, toute simulation devant autant que possible conserver les variables réduites ;

c) les lois d'échelle en zoologie.

On pourra consulter utilement les références suivantes :

W. F. REMILLARD, *American Journal of Physics 51*, 137 (1983).

M. HULIN, *European Journal of Physics, 1*, 48 (1980).

H. LIN, *American Journal of Physics 50*, 72 (1982).

R. GARNIER, B.U.P. n° 511, janvier 1969, p. 589-555.

M. SERRERO, B.U.P. n° 518, octobre 1969, p. 17-24.