A propos de la propagation de l'énergie en acoustique

par P. TANGUY et D. THOUROUDE,
Laboratoire de Théorie des Systèmes Physiques
Université de Rennes I - Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex.

I. INTRODUCTION (EN FORME DE MEA CULPA).

Dans un article précédent intitulé « problèmes énergétiques liés à la propagation des ondes en mécanique » [1], nous avons généralisé aux ondes sonores la méthode d'étude énergétique employée pour les ondes transversales sur les cordes. Malheureusement, une omission existait dans notre manuscrit original. Cette omission a pu passer inaperçue pour le lecteur non averti car le résultat final est juste (oubli d'un terme dans l'expression de l'énergie linéique).

Dans cet article, nous allons donc reprendre les calculs énergétiques concernant la propagation des ondes dans les tuyaux sonores. De plus, nous discuterons les résultats obtenus en comparant notre méthode à celle employée dans les cours classiques.

Bien que le procédé soit inhabituel et puisse être gênant pour le lecteur, nous le renvoyons d'ores et déjà à l'article précité [1] dont nous garderons les notations et les méthodes de raisonnement. Cet article est donc destiné à remplacer et compléter le paragraphe 3 de l'article précité [1].

II. RAPPEL DES NOTATIONS ET EQUATION DE PROPAGATION.

Considérons (fig. 1) un tuyau sonore de section S et d'axe Ox dans lequel se propagent des ondes sonores planes.

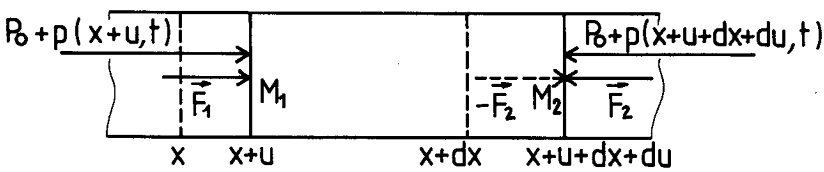

Fig. 1

Nous adopterons les notations habituelles c'est-à-dire :

$$P(x, t) = P_0 + p(x, t),$$

P_0 : pression dans le fluide au repos,

$p(x, t)$: pression acoustique ($|p(x, t)| \ll P_0$),

χ_s : coefficient de compressibilité isentropique du fluide,

ρ_0 : masse volumique du fluide au repos,

$u(x, t)$: déplacement des tranches de fluide,

$v(x, t) \cong \dfrac{\partial u}{\partial t}$: vitesse des tranches de fluide dans l'approximation des petits mouvements (approximation de l'acoustique),

$\vartheta(x, t) = \dfrac{V - V_0}{V_0} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$: dilatation des tranches de fluide.

L'équation de propagation des ondes sonores dans le fluide peut être obtenue soit en appliquant la loi fondamentale de la dynamique à une tranche de fluide déplacée de $u(x, t)$ et dilatée de $\vartheta(x, t)$ (en faisant les approximations convenables) [2] [3], soit en linéarisant dans ce cas simple les lois de la dynamique des fluides [4] [5]. L'équation de propagation s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{1}$$

La célérité de propagation des ondes sonores étant donnée par :

$$C^2 = \frac{1}{\rho_0 \chi_s}. \tag{2}$$

III. PROPAGATION DE L'ENERGIE SONORE DANS LE TUYAU.

L'étude de la propagation de l'énergie dans le tuyau peut être effectuée à l'aide de calculs tout à fait analogues à ceux utilisés pour étudier la propagation de l'énergie le long des cordes vibrantes [1].

a) On commence par calculer l'énergie δW d'une tranche d'épaisseur dx de fluide.

b) On définit la densité linéique d'énergie dans le tuyau et on montre que cette densité linéique d'énergie se propage comme le mouvement c'est-à-dire satisfait l'équation de propagation (1).

c) A partir de l'expression de la densité d'énergie, on peut calculer la puissance instantanée et la puissance moyenne traversant une section d'abscisse donnée du tuyau aussi bien dans le cas de la propagation d'une onde sinusoïdale que dans celui d'un ébranlement quelconque.

d) En comparant la méthode que nous proposons aux méthodes d'étude classiques de la propagation de l'énergie en acoustique, nous pourrons mettre en évidence l'avantage pédagogique que peut présenter notre méthode et mettre en lumière les faiblesses de l'étude classique, faiblesses qui font que l'étudiant moyen a tendance à apprendre un résultat par cœur plutôt que de comprendre le raisonnement physique qui amène à ce résultat.

III.1. Energie d'une tranche de fluide.

La tranche de fluide (fig. 1) qui à l'instant t est déplacée de $u(x, t)$ et dilatée de $\vartheta(x, t)$ reçoit pendant le temps dt de la partie gauche du fluide une énergie égale au travail de la force de pression.

$$\delta\mathcal{T}_1 = \vec{F}_1 \cdot \vec{v}(M_1)\, dt. \tag{3}$$

Pendant ce temps, cette tranche cède à la partie droite du fluide une énergie égale au travail de la force $-\vec{F}_2$. Or, comme dans le cas des cordes vibrantes, le travail de la force $-\vec{F}_2$ est donné par :

$$\delta\mathcal{T}_2 = -\vec{F}_2 \cdot \vec{v}(M_2)\, dt \cong \delta\mathcal{T}_1 + \frac{\partial}{\partial x}(\delta\mathcal{T}_1)\, dx \tag{4}$$

Ainsi pendant le temps dt l'énergie de la tranche de fluide augmente de :

$$\delta^2 W = \delta\mathcal{T}_1 - \delta\mathcal{T}_2 = -\frac{\partial}{\partial x}(\delta\mathcal{T}_1)\, dx. \tag{5}$$

Or $\delta\mathcal{T}_1$ est donné par :

$$\delta\mathcal{T}_1 = S\,[P_0 + p(x + u, t)]\, \frac{\partial u}{\partial t}\, dt \tag{6}$$

soit :

$$\delta\mathcal{T}_1 \cong S\,[P_0 + p(x, t)]\, \frac{\partial u}{\partial t}\, dt \tag{7}$$

car le terme en $S \dfrac{\partial p}{\partial x}\, u\, \dfrac{\partial u}{\partial t}\, dt$ est négligeable dans le cadre de l'approximation de l'acoustique. L'augmentation d'énergie de la tranche de fluide pendant le temps dt est donc la somme de deux termes :

$$\delta^2 W = -S P_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} dx\, dt - S \frac{\partial}{\partial x} \left[p(x,t) \frac{\partial u}{\partial t} \right] dx\, dt. \quad (8)$$

En utilisant la relation (équation physique du milieu) :

$$p(x,t) = -\frac{\vartheta}{\chi_s} = -\frac{1}{\chi_s} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (9)$$

on trouve :

$$\delta^2 W = -S P_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} dx\, dt + \ldots$$

$$\ldots \frac{S}{\chi_s} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right] dx\, dt. \quad (10)$$

Pour obtenir l'énergie $\delta W(x,t)$ de la tranche de fluide d'abcisse x et d'épaisseur dx, il suffit d'intégrer (10) par rapport au temps. L'intégration du 1er terme est immédiate. Par contre, pour intégrer le second terme, nous utilisons une méthode en tous points analogue à celle utilisée pour les cordes vibrantes [1] (qui utilise l'équation de propagation et le fait que l'on peut permuter les dérivations par rapport à x et à t). L'expression obtenue pour δW est alors :

$$\delta W = -S P_0 \frac{\partial u}{\partial x} dx + \ldots$$

$$\ldots \left[\frac{1}{2} \varrho_0 S \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{S}{\chi_s} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx. \quad (11)$$

Par rapport à l'expression correspondante pour les cordes vibrantes, on trouve pour δW un terme supplémentaire : le premier qui est dû au fait que les ondes acoustiques sont longitudinales alors que sur les cordes les ondes sont transversales, ce qui simplifie bien des problèmes.

III.2. **Densité linéique d'énergie dans le tuyau.**

La densité linéique d'énergie dans le tuyau s'obtient directement à partir de (11) : elle est donnée par :

$$E(x,t) = \frac{\partial W}{\partial x} = -S P_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \ldots$$

$$\ldots \left[\frac{1}{2} \varrho_0 S \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{S}{\chi_s} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (12)$$

La densité linéique d'énergie dans le tuyau est la somme de deux termes :

$$E(x, t) = E_1(x, t) + E_2(x, t). \tag{13}$$

Pour montrer que la densité d'énergie se propage comme le mouvement, il suffit de montrer que E_1 et E_2 sont séparément solutions de l'équation de propagation (1) car cette équation est linéaire. Le terme :

$$E_1(x, t) = -S P_0 \frac{\partial u}{\partial x} = -S P_0 \vartheta(x, t) \tag{14}$$

est évidemment solution de l'équation de propagation car toutes les grandeurs caractéristiques de la propagation définies en II ($\vartheta(x, t)$ dans le cas qui nous intéresse) sont solutions de cette équation. (Pour le vérifier rapidement, il suffit de dériver l'équation (1) par rapport à x). Pour montrer que E_2 est aussi solution de l'équation de propagation, on utilise une méthode calquée directement sur celle utilisée pour l'étude de la propagation de l'énergie sur les cordes vibrantes [1]. On calcule $\frac{\partial E_2}{\partial t}$ et $\frac{\partial E_2}{dx}$ et on montre que, en utilisant l'équation de propagation (1), la relation de définition de la célérité (2) ainsi que la propriété de permutation des dérivées par rapport à x et t, on a :

$$\frac{\partial E_2}{\partial t} = \frac{S}{\chi_s} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \right) \tag{15}$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial x} = \rho_0 S \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \right). \tag{16}$$

Comme $\rho_0 S C^2 = \frac{S}{\chi_s}$ on voit immédiatement que E_2 est solution de l'équation de propagation (1). La densité linéique d'énergie dans le tuyau $E = E_1 + E_2$ est donc solution de l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \tag{17}$$

Par conséquent, la densité linéique d'énergie que nous venons de définir se propage comme l'ébranlement correspondant.

III.3. **Valeur moyenne de la densité linéique d'énergie.**

Pour évaluer le flux énergétique transporté par les ondes acoustiques, on calcule la moyenne spatiale de la densité linéique d'énergie. Envisageons deux cas :

a) CAS D'UNE ONDE PROGRESSIVE $u = a \sin \omega \left(t - \frac{x}{C} \right)$.

La moyenne spatiale de E est donnée par :

$$< E > = \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} E\ (x, t)\, dx = \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} E_2 (x, t)\, dt \qquad (18)$$

car le terme $E_1 (x, t)$ est dans ce cas périodique, de période spatiale λ et sa moyenne spatiale est nulle. On trouve alors comme dans l'article précité [1] :

$$< E > = \frac{1}{2} \varrho_0 S a^2 \omega^2 \qquad (19)$$

et pour l'intensité acoustique de l'onde :

$$I = \frac{C < E >}{S} = \frac{1}{2} \varrho_0 C a^2 \omega^2 \qquad (20)$$

comme il convient.

b) CAS D'UN ÉBRANLEMENT PROGRESSIF QUELCONQUE.

Considérons un ébranlement progressif quelconque :

$$u = f \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

pour lequel, à l'instant t, le fluide du tuyau compris entre les abscisses s et $s + l$ est perturbé. La moyenne spatiale de la densité linéique d'énergie est alors :

$$< E > = \frac{1}{l} \int_s^{s+l} E_1 (x, t)\, dx + \frac{1}{l} \int_s^{s+l} E_2 (x, \mathrm{t})\, dt. \qquad (21)$$

Là encore, il est facile de voir que la moyenne de E_1 est nulle ; en effet :

$$< E > = - \frac{1}{l} \int_s^{s+l} S P_0 \frac{\partial u}{\partial x} dx = \ldots$$

$$\ldots - \frac{S P_0}{l} [u (s + l) - u (s)] = 0 \qquad (22)$$

car, par définition même de l'ébranlement, $u(x, t)$ est partout nul sauf si $s < x < s + l$. Ainsi, comme dans le cas d'une onde sinusoïdale, la moyenne spatiale de la densité linéique d'énergie se réduit à $< E_2 >$ c'est-à-dire à :

$$< E > = \frac{1}{l} \int_s^{s+l} \dots$$

$$\dots \left[\frac{1}{2} \varrho_0 S \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{S}{\chi_s} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx \tag{23}$$

mais la valeur de cette expression dépend de la forme de l'ébranlement.

Dans les deux cas, la puissance moyenne qui traverse une section S d'abscisse fixe dans le tuyau est donnée par :

$$C < E > = C < E_2 >, \tag{24}$$

le terme en E_1 ne contribuant pas à cette puissance moyenne. Par contre, qu'il s'agisse d'une onde sinusoïdale ou d'un ébranlement, la puissance instantanée traversant la section S considérée fait intervenir le terme en E_1.

Etant donné que seules les puissances moyennes sont prises en considération en acoustique, on peut très bien dire que la densité linéique d'énergie dans le tuyau se limite au terme E_2 *après avoir expliqué pourquoi le terme en* E_1 *n'intervient pas* dans la propagation de l'énergie.

III.4. **Remarques sur les méthodes classiques.**

Les méthodes classiques d'étude de la propagation de l'énergie dans les ondes acoustiques [2] [3] [4] sont toutes basées sur le même principe : on y calcule l'énergie cinétique d'un élément de fluide de section S et de longueur dx et on trouve naturellement :

$$dE_c = \frac{1}{2} \varrho_0 S \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx. \tag{25}$$

Ensuite, pour obtenir l'énergie totale de l'élément, on tente d'exprimer son énergie potentielle. Au lieu d'écrire que l'énergie potentielle de l'élément considéré est égale au travail qu'il peut fournir au milieu extérieur en revenant à l'état de repos ($V = V_0 = S\,dx$, $\vartheta = 0$), ce qui donnerait pour dE_p la valeur :

$$dE_p = \int_v^{v_0} P\,dv = \int_\vartheta^0 [P_0 + p(x, t)]\, V_0\, d\vartheta \tag{26}$$

soit :

$$dE_p = -P_0 S \vartheta\, dx + \frac{1}{2}\,\frac{S}{\chi_s}\,\vartheta^2\, dx\,; \tag{27}$$

puisque :

$$p = -\frac{\vartheta}{\chi_s}, \qquad V_0 = S\, dx \qquad \text{et} \qquad V = V_0(1+\vartheta)\,;$$

on écrit simplement :

$$dE_p = \int_{\vartheta}^{0} p(x,t)\, S\, d\vartheta\, dx = \frac{1}{2}\,\frac{S}{\chi_s}\,\vartheta^2\, dx. \tag{28}$$

Ce procédé nous semble présenter plusieurs inconvénients :

a) Cela peut entraîner des confusions dans l'esprit des étudiants en ce qui concerne le calcul du travail des forces de pression, calcul qui est omniprésent en thermodynamique.

b) En choisissant pour dE_p l'expression (28), on fait implicitement une convention sur l'origine de l'énergie potentielle. En mécanique rationnelle, cette énergie est définie à une constante près. Or, dans le cas qui nous intéresse, cette « constante » est $-P_0 S \dfrac{\partial u}{\partial x}$; elle dépend à la fois de l'espace et du temps !

c) En étudiant les milieux continus à l'aide de la formulation lagrangienne, GOLDSTEIN [6] est amené à calculer la densité d'énergie cinétique et la densité d'énergie potentielle afin d'obtenir l'équation de propagation. On constate qu'il obtient pour la densité d'énergie potentielle la même expression que (27) (aux différences de notation près) ; c'est-à-dire la même expression que celle que nous avons trouvée. De plus, lorsque GOLDSTEIN [6] dérive l'équation de propagation à partir de la densité lagrangienne il trouve que le terme $-P_0 S \vartheta$ n'intervient pas dans l'équation de propagation (1) et ne doit donc pas participer à la propagation de l'énergie.

IV. CONCLUSION.

Nous pensons, qu'une fois encore, nous venons de montrer que l'étude de la propagation des ondes longitudinales en mécanique requiert un soin particulier. La méthode mécanique que nous proposons pour l'étude de la propagation de l'énergie évite les écueils précédemment cités, sources de bien des confusions dans l'esprit des étudiants. C'est pour cette raison que dans notre étude énergétique, nous avons parlé de densité d'énergie sans chercher à séparer énergie cinétique et énergie potentielle.

Dans un ouvrage précédent [7] nous avons d'ailleurs noté que la notion d'énergie potentielle est une notion très délicate surtout quand on veut l'utiliser pour étudier par une méthode énergétique le mouvement des systèmes déformables et il est bien évident que la propagation des ondes en mécanique est due aux déformations du milieu qui leur sert de support.

En procédant de la façon que nous venons d'exposer, nous pensons aussi faire comprendre aux étudiants qu'il n'y a pas deux mécaniques, l'une dite rationnelle, l'autre dite physique, mais que les mêmes lois ont valeur universelle ; seules les approximations dans les problèmes complexes de ces deux disciplines diffèrent.

REMERCIEMENTS.

Nous remercions vivement Monsieur le Professeur BARRAT (Université de Caen) ainsi que Monsieur le Professeur LE ROUX (Université de Rennes) pour leurs judicieuses suggestions.

REFERENCES

[1] P. TANGUY et D. THOUROUDE, B.U.P. n° 617, p. 49 (1979).

[2] G. BRUHAT, *Mécanique.* Masson, Paris (1961), pp. 520-521.

[3] P. FLEURY et J. P. MATHIEU, *Vibrations mécaniques et acoustique.* Eyrolles Paris (1968).

[4] M. SOUTIF, *Vibrations, propagation, diffusion.* Dunod, pp. 117-124.

[5] P*roblème de C.A.P.E.S.* - 1973.

[6] H. GOLDSTEIN, *Mécanique classique,* P.U.F., Paris (1964), pp. 385-389.

[7] P. TANGUY et D. THOUROUDE, *Les théorèmes généraux de la mécanique,* Tome 2, Mc Graw Hill (1982).