Critères de pertinence en Sciences Physiques l'homogénité : Invariance newtonienne

par Marc SERRERO,
L.D.P.E.S. Paris VII.

Dans un article antérieur (*) a été évoquée la notion de critère de pertinence et d'attitude active vis-à-vis de ce critère (note 1). Rappelons qu'un critère de pertinence est souvent une propriété P que doit posséder « *a priori* » le résultat. Si ce résultat ne la possède pas, il est donc FAUX.

Parmi les caractères les plus contraignants concernant la forme du résultat dus à tel ou tel critère figurent ceux d'INVARIANCE PAR RAPPORT A UN GROUPE DE TRANSFORMATIONS.

Parmi les plus simples de ces invariances, figure la notion d'HOMOGÉNÉITÉ.

Ecartons provisoirement ici les notions très intéressantes que sont l'invariance par rapport à la base de numération, l'invariance tensorielle, l'homogénéité infinitésimale, renvoyant à un autre article ; et focalisons notre attention sur le caractère arbitraire du choix des unités de mesure, c'est-à-dire sur l'HOMOGÉNÉITÉ DIMENSIONNELLE.

Dans une première partie, nous rappellerons le statut de l'Analyse Dimensionnelle et le théorème fondamental de cette étude : le théorème PI de VASCHY-BUCKINGHAM.

Dans une deuxième partie, nous en montrerons l'utilité.

Nous avons rejeté en notes des réflexions importantes pour nous, mais non essentielles, pour faire bref.

I. ANALYSE DIMENSIONNELLE (A.D.) :

Substituer à la simple vérification d'homogénéité du résultat l'attitude active consistant à prévoir la forme du résultat

(*) Voir article précédent page 1229.

conduit à pratiquer l'Analyse Dimensionnelle. Le plan sera le suivant :

Après un rappel historique succinct (*i*), on montrera comment la notion de grandeur mesurable liée à celle d'INVARIANCE NEWTONIENNE introduit la notion d'équations aux dimensions (*ii*). Le théorème de VASCHY-BUCKINGHAM s'en déduit (*iii*). Le théorème PI restreint présentera une version minimale adaptée au secondaire.

i) **Rappel historique :**

« Les relations de la physique décrivent une réalité indépendante des unités, c'est-à-dire invariante par rapport au groupe de changements d'unités ». NEWTON dégage cette idée dans les *Principia.* Aussi parlerons-nous de ce principe de relativité sous le nom d'invariance newtonienne (note 2). FOURIER définit la notion d'équations aux dimensions (note 3). La théorie se développe avec la mécanique des fluides. Elle se formalise avec MAXWELL et culmine avec RAYLEIGH (note 4). Son succès dû à son caractère trandisciplinaire est fulgurant mais la foudroie elle-même : on lui fait dire plus qu'elle ne peut [querelle RAYLEIGH-RIABOUSHINSKII (note 5)]. Des théorèmes faux apparaissent (toutes les relations de la physique seraient monômiales ! On retrouve les errements du 18e siècle où toutes les fonctions étaient polynômiales via le développement de TAYLOR !) Des exercices académiques fleurissent (convertir des British Thermal Units en joules, dear God !) La querelle des systèmes d'unités fait rage (CGSés contre MKSA). Le statut des constantes fondamentales vacille (suppression de la constante J, métamorphisme ; nous y reviendrons). La lutte est si âpre dans les années 50 que le « Concile de Paris 1960 » décide la trêve. Les systèmes trépassent, la physique passe. Les bons physiciens gardent un goût amer de ces luttes et se détournent avec un peu de dédain de l'A.D.

Néanmoins on a bien réalisé que l'invariance newtonienne n'était que la VERSION DUALE DE L'INVARIANCE PAR SIMILITUDE PHYSIQUE. Changer d'unités c'est dual de faire une maquette. On cherche donc le groupe d'auto-similitude maximal d'un système d'équations, et plus généralement son groupe d'invariance maximal, sujet encore d'actualité : travaux de BLUMAN et COLE ; SPENCER et POMMARET ; HALE ; GRAY ; etc. A quand leur introduction dans un cursus universitaire ?

Conclusion : Les plus de quarante ans ont rejeté l'A.D. Les moins de quarante la méconnaissent. Vingt-cinq ans après, ne rallumons pas la guerre des unités. Parlons d'AUTO-SIMILITUDE ou d'INVARIANCE NEWTONIENNE : cela est plus clair.

ii) **Grandeur mesurable et invariance newtonienne :**

Nous ne saurions refaire ici un cours sur l'A.D. et nous renvoyons à la note 7. Pour faire bref, rappelons seulement que mesurer une grandeur G c'est la comparer à une autre de même espèce prise pour référence : $G = g \cdot G_0$ avec $g \in \mathbb{R}$. Donc, si $G = g \cdot G_0$ et $G'_0 = k \cdot G_0$, alors $G = g' \cdot G'_0$ avec $g' = g/k$. Tout cela pour dire qu'une règle dont la mesure en mètre est : 2,50, a pour mesure en cm : 250. D'où il suit aussi que le rapport de 2 grandeurs de même espèce est INVARIANT par tout changement d'unités.

Le principe d'invariance newtonienne stipule alors que toute loi physique doit être covariante par rapport au changement de RÉFÉRENTIEL D'UNITÉS. Soit par exemple, dans un référentiel d'unités R, une grandeur g fonction de deux grandeurs x_1 et x_2, de même dimension ; dans R', on aura $g' = f'(x'_1, x'_2)$, avec $g' = g/\lambda$, $x'_1 = x/\mu$ et $x'_2 = x/\mu$, ceci quel que soit R' : ceci exige une relation entre λ et μ. Une démonstration classique donne alors ce RÉSULTAT FONDAMENTAL $\lambda(\mu) = \mu^n$ (note 8). De même, si la grandeur g est fonction de quantités $x_1, x_2, ..., y_1, y_2, ..., z_1, z_2, ...$, les x, y et z étant des grandeurs d'espèces différentes, alors $\lambda(\mu, \nu, \varrho) = \mu^n \nu^p \varrho^q$. Le triplet (n, p, q) s'appelle les coordonnées de dimension ou exposants de dimension de la grandeur g. S'il y a 3 exposants, on dit qu'on a affaire à un référentiel à 3 unités de base.

Remarque capitale : Ce nombre 3 n'a rien d'absolu. Il peut être plus réduit, plus grand. La recherche de la base maximale est DÉLICATE et exige beaucoup de physique : c'est le péché mortel de l'A.D. que de vouloir en faire un *a priori* absolu, car il dépend du problème étudié.

iii) **Théorème de PI de Vaschy-Buckingham :**

Il faut bien percevoir que le caractère d'unités fondamentales et d'unités dérivées est relatif. Dans un système de base égale à 3, 3 grandeurs dimensionnellement indépendantes (dim. indépendantes) peuvent être choisies comme base (par exemple au lieu de la masse, de la longueur et du temps, on peut prendre l'énergie, la longueur et la viscosité). La physique est invariante par changement de référentiel d'unités ET par changement de base.

Soit alors une relation $f(x, y, z, ...) = 0$, entre n grandeurs physiques de rang p-dimensionnel. Alors la relation peut s'écrire : $\Phi(\pi_{p+1}, ..., \pi_n) = 0$, c'est-à-dire une relation entre n-p monômes sans dimensions construits à l'aide des x, y, z,... La démonstration est simple : il suffit de prendre les p premières grandeurs dim-indépendantes comme unités de base, de compléter la base par *k-p* autres si le référentiel est de dimension *k* et le tour est joué.

Il n'y a aucune magie là-dessous ; il suffit d'avoir bien à l'esprit ce qu'est un espace vectoriel. La brièveté du discours est ici confondante, surtout eu égard à la puissance extraordinaire du théorème obtenu.

Le théorème PI réduit de $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^{n-p}$ l'espace de la variété à étudier.

iv) **Version minimale pour le secondaire :**

Il n'est point question d'asséner tout cela à un élève de secondaire. Tout cela est trop vite dit pour être très clair. Un cours d'A.D. un peu sérieux est nécessaire pour un élève-professeur ; il est inadéquat pour un bachelier. Voici ce que nous proposons, mais cela reste une opinion : les collègues en seront juges. 1) Un bachelier doit savoir ce que veut dire HOMOGÉNÉITÉ d'une formule. 2) Un bachelier doit connaître la forme restreinte du théorème PI, à savoir : dans un référentiel 3-dimensionnel (MKS par exemple), si *g* est une fonction de 3 grandeurs dim-indépendantes, alors *g* est une fonction monôme de ces trois grandeurs ; de plus ce monôme est connu et unique.

L'objectif 1 est quasiment acquis. L'objectif 2 est plus ambitieux, mais déjà très performant. Pour l'atteindre en 3 ans de 2e cycle, il faudrait que soit progressivement dégagé, de façon non théorisée, ce fait empirique : toute unité dérivée du système S.I. s'exprime sous forme monôme : $m.s^{-2}$; $kg.m.s^{-2}$; $kg.m^{-1}.s^{-2}$, etc. et jamais autrement. L'élève admet fort bien de se passer de démonstration, vu qu'en général il ne s'est jamais posé la question. Tout au plus, le professeur scrupuleux fera-t-il allusion à ce que la raison profonde en est l'INVARIANCE NEWTONIENNE : « un phénomène physique est indépendant du référentiel d'unités choisi pour le décrire » (note 9). De façon progressive et non systématique, les élèves seraient entraînés à des conversions usuelles de multiples ou sous-multiples du système S.I., voire des km/h en m/s (note 10). La notion d'homogénéité serait ainsi affermie. En Terminale, seraient placées 2 heures de cours et d'exercices explicitement sur la notion d'homogénéité, que l'on pourrait situer en milieu d'année après la mécanique (note 11).

II. APPLICATIONS :

Le théorème PI est d'importance capitale. Il explique pourquoi quasiment toutes les formules du bac sont monômiales. Connaître ce théorème permet de retrouver beaucoup de formules au coefficient numérique près.

Remarque fondamentale : Le monôme $a^n b^p c^q$ homogène à la grandeur g est unique. Il suffit donc de l'exhiber, quelle que soit la méthode. Certes, le recours aux équations de dimensions est systématique et sûr, mais il est très lourd. On ne procède quasiment jamais ainsi sauf par ordinateur (note 12). N'importe quelle « jonglerie » à partir de formules connues (justes) est préférable avec un peu d'habitude (note 13). Nous allons pour être explicite donner quelques exemples :

Je veux la formule du pendule simple $T = f(l, g)$. Je pense à la formule $z = 1/2.\, g\, t^2$, et hop : $T = 2\pi \sqrt{l/g}$.

Je veux la longueur d'onde de COMPTON $\lambda = f(h, m, c)$. Je pense à $\lambda = h/p$ (dualité de DE BROGLIE) et $p = mc$, et hop : $\lambda = h/mc$.

Je veux la pulsation cyclotron $\omega = f(q, B, m)$. Je pense $\omega = v/R$ et $F = mv^2/R = qvB$, et hop : $\omega = qB/m$.

Je veux la célérité du son $v = f(RT, M)$. Je pense $1/2\, mv^2 = 3/2\, kT$ et j'obtiens la formule de NEWTON. Si, de plus, j'ai en mémoire la notion d'adiabaticité, la formule de LAPLACE $v = \sqrt{\gamma RT/M}$ ne me reviendra pas forcément pour autant : c'est là la limite de la méthode : elle ne donne aucun facteur numérique. D'autre part, elle n'est d'aucun secours pour $i = \lambda D/a$ ou bien $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

UTILE, L'A.D. N'EST PAS UNE BAGUETTE MAGIQUE.

Ceci dit, ayant clairement à l'esprit ses limites, ses outrances, ses dangers, vous pourrez vous-même vous convaincre de sa puissance en inventant des dizaines d'exemples. Au congrès de Reims, pour les professeurs, nous avions distribué la feuille (note 14).

Remarque cruciale : NE FAITES PAS DIRE A L'ANALYSE DIMENSIONNELLE PLUS QU'ELLE NE PEUT DIRE. Il faut au préalable connaître les paramètres dont dépend le résultat. Ainsi l'A.D. ne se conçoit-elle qu'après la mise en équations. Il y aurait MÉPRISE à vouloir pratiquer l'A.D. avant de faire de la physique (note 15).

D'autre part, il est clair que si l'on pouvait augmenter le nombre d'unités indépendantes à 4 ou à 5, on gagnerait en puissance. Or, combien y a-t-il d'unités de base ? L'A.D. a failli succomber à cette question ! Car la réponse est : ça DÉPEND. D'abord, parce que vous pouvez décréter que l'A.D. ne vous intéresse pas et que vous ne vous préoccuperez jamais de l'homogénéité de vos formules. Une telle attitude, oh combien décevante, est celle qui prévaut en chimie où la querelle des unités a tellement fait rage que ce repli prudent et frileux a été jugé sage (note 16). Au contraire, vous pouvez être maximaliste, mais alors il faut bien savoir que le nombre maximal d'unités indépendantes DÉPEND DU PROBLÈME SPÉCIFIQUE que vous étudiez et PAS DE CONVENTIONS fussent-elles internationales. Cela ramène à la question du groupe de similitude maximal évoqué au début (note 17). Cela ramène aussi à la subtile question du métamorphisme des constantes fondamentales de la physique (note 18).

III. CONCLUSION :

Dans ces quelques pages, nous avons tenté la gageure suivante : réhabiliter l'Analyse Dimensionnelle comme Critère de Pertinence. Ainsi doit-elle se placer après la mise en équations du problème. La placer sitôt la simple paramétrisation est une attitude pragmatique souvent efficace mais sujette à caution. L'A.D., vraisemblablement peu utile en recherche, y est constamment sollicitée sous une forme plus élaborée : le raisonnement en ordres de grandeurs LITTÉRAUX (note 19). Au niveau de l'enseignement, il convient surtout de DISSOCIER les problèmes de métrologie liés au S.I. et la notion d'auto-similitude liée à l'A.D. Chacun reconnaît aisément que les exercices académiques de changements de systèmes d'unités n'ont qu'un intérêt restreint par rapport à l'INVARIANCE NEWTONIENNE que traduit la notion d'homogénéité. Personne ne songerait à faire peiner excessivement les élèves sur des changements numériques de bases et de référentiels galiléens : c'est l'invariance galiléenne qu'il faut faire passer. De même, foin des changements de bases et de référentiels d'unités : c'est l'INVARIANCE NEWTONIENNE qu'il faut faire passer et sa conséquence, l'homogénéité et le théorème PI. Aux collègues d'en débattre.

Je me fais un plaisir de remercier ici Laurence VIENNOT, du Laboratoire de Didactique Paris VII, pour son soutien amical et éclairé.

Notes complémentaires :

1) *Confer* article du B.U.P. sur CRITÈRES DE PERTINENCE EN PHYSIQUE, dans ce numéro page 1229.

2) NEWTON (*Principia* ; II ; propos. 32) utilise ce fait plus qu'il ne le dégage. En fait, GALILÉE avant lui l'avait utilisé aussi, mais aussi les Arabes, les Grecs et les Mésopotamiens, bref tous ceux qui avaient à évaluer des volumes pour mesurer des sacs de grains. Je remercie Jim RITTER (Histoire des fractions, fractions d'histoire, C.N.R.S. janv. 1987) pour ces précisions entre système de numération, homogénéité et métrologie. INVARIANCE NEWTONIENNE ? au fond, peu nous importe le nom.

3) FOURIER (Théorie de la chaleur ; chap. II ; sec. 9) est très conscient du caractère auto-similaire de son équation par rapport à x/t^2. Néanmoins, il faut attendre EINSTEIN (1905) pour relier cela à la marche brownienne, puis CALLEN-KUBO-MORI pour voir la relation avec le théorème de fluctuation-dissipation et au-delà avec la théorie du potentiel, puis de l'équation de SCHRÖDINGER. Il y a là tout un secteur fascinant de recherches encore actuelles.

4) MAXWELL est celui qui comprend le plus vite tout l'intérêt de la méthode. Il a déjà la maîtrise du calcul fonctionnel (évoquons seulement ici sa magistrale démonstration de la loi de distribution des vitesses dans un gaz). Rappelons aussi qu'il crée la première théorie de jauge avant la lettre.

RAYLEIGH utilise la notation de MAXWELL partout et surtout en mécanique des fluides et en acoustique.

5) La querelle RAYLEIGH-RIABOUSHINSKII est restée célèbre dans les annales de l'A.D., car elle obligea la théorie à sortir de son statut métaphysique et contribua à lui donner des fondements solides, à savoir : l'A.D. NE DÉPEND PAS D'UNE CONVENTION INTERNATIONALE MAIS DU PROBLÈME PARTICULIER QUE L'ON CONSIDÈRE. On peut toujours certes utiliser un sous-groupe du groupe maximal d'auto-similitude ; l'A.D. est simplement moins puissante. *Confer* l'excellente étude de R. SAINT-GUILHEM : Principes de l'A.D. (Gauthier-Villars 1962).

6) Le *journal officiel* de la République Franç. du 20 mai 1961 proclame l'instauration du système S.I. L'historique de cette lutte entre physiciens et ingénieurs devrait faire l'étude d'une thèse d'histoire des Sciences et épistémologie, car on ne s'est pas battu pour des riens. Instaurer un système d'unités c'est créer des blocages épistémologiques profonds, car implicites, lourds de conséquences. Allez de nos jours persuader un élève qu'un champ magnétique c'est la « même chose » qu'un champ électrique au sens où chaleur et travail c'est la « même chose » : la pratique de mesurer un champ électrique en tesla n'est plus à la mode. Néanmoins chaque système avait ses avantages : aussi bien voit-on cohabiter les 2 systèmes dans les laboratoires. Inversement, on peut se déclarer satisfait d'avoir à mesurer la masse en kilogramme et le poids en newton, réalisant *de facto* un clivage profond entre les 2 concepts (même si par ailleurs on sait qu'il faudra encore longtemps pour déloger le raisonnement spontané qui assimile poids et masse).

7) Un cours sur l'A.D. ou l'auto-similitude est forcément long et un peu lourd. Les cours anciens sont malheureusement entachés du défaut suivant : cherchant par souci d'universalité un

groupe d'auto-similitude commun à tous les problèmes, les auteurs se sont très vite penchés sur le statut des unités et des unités « dérivées », et ont donc cherché le « meilleur » système d'unités, question fort louable mais qui fait intervenir de toutes autres considérations, d'ordre métrologique, qui n'ont rien à voir à l'affaire et ont embrouillé le sujet durant de longues années. Quand arrivera-t-on donc à persuader un professeur de physique qu'un phénomène n'a VRAIMENT RIEN A VOIR AVEC LE PAVILLON DE BRETEUIL et qu'en conséquence mesurer par exemple la longueur d'un pendule simple en mètre est une hérésie théorique : on se demande bien ce que viendrait faire en l'occurence la radiofréquence du césium 133 et la convention de 1983 de poser $c = 299\ 792\ 458$ m/s par définition. L'idée essentielle de l'A.D. est donc celle-ci : chaque problème de physique renvoie à son PROPRE SYSTÉME DE RÉFÉRENCE et n'établit que des relations entre rapports de ses PROPRES GRANDEURS. Le meilleur cours d'A.D. est, pourrais-je dire, celui d'EUCLIDE, livre V et celui de ses disciples de l'école d'algèbre-géométrique ; je plaisante à peine. Quelques très bons articles ont été écrits par Michel HULIN, actuel directeur du Palais de la Découverte. L'ouvrage de référence reste à mon sens celui de SEDOV : Similitude et Dimensions en mécanique (Ed. Mir 1977). L'opuscule cité de SAINT-GUILHEM est excellent aussi mais mieux vaut alors se pencher sur les théories du groupe d'auto-similitude d'un système d'équations : BLUMAN-COLE, etc.

Ici, nous nous conformons à la tradition maid en quelques pages, c'est un peu une gageure.

8) Si $f(x_1, x_2) = \lambda(\mu)\ f'(x_1/\mu, x_2/\mu)\ \ \forall\ \mu \in \mathbb{R}$ alors :

$$\mu = 1 \Rightarrow \lambda(1) = 1$$

et :

$$f \equiv f'.\ \text{Puis}\ f(\vec{X}) = \lambda(\mu)\lambda(\vec{X}/\mu\nu) = \lambda(\mu\nu)\ f(\vec{x}/\mu\nu) \Rightarrow$$

$$\lambda(\mu\nu) = \lambda(\mu)\lambda(\nu)\ \text{d'où il suit}\ \lambda(\mu) = \mu^n,\ n \in \mathbb{R}.$$

Ici se greffe une question très à la mode, à laquelle je ne sais pas répondre depuis des années : clairement n n'est pas un entier, même relatif ; jusqu'en 1972 environ, n était rationnel simple au sens de DALTON. Or sont apparues les fractales ; alors n réel ? réel transcendant ? imaginaire ? p-adique ? etc. J'avoue qu'ici ma raison vacille, de même que je n'arrive pas à me représenter une fonction de n variables, $n \in \mathbb{R}$. Revenons sur Terre, voulez-vous ?

9) Il s'agit là du *leitmotiv* fondamental. Alors comme la répétition fixe la notion, je le redis encore une fois : la masse d'un pendule simple ne se mesure pas en kilos, fût-ce de platine iridié. Irritant n'est-ce pas et pourtant capital : le PAVILLON

DE BRETEUIL N'A RIEN A VOIR AVEC UN PROBLÈME DE PHYSIQUE PARTICULIER.

10) Attention : j'ai bien dit conversions usuelles, non systématiques, non au programme officiel, mais au programme implicite des objectifs à atteindre. Il m'importerait beaucoup de savoir chiffrer ce que nous coûte actuellement en temps de travail de tels objectifs « implicites », surtout compte tenu de l'abandon relatif d'un tel travail par nos collègues mathématiciens. (On ne dira jamais assez combien la coupure math-physique des années 60 a reporté de charges sur le physicien-chimiste, un peu las d'enseigner les math dont il a besoin). Actuellement, utiliser des conductivités équivalentes en $S.m^2.mol^{-1}$, avec une constante de cellule en cm^{-1} et des concentrations en mol/l est une réelle difficulté en math. sup. Regrettable certes, mais je ne déraperai pas : je ne prône pas une étude systématique des changements d'unités.

11) Si des collègues sont intéressés, je veux bien, avec eux, essayer d'établir une leçon type Agrég. ou C.A.P.E.S. sur le sujet suivant : DIMENSION D'UNE GRANDEUR ; HOMOGÉNÉITÉ D'UNE FORMULE ; PRINCIPE D'INVARIANCE NEWTONIENNE ; soit 50', suivi de 50' d'exercices ; niveau math. sup. ou term. C.

12) Le programme est très simple à réaliser puisqu'il s'agit juste d'inverser une matrice 3-3 en général. Faites en plus un petit sous-programme qui vous permette d'écrire un décimal simple sous forme de fraction. Agencez votre logiciel de manière à le rendre inertactif et portable. Mieux : logez-le dans une calculette-basic et vous aurez pratiquement les résultats du bac : input l, (L), input g, (L/T/T), print t, (T), et la machine vous indiquera $t = k.\sqrt{l/g}$; avec t en s, l en m et g en m/s^2. Vous aurez réalisé une VRAIE calculatrice scientifique. Depuis 1977, c'est-à-dire l'article de STOUTMEYER in journal of computer physics, 24, 141 (1977), on attend un constructeur intéressé. Qui veut faire fortune ?

13) Honnêtement, je ne sais pas ce que veut dire cette phrase. Pratiquement, mes bons élèves la comprennent. Mes mauvais préfèrent la calculette scientifique préprogrammée comme je l'ai dit. Où est la vérité ? Pour moi, la calculette ne me sert pas pour 7 * 8 = 56 ; de $\hat{m}$ pour :

$$Z = 1/2\ gt^2 \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{l/g}.$$

Par contre je l'utilise pour 0 • 12 * 1,7 = 0.204 ; de $\hat{m}$ elle me sert pour avoir $x = (E\ t^2/\varrho)^{1/5}$ (*confer* exercice 3 ci-après). Que veut dire : il est préférable avec un peu d'habitude d'être autonome par rapport à son logiciel ? Je ne suis certainement pas le premier à me poser cette question déontologique : la prolifération de logiciels performants me laisse perplexe et songeur ; les utiliser performe mon enseignement mais où s'arrête la laïcité ?

14) Le théorème PI restreint :

Enoncé : Si g est une fonction de 3 grandeurs a, b, c dimensionnellement indépendantes, alors :

g est une fonction monôme de a, b, c.

La démonstration utilise le lemme suivant :

Lemme : soit a, b, c dim. indépendantes, l'application :

$$a, b, c \rightarrow h(a, b, c)$$

est une constante si h est une grandeur sans dimension.

En effet par grandeur sans dimension nous voulons dire invariante par changement d'unités. Or dans de tels changements d'unités, a, b et c varient indépendamment (c'est ce que veut dire dim. indépendants).

Donc $\forall\ a, b, c,\ h(a, b, c)$ garde la même valeur C.Q.F.D.

Remarque : Attention, ce lemme n'était pas une trivialité ; toute fonction sans dimension n'est pas forcément une constante. Exemple $(a^2 + b^2)/ab$; mais ici a et b ont même dimension. L'hypothèse a, b, c dim. indépendantes est donc essentielle.

La démonstration est maintenant la suivante :

Soit $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ LE monôme homogène à la grandeur g (qu'il est possible de trouver car a, b, c sont dim. indépendantes).

$g(a, b, c)$ peut toujours se réécrire $a^\alpha b^\beta c^\gamma * h(a, b, c)$ où $h(a, b, c)$ désigne maintenant une fonction sans dimension. D'après le lemme c'est une constante ; ce qui démontre le théorème.

Exercice 1 :

Soient les trois grandeurs suivantes : M masse de la Terre, R rayon de la Terre, et G constante gravitationnelle. Donner une accélération g^0, une vitesse v^0, et une pulsation ω^0 en fonction de M, R, G. Comparer ces unités aux résultats suivants : accélération de la pesanteur, période d'un satellite basse altitude, première et deuxième vitesse cosmique.

Réponse : On a rapidement :

$g^0 = G \cdot M/R^2$; $v^0 = \sqrt{g^0 \cdot R} = \sqrt{G \cdot M/R}$ et $\omega^0 = \sqrt{G \cdot M/R^3}$.

Ensuite $g = g^0$; $T = 2 \cdot \pi/\omega^0$; $v_1 = v^0$ et $v_2 = v^0 \sqrt{2}$.

Ainsi dans ce système d'unités naturelles au problème appelé système de SCHÜLER, tous les résultats sont de l'ordre de grandeur de 1.

Exercice 2 :

En électricité, R, L, C étant les symboles habituels et T une période, donner les relations $T = f(L, R)$ ou $f(L, C)$ ou $f(R, C)$.

B étant un champ magnétique, et a une longueur, on va faire l'analogie électricité-mécanique dite gyroscopique : montrer que, avec des notations usuelles,

$$I = f(B, a, F) ; \quad E = f(B, a, v) ; \quad L = f(B, a, k) ; \quad R = f(B, a, \lambda) ;$$
$$l/C = f(B, a, m).$$

Maintenant, résoudre cet exercice classique : une barre de masse m est posée sur deux rails parallèles distants de a, placés dans un champ B vertical. Les deux rails sont connectés à un générateur de f.é.m. E et de résistance R. Trouver la vitesse de la barre. On trouvera $v = v^0 \cdot (1 - \exp - t/\tau)$ avec $v^0 = E/B \cdot a$ et $\tau = R \cdot C$. Réinterpréter l'énoncé à l'aide de l'analogie gyroscopique comme une simple décharge de condensateur.

Réponse : L/R ; $\sqrt{LC}$; RC ; $I = (Ba/F)^{-1}$; $E = BaV$; $L = B^2a^2/k$; $1/c = B^2a^2/m$.

Maintenant, dites tout de suite pourquoi, pour augmenter le moment d'inertie d'un galvanomètre, la méthode utilisée est de placer un fort condensateur en parallèle (galvabalistique).

Exercice 3 :

Voici maintenant un exercice donnant la puissance de la méthode même dans un cadre théorique inconnu. On donne le rayon de la « boule de feu » d'une bombe atomique en fonction du temps $x = A \cdot t^{2/5}$. Sachant que $x = f(E, \varrho, t)$ où E est l'énergie de la bombe et ϱ la masse volumique de l'air, trouver l'énergie de la bombe sachant que les mesures donnent A = 580 S.I.

Réponse : On trouve aisément $x = \left(\dfrac{E}{\varrho} t^2\right)^{1/5}$ par le « bidouillage » suivant : $E = mV^2 = m\,x^2/t^2 = \varrho\,x^5/t^2$ donc $x = (E/\varrho\,t^2)^{1/5}$. On en tire un ordre de grandeur $E = \varrho \cdot A^5$. La théorie exacte donne un coefficient 0,8 devant après pas mal d'équations différentielles. Anecdotiquement, signalons que, en 1950, TAYLOR publia ce « secret-défense » dans un journal quelques jours après la parution des photos de la « boule de feu », déclassées « confidentiel-défense » .

Maintenant, à vous de jouer, si j'ose dire : On lance un tapis de bombes d'énergie E, distantes les unes des autres de a ; cette fois un « tapis de feu » va s'élever selon la loi $z = f(t)$; on demande cette loi.

Réponse : $z = (\mathrm{E}\, t^2/\varrho a^2)^{1/3}$. Vous voilà expert en bombes A.

Exercice 4 :

Construire les principales unités de la physique à l'aide de la constante de PLANCK $\hbar$, la masse de l'électron m, et la vitesse de la lumière c. Voici le « bidouillage » suggéré : $\mathrm{E} = m \cdot c^2$; d'où ν parce que $\mathrm{E} = h\,\nu$, d'où le temps $t = \hbar/m \cdot c^2$, d'où la distance en multipliant par c, soit $x = \hbar/m \cdot c$. On reconnaît au passage la longueur de COMPTON, etc. Les principales unités de la physique atomique et de la chimie sont construites à partir du système d'unités naturelles suivant : la chimie est quantique ($\hbar$), faisant intervenir des électrons (m) chargés (e^2) avec $e^2 = q^2/4\,\pi\,\varepsilon_0$ selon la notation usuelle. On peut bien sûr retrouver toutes les unités par les équations aux dimensions mais c'est long. Voici le « bidouillage » proposé : il suffit dans le système antérieur de faire disparaître c puisque c ne doit pas apparaître dans celui-ci. Exemple : $\mathrm{E} = m \cdot c^2$ donc maintenant $\mathrm{E} = m \cdot c^2 \cdot \alpha^2$ avec $\alpha = e^2/\hbar \cdot c = 1/137$. Et hop ! Voilà comment on trouve : $\mathrm{E} = m\,e^4/\hbar^2 = 2 * 13.6$ électron-volts. De même, retrouver le rayon de BOHR à partir de la longueur de COMPTON, etc. $a_0 = \hbar/mc \cdot 1/\alpha$. Voyons, donnez-moi un ordre de grandeur de la vitesse d'un électron dans l'atome : réponse immédiate : c ! fois α donc $e^2/\hbar$. Cela montre bien que les corrections relativistes en $(v/c)^2$ sont en $(1/137)^2$ donc négligeables : la chimie n'est effectivement pas relativiste !

15) Regardez à nouveau l'exercice 3 pour $r \ll a$, r varie comme $t^{2/5}$; pour $z \gg a$, z varie comme $t^{2/3}$. Serait-ce exact avec des « boules de lumière » ? et avec des « boules de lumière cohérente » ? Qu'est-ce qui me permet de répartir continûment « à la Gauss » pour $z \gg a$, la distribution ponctuelle en distribution surfacique E/a^2 ?

Qu'est-ce qui permet à HUYGENS de répartir ses ondelettes de champ électrique en $d\mathrm{S}$ et pas en $\sqrt{d\mathrm{S}}$? Qu'est-ce qui se passe avec des charges ponctuelles à la surface ? Voilà de vraies questions de physique ; dans l'exercice 3, c'est le cas typique où l'A.D. a dépassé ses limites ; la puissance quasi-magique de la « jonglerie » conduit à des dérapages : vous n'êtes heureusement pas expert en bombes A. Il faut faire de la physique AVANT : cela est très moral.

16) Il y a tant et tant à dire sur l'homogénéité et l'invariance en chimie, en particulier l'invariance projective si oubliée : mais

il y a tant de conflits. La chimie attend son COPERNIC ; Giordano BRUNO reste prudent.

17) Non, je ne vous refais pas le coup de « la répétition qui fixe la notion ». Simplement, je répète qu'une étude systématique au niveau historique-épistémologique-didactique du groupe maximal d'invariance serait intéressante, de FOURIER à POMMARET en passant par RAYLEIGH, VESSIOT, COUTURAT, SEDOV, SPENCER, BLUMAN, etc. tout un programme passionnant.

18) Vous devez bien vous demander comment une constante fondamentale peut se fossiliser, puis disparaître par subduction dans les entrailles de la physique. Non, je ne plaisante pas. On m'a fait apprendre, adolescent, qu'il existait une Constante Fondamentale de la Nature, appelée J, qui traduisait un Principe d'Equivalence entre chaleur et travail, sans que les 2 concepts puissent être confondus : la chaleur, ce n'est pas du travail ; et d'ailleurs, disait-on, la chaleur s'exprime en calorie et le travail en joule. On apprenait révérencieusement l'expérience de mesure de J, faite par JOULE, et la valeur expérimentale J = 4,1855 joule/calorie. Un jour, on en eut assez de mesurer la chaleur massique de l'eau, et on décida que la « dry » calorie vaudrait par définition 4,1855 joules, et que c_p continuerait d'être mesurée par qui voudrait. EXIT J.

La valeur de la célérité de la lumière vient de se fossiliser en 1983. La constante de BOLTZMANN entre dans le processus (LANDAU ne l'utilisait déjà plus). A quand le tour de la constante de PLANCK ? Vous frissonnez, inquiet ? Alors, j'ai manqué le but de cet article : vous convaincre qu'il N'EXISTE PAS DE SYSTÈME INTERNATIONAL D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS. Confondre métrologie et auto-similitude c'est faire de la métaphysique au mauvais sens du terme. Peut-être faudrait-il un article complet sur ce sujet seulement. J.-M. LÉVY-LEBLOND et M. HULIN en ont écrits d'excellents.

19) Article à paraître : Le calcul en ordres de grandeur LITTÉRAUX fait partie des grands critères de Pertinence.