

De la parabole et du mouvement parabolique

par Serge VAILLANT,
Lycée Jean-Perrin, Lambersart.

THEOREME I :

Si un mouvement rectiligne est uniformément varié, la vitesse moyenne entre les dates t_1 et t_2 est égale :

a) à la moyenne arithmétique des vitesses vraies à ces instants ;

b) à la vitesse vraie à l'instant $(t_1 + t_2)/2$.

La démonstration de ce théorème peut être proposée aux élèves en exercice, de même que son extension au mouvement curviligne de vecteur accélération constant.

THEOREME II :

Soit, dans un certain référentiel, un mobile ponctuel animé d'un mouvement de vecteur accélération constant $\vec{a}$, non colinéaire au vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$.

On peut établir que :

a) la trajectoire est plane,

b) elle est parabolique,

c) le vecteur vitesse moyenne entre les instants t_1 et t_2 est la demi-somme des vecteurs vitesse instantanée à ces instants :

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2},$$

d) c'est aussi le vecteur vitesse instantanée à la date $\vartheta = (t_1 + t_2)/2$:

$$\vec{v}_m = \vec{v}_{(\vartheta)}.$$

De la proposition II. d) il découle une méthode de détermination du vecteur vitesse instantanée d'un mobile en mouvement parabolique, mouvement enregistré par chronophotographie, ce qui conduira à la mesure de l'accélération.

ETUDE EXPERIMENTALE DU MOUVEMENT DU CENTRE D'INERTIE D'UN SOLIDE SUR UNE AEROTABLE INCLINEE

En admettant que le palet ne subisse que l'attraction terrestre et l'action de la table assimilée à une force constante normale à la table, on établit que l'accélération $\vec{a}$ du centre d'inertie du palet est un vecteur constant d'intensité $a = g \cdot \sin \alpha$, relation que l'on se propose de vérifier expérimentalement.

Par chronophotographie, on obtient l'enregistrement reproduit fig. 1. En superposant deux enregistrements identiques après retournement de l'un d'eux, on peut vérifier que la trajectoire possède un axe de symétrie (fig. 2).

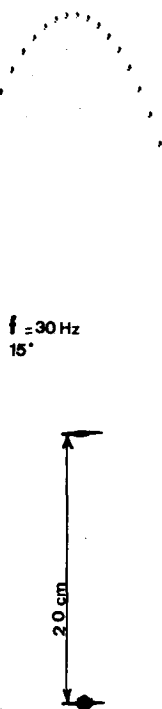


Fig. 1

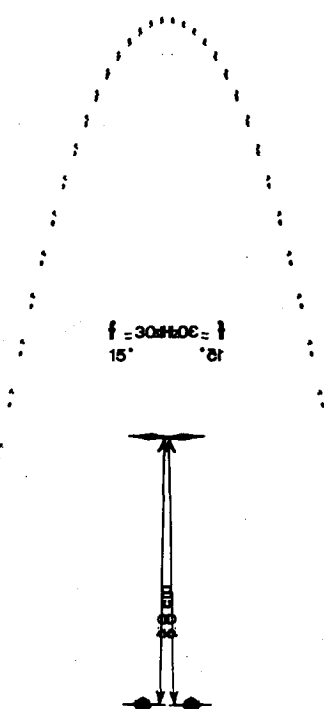


Fig. 2

On désigne par M_0 la première position enregistrée en bas, à gauche de la photographie (date $t = 0$) ; les positions successives aux dates $t_1 = \vartheta$, $t_2 = 2\vartheta$, ..., $t_k = k\vartheta$ ($\vartheta = 1/30$ s) seront désignées par $M_1, M_2, \dots, M_k$.

Le vecteur vitesse instantanée à une date $t_n = n\vartheta$ est donc identique au vecteur vitesse moyenne entre les dates $t = (n - p)\vartheta$ $t' = (n + p)\vartheta$ — (n, p, k , entiers naturels), soit :

$$\vec{v}_n = \frac{\overrightarrow{M_{n-p} M_{n+p}}}{2 p \vartheta} \quad (\text{cf. II. d}).$$

Pour une valeur constante de n et des valeurs différentes de p , on doit donc avoir :

$$\frac{\overrightarrow{M_{n-p} M_{n+p}}}{p} = 2 \vec{v}_n \cdot \vartheta,$$

vecteur constant, ce que l'on peut vérifier sur la fig. 3.

On peut également observer que les milieux des segments $M_{n-p} M_{n+p}$ sont alignés sur une droite qui passe par le point M_n . Cette propriété est celle des milieux de sécantes à une parabole parallèle à une direction donnée (propriété qui peut être établie par les élèves). On démontre également que la droite des milieux est parallèle à l'axe de symétrie de la parabole.

Cette propriété étant établie et vérifiée, l'étude expérimentale peut être poursuivie en empruntant deux voies différentes :

α) A partir de la droite Δ , il est possible de construire un repère défini par l'axe de symétrie et la tangente au sommet (il est commode d'utiliser une feuille de papier calque millimétré que l'on superpose au document - cf. fig. 4).

On peut alors vérifier que l'abscisse x de M est fonction affine de t , et que $\sqrt{y}$ est proportionnelle à x .

y est donc fonction du second degré du temps. La composante a_x de l'accélération est donc nulle et $a = a_y$.

Le théorème I permettra de calculer a :

$$v_{y38} = \frac{y_{41} - y_{35}}{6 \vartheta} \cdot E$$

E étant le facteur d'échelle, et $(v_{y38})^2 = 2 \cdot a \cdot y_{38} \cdot E$.

On comparera alors a et $g \cdot \sin \alpha$.

β) Si l'on fait maintenant varier n en conservant p constant, les vecteurs $\overrightarrow{M_{n-p} M_{n+p}} = 2 \cdot p \cdot \vec{\vartheta} \cdot \vec{v}_n$ seront les représentations des vecteurs vitesse instantanée aux différentes dates t_n (fig. 5).

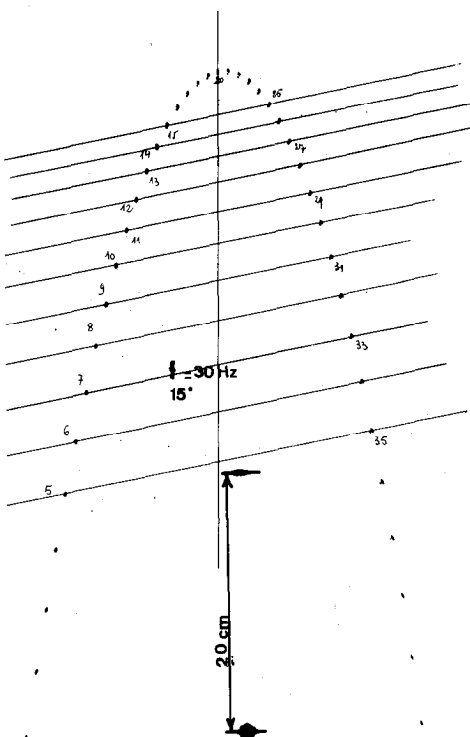


Fig. 3

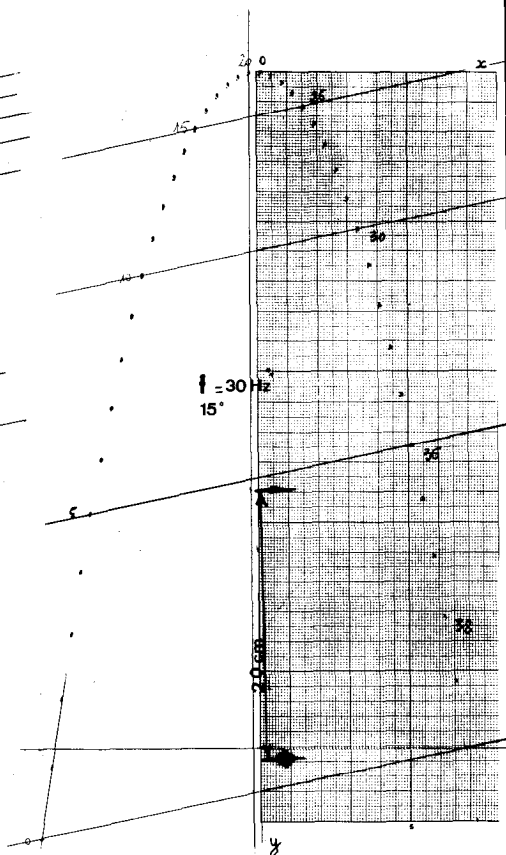
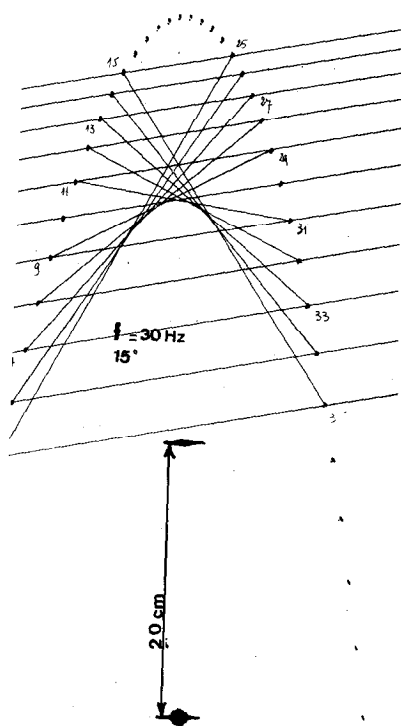
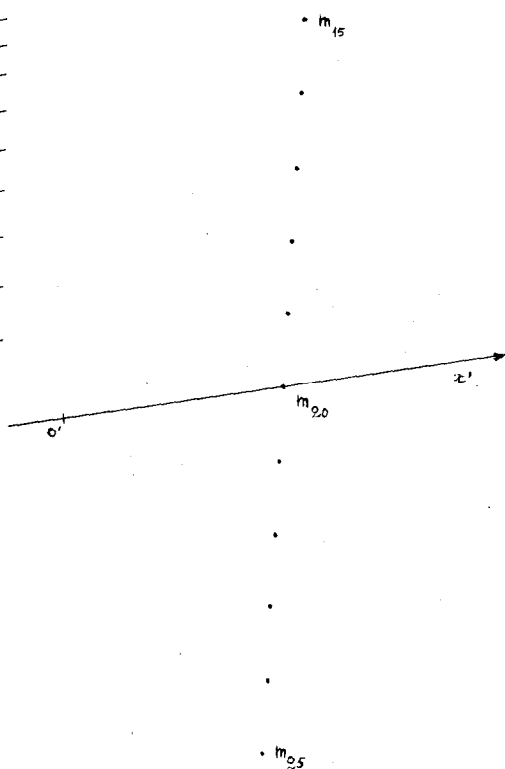


Fig. 4

La direction $M_5 M_{35}$ étant par exemple prise comme référence ($O'x'$) il sera possible de construire l'hodographe du mouvement sur papier calque - fig. 6) et de vérifier que le vecteur accélération $\vec{a}$ est constant, parallèle à l'axe de symétrie de la trajectoire et de norme $a = g \cdot \sin \alpha$.

Fig. 5. — $p = 10$.Fig. 6. — L'indice de m est n .