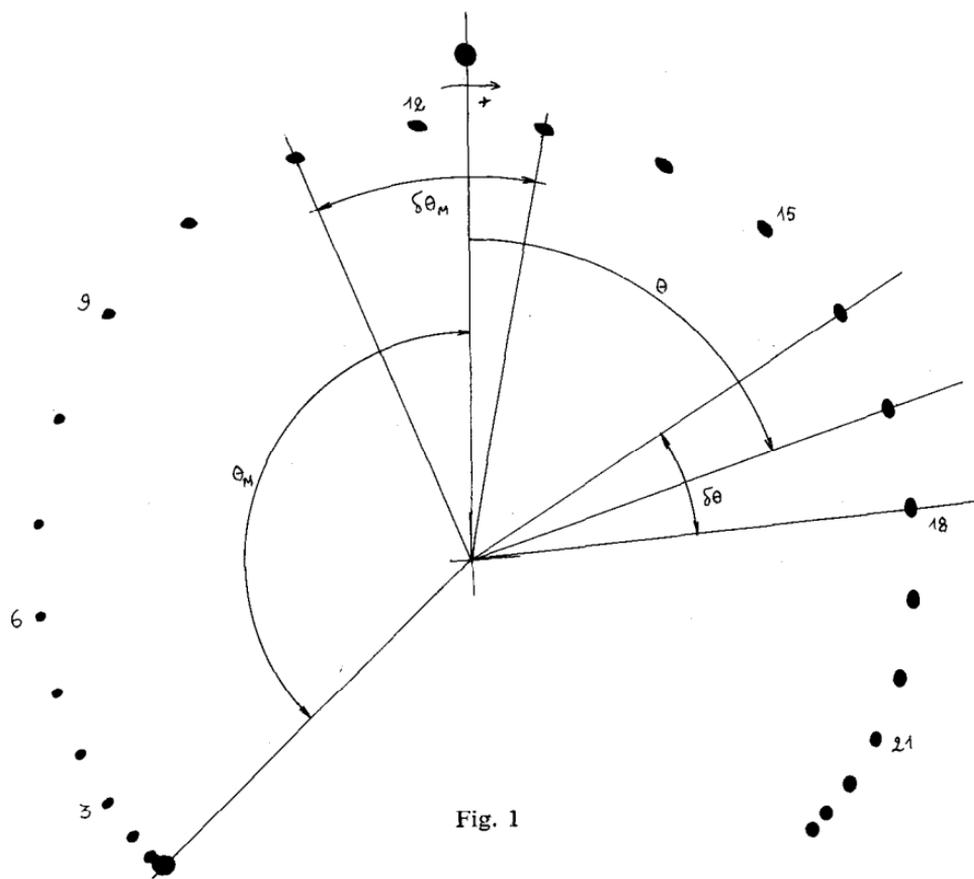


# De la conservation de l'énergie totale d'un oscillateur mécanique à l'équation horaire du mouvement

par Serge VAILLANT,  
Lycée Jean-Perrin, Lambersart.

L'enregistrement du mouvement d'un pendule de torsion par chronophotographie conduit à un document du même type que celui qui est représenté fig. 1.



En classe de Première, un tel enregistrement permettra de vérifier la loi de conservation de l'énergie ; son exploitation en classe Terminale conduira à l'équation horaire du mouvement.

### CONSERVATION DE L'ENERGIE MECANIQUE TOTALE.

Si l'amortissement d'un pendule de torsion est faible, on peut vérifier que, pendant une demi-période, son énergie mécanique est pratiquement constante :  $1/2 J \omega^2 + 1/2 C \theta^2 = E$  (1).

Si l'on considère le pendule au moment du lâcher et au passage à la position d'équilibre (repérée au préalable), on peut écrire :

$$1/2 J \omega_M^2 = 1/2 C \theta_M^2 = E.$$

Le rapport  $\omega_M/\theta_M$  est donc indépendant de l'amplitude, pour un pendule donné, ce que l'on peut vérifier expérimentalement.

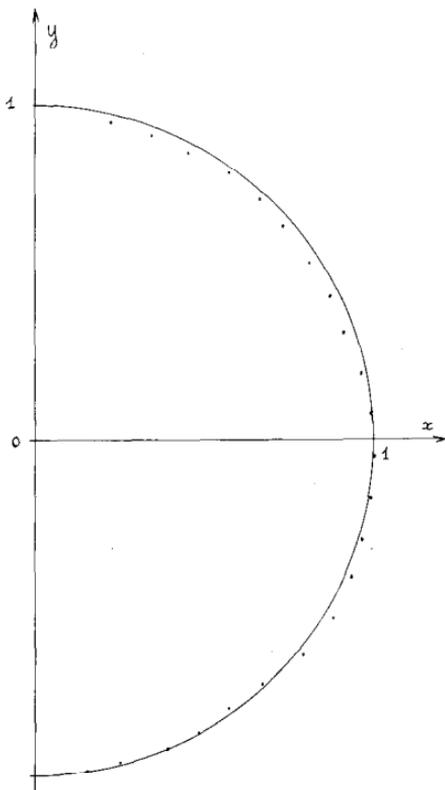


Fig. 2

En divisant les termes de l'équation (1) par les expressions équivalentes de l'énergie mécanique totale, on obtient :

$$\left(\frac{\omega}{\omega_M}\right)^2 + \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_M}\right)^2 = 1.$$

La vitesse angulaire, à la date  $t$ , peut être déterminée expérimentalement en mesurant l'écart angulaire  $\delta\theta$  qui sépare les positions du pendule aux dates  $t - \tau$  et  $t + \tau$ , soit  $\omega = \delta\theta/2\tau$ .

Choisissons comme sens positif de rotation celui du déplacement observé (pendant une demi-période). Posons  $t = n \cdot \tau$  :

$$x = \omega/\omega_M = \delta\theta/(\delta\theta)_M \text{ et } y = \vartheta/\vartheta_M$$

$x$  et  $y$  vérifiant  $x^2 + y^2 = 1$  sont les coordonnées d'un point P du cercle trigonométrique, ce que l'on vérifie avec une assez bonne approximation (fig. 2).

### EXPLOITATION DU DOCUMENT.

Le principe de la vérification ayant été exposé, le travail est réparti entre les différents groupes d'élèves. Les résultats des mesures sont reportés dans le tableau à partir duquel est élaboré

TABLEAU

n	1	2	3	4	5	6	7
$\theta^\circ$	-131,5	-127,5	-123	-115,5	-107	-96,5	-84,5
$\delta\theta^\circ$	5	8,5	13	16	19	22,5	26,5
x	0,15	0,25	0,39	0,48	0,57	0,67	0,79
y	-0,99	-0,96	-0,92	-0,87	-0,80	-0,73	-0,64
n	8	9	10	11	12	13	14
$\theta^\circ$	-70,5	-55	-39,5	-23	-6,5	10	26,5
$\delta\theta^\circ$	29,5	31	32	33	33,5	33	32
x	0,88	0,93	0,96	0,99	1,00	0,99	0,96
y	-0,53	-0,41	-0,30	-0,17	-0,05	0,08	0,20
n	15	16	17	18	19	20	21
$\theta^\circ$	42,5	57	71	84,5	96	106,5	115
$\delta\theta^\circ$	30,5	29	27	24,5	22	19	15
x	0,91	0,87	0,81	0,73	0,66	0,57	0,45
y	0,32	0,43	0,53	0,64	0,72	0,80	0,86

le diagramme reproduit fig. 2. Cette façon de procéder simplifie la tâche des élèves, supprime le caractère fastidieux des

mesures répétitives et permet au professeur de s'assurer que tous les groupes effectuent correctement ces mesures.

### EQUATION HORAIRE DU MOUVEMENT.

Cette étude peut être développée en classe terminale. A tout point P, on peut associer l'angle  $\alpha$  (phase) tel que :

$$x = \cos \alpha \quad \text{et} \quad y = \sin \alpha$$

$\alpha$  peut être mesuré directement sur la fig. 2 ou calculé :

$$\alpha = \text{Arc tg}(y/x).$$

On en déduit la courbe  $\alpha = f(t)$  représentée fig. 3. On observe que  $\alpha$  est fonction affine du temps :

$$\alpha = \Omega t + \alpha_0.$$

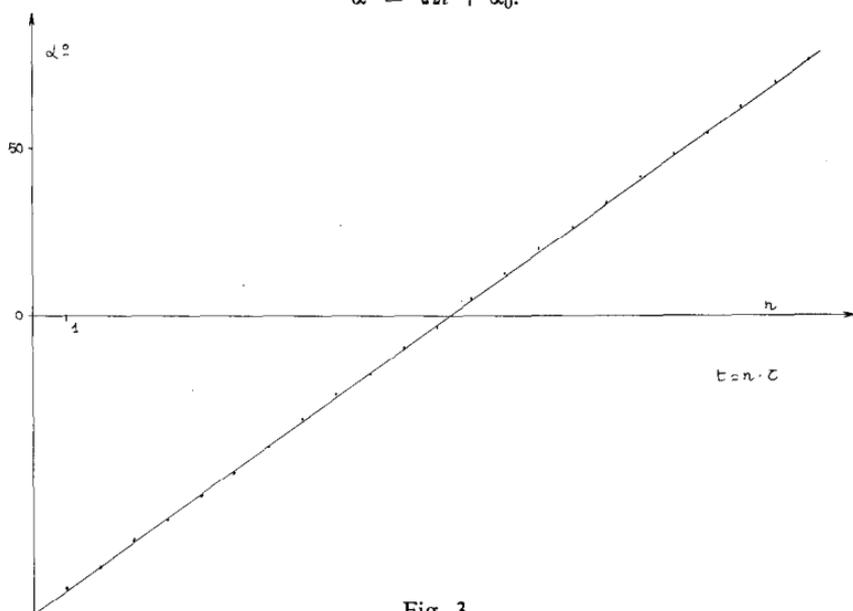


Fig. 3

De la relation  $y = \vartheta/\vartheta_M = \sin \alpha$ , on déduit alors  $\vartheta(t)$  :

$$\vartheta = \vartheta_M \sin [\alpha(t)] = \vartheta_M \sin (\Omega t + \alpha_0).$$

De même,  $x = \cos \alpha$  conduit à  $\omega = \omega_M \cos (\omega t + \alpha_0)$ .

Il découle de la définition de  $\omega$  :  $\omega_M = \Omega \cdot \vartheta_M$  relation qui peut également être vérifiée après détermination du coefficient directeur de la droite  $\alpha(t)$ .

L'enregistrement du mouvement d'un pendule élastique pourra être exploité de la même façon. Le vecteur de Fresnel s'introduira tout naturellement à la suite de cette étude.