

## Un essai de simulation sur micro-ordinateur

par P. MALLÉUS,  
Rectorat de Nancy - Metz.

---

L'équipement des lycées en micro-ordinateurs met à la disposition des physiciens des outils très puissants qui sont encore largement sous-employés. Si l'opération dite des « 10 000 micro-ordinateurs » est actuellement suspendue, il ne fait pas de doute qu'à terme les physiciens devront apprendre à maîtriser l'usage des micro-ordinateurs.

Il existe actuellement dans les lycées deux catégories de micro-ordinateurs. Un micro-ordinateur peut être une simple machine « fermée » avec laquelle l'opérateur ne communique que par l'intermédiaire d'un clavier et qui fournit les résultats sur une imprimante ou sur un écran de visualisation. Une telle configuration est amplement suffisante pour la plupart des disciplines.

Mais un micro-ordinateur peut être aussi un appareil de saisie de données muni d'entrées et de sorties programmables pouvant recevoir directement de capteurs ou d'appareils de mesures des grandeurs physiques converties en grandeurs électriques. Après traitement des données ces micro-ordinateurs peuvent agir sur des processus techniques ou des phénomènes physiques. Contrairement au type précédent, ce genre de machines n'a pas fait l'objet d'un marché mais se répand progressivement dans les lycées techniques au gré des possibilités financières de ces établissements ; grâce aux techniques maintenant bien au point de conversion analogique-digital ces appareils offrent au laboratoire de Sciences physiques, des possibilités immenses.

Les micro-ordinateurs ayant fait l'objet d'attributions gratuites aux établissements offrent au professeur de Sciences physiques diverses voies qui ont été citées dans les « indications d'ordre général » accompagnant les commentaires des programmes de Sciences physiques de la nouvelle classe de seconde (B.O. n° 1 spécial du 5-3-1981) :

1. Traitement de données numériques.
2. Simulation d'expériences.

3. Constitution et exploitation de mini-banques de données ou d'informations.
4. Contrôle des connaissances.

L'expérience dite des « 58 lycées » a produit un certain nombre de programmes qui se rangent dans l'une ou l'autre de ces catégories. La simulation d'expériences a le plus souvent conduit à des programmes « substitués confortables de l'expérience » vis-à-vis desquels le commentaire du *B.O.* est à juste titre très critique.

Quelques programmes échappant à cette critique ont été publiés dans le *B.U.P.* [1], [2]. M'inspirant de ces publications j'ai cherché à mettre au point la simulation d'une expérience (adaptée par M<sup>me</sup> LE BAIL au niveau d'une classe de terminale) sur le caractère aléatoire des désintégrations radioactives (\*) [4]. La tentative a été rendue possible par l'installation de huit micro-ordinateurs type LX 529 au lycée Henri-Poincaré de Nancy (\*\*).

La première question que se posera le lecteur est : pourquoi avoir cherché à simuler une expérience qui peut être effectivement réalisée dans un lycée ?

J'ai eu la chance de pouvoir manipuler avec l'appareil (conçu par le C.E.A.) qu'a utilisé M<sup>me</sup> LE BAIL et qui a été décrit dans un manuel de la classe de terminale [4]. Après introduction de l'échantillon radioactif, on affiche le temps de comptage choisi ; il suffit alors d'appuyer sur un bouton pour déclencher le comptage et lire le nombre de désintégrations enregistrées sur un afficheur électroluminescent. D'un emploi très commode cet appareil me semble surclasser nettement ceux qui l'ont précédé dans sa catégorie.

Il présente cependant à mon avis un double inconvénient .

1. Le C.E.A. n'autorisera la commercialisation de cet appareil qu'à partir du moment où il sera protégé par un nombre suffisant de brevets.
2. Compte tenu de la nouvelle organisation financière des établissements, le prix de cet appareil risque d'être dissuasif pour bon nombre d'entre eux.

A titre d'exemple, la trentaine de micro-ordinateurs déjà installés dans l'Académie de Nancy - Metz devrait permettre, en attendant mieux de simuler les expériences mettant en évidence le caractère aléatoire des désintégrations radioactives en privant le

---

(\*) L'intérêt fondamental de l'étude statistique des désintégrations radioactives semble avoir été mis en évidence pour la première fois par RUTHERFORD, CHADWICK et ELLIS en 1920.

(\*\*) *N.D.L.R.* : Cette installation date de 1981.

moins possible l'élève « de certains aléas, combien formateurs, de la pratique expérimentale ».

## A) QUELQUES RAPPELS.

### 1) Les épreuves de Bernoulli ; loi binomiale.

Il arrive souvent en physique ou dans la vie courante qu'un événement ne puisse avoir que deux éventualités s'excluant mutuellement : l'enfant attendu sera garçon ou fille, la pièce retombera sur pile ou face, le noyau se désintègre ou non pendant un intervalle de temps donné... Ces événements sont appelés épreuves de BERNOULLI, le résultat étant appelé arbitrairement « succès » ou « échec ». Si l'on appelle  $p$  la probabilité de succès et  $q$  celle de l'échec on sait que  $p + q = 1$  (événements incompatibles).

Lorsque des épreuves de BERNOULLI répétées sont indépendantes, la probabilité d'obtenir  $k$  succès sur  $N$  épreuves dans un ordre déterminé est aussi la probabilité d'obtenir  $k$  succès et  $N - k$  échecs dans l'ordre choisi soit  $p^k \cdot q^{N-k}$  (cf. [5]). Par exemple un couple qui se propose d'avoir 4 enfants a la probabilité

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2}$  d'avoir d'abord 3 filles puis 1 garçon ou 3 garçons

puis 1 fille. Cette probabilité est la même que d'avoir d'abord 1 fille puis 1 garçon puis 2 filles... Il y a  $C_4^3 = 4$  possibilités d'avoir 3 filles et 1 garçon indépendamment de l'ordre.

Ces divers cas de figure étant incompatibles entre eux, leurs probabilités s'ajoutent si l'on ne s'intéresse qu'à la probabilité d'avoir 3 filles et 1 garçon indépendamment de l'ordre :

$$C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

La probabilité pour que  $N$  épreuves conduisent à  $k$  succès indépendamment de l'ordre dans lequel ils se produisent est ainsi :

$$b(k, N, p) = C_N^k p^k q^{N-k}.$$

Telle est la loi binomiale qui figure actuellement au programme de mathématique de la classe de terminale D.

En particulier considérons à l'instant initial  $t = 0$  un ensemble de  $N$  particules susceptibles de se désintégrer. On sait [3] que la probabilité d'existence à l'instant  $t$  de chacune de ces particules est  $q = e^{-t/\tau}$  et la probabilité de désintégration  $p = 1 - e^{-t/\tau}$  où  $\tau$  est la vie moyenne de la particule. La probabilité pour que  $k$  particules soient désintégrées à la date  $t$  est :

$$b(k, N, t) = \frac{N!}{k!(N-k)!} (1 - e^{-t/\tau})^k (e^{-t/\tau})^{(N-k)}.$$

Dans le cas d'un comptage de durée  $t$ , si  $N$  est le nombre de noyaux susceptibles de se désintégrer au début du comptage, le rapport  $\frac{t}{\tau}$  peut être très faible pour les durées usuelles de comptage. Ainsi le Césium 137 possède une demi-vie de  $T = 30$  ans donc une vie moyenne :

$$\tau = \frac{T}{\ln 2} = 3,1 \cdot 10^9 \text{ s.}$$

En outre, le rapport  $t/\tau$  représente pratiquement la probabilité  $p$  qu'a un noyau individuel de se désintégrer pendant la durée  $t$  :

$$p = 1 - e^{-t/\tau} \approx \frac{t}{\tau}.$$

La possibilité pour que  $k$  particules soient désintégrées à la fin du comptage devient :

$$b(k, N, t) \approx \frac{N!}{k!(N-k)!} \left(\frac{t}{\tau}\right)^k \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{(N-k)}$$

## 2) La loi de Poisson, cas limite de la loi binomiale.

Dans le cas où le nombre d'épreuves  $N$  devient très grand et la probabilité élémentaire  $p$  devient très faible, le produit  $\lambda = N \cdot p$  caractéristique du processus physique conservant une valeur « raisonnable » (quelques unités à quelques dizaines) le coefficient binomial peut s'écrire :

$$b(k, N, \lambda) = \frac{N!}{k!(N-k)!} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{(N-k)}$$

$$b(k, N, \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{N(N-1)\dots(N-k+1)}{N^k} \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{(N-k)}$$

Quand  $N$  tend vers l'infini,  $N(N-1)\dots(N-k+1)$  est équivalent à  $N^k$  et :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{(N-k)} = e^{-\lambda}$$

d'où :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} b(k, N, \lambda) = P(k, \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

où  $P(k, \lambda)$  est le coefficient de POISSON représentant la probabilité de réalisation de  $k$  succès, ces succès étant rares ( $p = \frac{\lambda}{N} \ll 1$ ) et concernant un nombre très grand d'événements  $N \gg 1$ .

La constante  $\lambda$  qui caractérise le processus n'est autre que la valeur moyenne de la variable aléatoire  $k$ , comme on peut s'en assurer en calculant :

$$\bar{k} = \sum_{k=0}^N k P(k, \lambda).$$

La loi de POISSON rend compte très correctement de nombreux phénomènes physiques. Ainsi la probabilité pour que  $k$  désintégrations radioactives surviennent dans l'intervalle de temps  $(0, t)$  parmi une population initiale de  $N$  atomes est obtenue en remplaçant  $\lambda$  par  $Np \approx N \frac{t}{\tau}$  si  $\frac{t}{\tau} \ll 1$  :

$$P(k, t/\tau) = \frac{(N t/\tau)^k}{k!} e^{-N t/\tau}.$$

Si la Voie Lactée contient en moyenne  $\mu$  étoiles par unité de volume, la probabilité pour qu'un volume  $V$  contienne  $k$  étoiles est :

$$\frac{(\mu V)^k}{k!} e^{-\mu V}.$$

La probabilité d'observer  $k$  globules rouges à travers le microscope sur une aire  $S$  est  $\frac{(\sigma S)^k}{k!} e^{-\sigma S}$  où  $\sigma$  est le nombre moyen de globules rouges par unité d'aire.

En recherche opérationnelle, on peut citer l'exemple décrit par W. FELLER [6] : pendant la guerre, les Allemands avaient l'impression que le tir des V2 allemands était concentré sur certains quartiers de Londres. La surface de la ville fut divisée en 576 carrés de 500 m de côté. Il fut trouvé que la répartition des 537 impacts suivait de très près une loi de POISSON. L'hypothèse d'une chute aléatoire pour chaque fusée était exacte à 88 %, ce qui rassura les Anglais sur les limites de la technologie adverse.

Tous les phénomènes physiques décrits par une loi de POISSON peuvent se ramener au problème suivant : étant donné un damier de  $n$  cases sur lequel on jette  $N$  billes au hasard, quelle est la probabilité pour qu'une case contienne  $k$  billes ? Il y a

en moyenne  $\lambda = \frac{N}{n}$  billes par case et la probabilité est donnée par  $P(k, \lambda)$ .

### 3) Simulation par les méthodes de Monte-Carlo.

Ces méthodes permettent de reconstituer artificiellement par des procédés de calcul utilisant des échantillons de lois de probabilité un phénomène réel inaccessible, trop long ou trop coûteux à mettre en œuvre [4]. On emploie le plus souvent des séquences de nombres équiprobables tirés d'une table de nombres au hasard ou bien engendrés par un ordinateur utilisant un procédé de calcul rapide dont les résultats ne convergent pas trop rapidement (nombre dits « pseudo-aléatoires »).

Un exemple simple peut illustrer l'emploi des méthodes de MONTE-CARLO. Considérons un carré et son cercle inscrit de rayon  $R$  centré sur l'origine des coordonnées (fig. 1). Le rapport

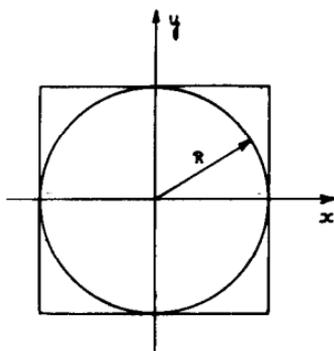


Fig. 1

des aires respectives est  $\pi/4$ . En « jetant » au hasard une bille dans le carré on a la probabilité  $\pi/4$  d'atteindre le disque. Si l'on attribue aux coordonnées  $x$  et  $y$  les valeurs successives de deux séries indépendantes de nombres équiprobables compris entre  $-R$  et  $+R$  la fréquence des succès tend vers  $\pi/4$ ; très facile à faire, le programme permet d'approcher la valeur de  $\pi$  à quelques pour cent près en quelques centaines de tirages. La méthode historique de BUFFON pour déterminer  $\pi$  s'apparente aux mêmes méthodes [8].

D'une façon analogue, on peut calculer des intégrales simples ou multiples. On dit qu'il y a simulation du certain par l'aléatoire.

Mais il est également possible de simuler un phénomène de nature statistique par une méthode de MONTE-CARLO [1], [2]. On dit alors qu'il y a simulation de l'aléatoire par l'aléatoire.

## B) PRINCIPE DE LA SIMULATION DE LA DESINTEGRATION DU CESIUM 137.

Dans la manipulation décrite par M<sup>me</sup> LE BAIL, l'opération de comptage correspondant à un temps  $t$  de comptage déterminé est renouvelée quelques dizaines à quelques centaines de fois. La variable aléatoire est le nombre de désintégrations  $n(t)$  se produisant pendant la durée  $t$ . Les fréquences des comptages à  $k = 0, 1, 2, 3...$  événements sont reportées dans un histogramme; elles sont comparées aux probabilités  $P(k, \lambda)$  de la loi de POISSON pour une valeur de  $\lambda$  qui sera explicitée au paragraphe ci-après. Lorsque le nombre moyen  $\bar{n}(t)$  de désintégrations pendant la durée  $t$  calculé sur un ensemble de  $C$  comptages commence à être de l'ordre de quelques dizaines, la loi de probabilité de POISSON tend vers le cas limite d'une loi de GAUSS.

M'inspirant du procédé rappelé par A. BRIGUET [5], j'ai cherché à faire remplir par un micro-ordinateur les cases d'un damier à l'aide d'une série de points distribués de façon aléatoire sur l'ensemble des cases.

Chaque case du damier est repérée par son indice ligne et son indice colonne. Le tirage de deux nombres aléatoires équiprobables successifs fournit l'indice ligne et l'indice colonne de la case où le point ira se placer. Chaque case correspond à un comptage, chaque point correspond à une désintégration.

Comme dans la manipulation réelle, l'opérateur doit afficher le temps de comptage choisi  $t$  et peut obtenir le résultat du comptage en appuyant sur une touche. Il doit cependant avoir signalé dès le début le nombre de comptages  $C$  qu'il souhaite effectuer. Avant d'être autorisé à déclencher le premier comptage, l'opérateur doit attendre que la machine ait rempli toutes les cases et mis en mémoire les résultats de tous les comptages qui pourront être déclenchés ultérieurement. Cette perte de temps est compensée par l'affichage quasi instantané du résultat du comptage dès que celui-ci est déclenché par l'opérateur.

### 1) Calcul du nombre de comptages.

A partir du nombre  $C$ , on calcule la dimension  $D$  du damier à remplir :

$$D = \sqrt{C}.$$

Si  $C$  n'est pas un carré parfait,

$$D = \text{ENT}(\sqrt{C}) + 1 \quad (\text{ENT} : \text{partie entière}).$$

Dans ce dernier cas, le nombre de cases et donc de comptages disponibles  $Z$  est supérieur au nombre affiché :

$$Z = D^2 > C.$$

L'opérateur garde la possibilité de n'effectuer que les  $C$  comptages prévus ou d'aller jusqu'aux  $Z$  comptages disponibles.

## 2) Evaluation du nombre moyen $n(t)$ d'événements par comptage de durée $t$ appartenant à une série de $C$ comptages.

Rappelons que  $\bar{n}(t)$  est, dans l'expérience réelle, calculé à partir du nombre total  $N$  de désintégrations enregistrées au cours d'une série de  $C$  comptages de durée spécifiée  $t$  :

$$\bar{n}(t) = \frac{N}{C}.$$

Par exemple pour  $t = 2$  s et  $C = 200$ , M<sup>me</sup> LE BAIL obtient  $\bar{n}(2) = 3,28$ .

### 2.1. ASPECT STATISTIQUE.

Raisonnons sur la population (infinie) des comptages possibles de durée  $t$ . A chaque comptage correspond la variable statistique  $n(t)$  nombre de désintégrations enregistrées pendant la durée  $t$  du comptage. La population est caractérisée par sa moyenne  $\bar{M}(t)$  et son écart-type  $\sigma(t)$ . Rappelons que  $\bar{M}(t)$  ne peut qu'être estimée à partir de très nombreux résultats expérimentaux.

Faire une série de  $C$  comptages de durée  $t$  revient à prélever un échantillon de taille  $C$  dans la population des comptages de durée  $t$ . Si l'on considère la nouvelle population constituée par l'ensemble des séries de comptages de taille  $C$  et de durée  $t$ , la nouvelle variable statistique est  $\bar{n}(t)$ . On sait que la moyenne de cette nouvelle population est  $\bar{M}(t)$ . L'écart-type de la population des échantillons de taille  $C$  est celui de la « population mère » divisé par  $\sqrt{C}$  :

$$\sigma_c = \frac{\sigma(t)}{\sqrt{C}}.$$

### 2.2. ASPECT PROBABILISTE.

D'après la théorie, la loi de probabilité de la variable  $n(t)$  est une loi de POISSON de moyenne  $\bar{M}(t)$  et donc l'écart-type :

$$\sigma(t) = \sqrt{\overline{M}(t)}. \quad [3]$$

La variable aléatoire  $\bar{n}(t)$  est la moyenne des  $C$  variables aléatoires  $n_i(t)$ , nombre de désintégrations pour le  $i$ ème comptage, où  $1 \leq i \leq C$ . Un théorème fondamental de la théorie des probabilités, le théorème Central Limite, enseigne que la somme de  $C$  variables aléatoires indépendantes ayant chacune une *loi de probabilité quelconque* suit une loi de probabilité qui tend vers une loi normale quand  $C$  devient infini [9].

Plus précisément, dans le cas particulier où les  $C$  variables indépendantes  $n_i(t)$ , suivent *une même loi* de probabilité de moyenne  $\overline{M}(t)$  et d'écart-type  $\sigma(t)$ , le théorème (qui prend alors le nom de théorème de LINDBERG et LÉVY) dit que :

$$\bar{n}(t) = \sum_{i=1}^c \frac{n_i(t)}{C}$$

suit approximativement une loi de GAUSS de moyenne  $\overline{M}(t)$  et d'écart-type  $\frac{\sigma(t)}{\sqrt{C}}$ . Les statisticiens admettent que, dans la pra-

tique, la loi suivie par  $\bar{n}(t)$  est très proche d'une loi normale dès que  $C \geq 30$  [10]. Chaque comptage étant indépendant des autres, les conditions se trouvent réunies pour admettre avec une bonne approximation que :

$$\bar{n}(t) = \overline{M}(t) + \sqrt{\frac{\overline{M}(t)}{C}} u$$

où la variable aléatoire  $u$  suit une loi de GAUSS centrée et réduite (moyenne 0, écart-type 1).

L'opérateur se donne  $t$  et  $C$ . Il faut alors engendrer  $\bar{n}(t)$  à partir d'une loi normale  $u$  et de la moyenne de population  $\overline{M}(t)$ , caractéristique physique de l'ensemble échantillon-détecteur. Une fois que l'on s'est fixé  $\overline{M}(t)$ , on peut calculer le nombre total  $N$  de désintégrations que doit simuler la machine au cours d'une série de  $C$  comptages :

$$N = \bar{n}(t) \cdot C.$$

### 2.3. GÉNÉRATION D'UNE LOI NORMALE.

Plusieurs procédés sont possibles pour engendrer  $u$  à l'aide d'un micro-ordinateur. Je n'en citerai que deux :

a) A partir d'une variable aléatoire  $Y$  de loi de probabilité rectangulaire, on cherche à déterminer  $u$  tel que :

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-x^2/2} dx \quad \text{avec} \quad 0 \leq Y \leq 1.$$

Par exemple, si  $Y = 0,100$                        $u = -1,28$

$Y = 0,855$                        $u = 1,06$

$\cdot$                                        $\cdot$   
 $\cdot$                                        $\cdot$   
 $\cdot$                                        $\cdot$

Si les valeurs de  $Y$  sont des nombres équiprobables compris entre 0 et 1, on démontre que les valeurs de  $u$  sont réparties selon une loi de probabilité normale. Cela revient (fig. 2) à chercher l'abscisse  $u$  du point d'intersection de la courbe représentant la fonction de répartition de la loi de LAPLACE-GAUSS  $F(u)$  par la droite parallèle à l'axe des  $u$  et d'ordonnées  $Y$ .

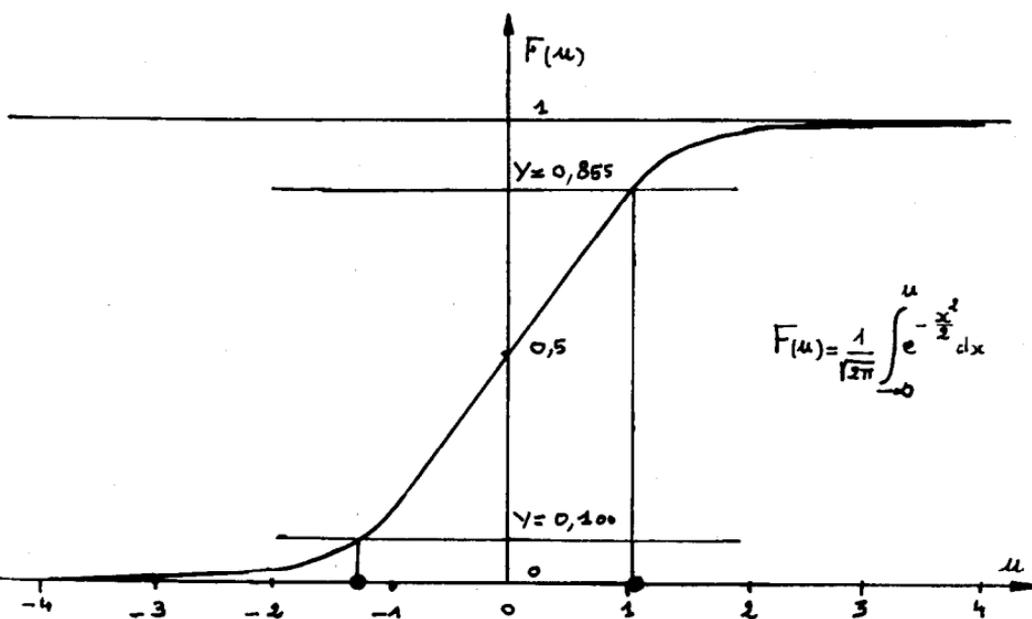


Fig. 2

Le programme de génération de  $u$  selon cette méthode n'exige qu'une vingtaine d'instructions LSE mais il est relativement délicat à mettre au point et surtout consomme du temps machine (environ 30 s par nombre) car il met en œuvre directe-

ment la définition de l'intégrale de RIEMANN et non des procédés modernes d'analyse numérique (méthode de ROMBERG, par exemple). Pour ces raisons, j'ai préféré employer la seconde méthode.

b) Si l'on considère l'ensemble de  $k$  nombres équiprobables compris entre 0 et 1, ces nombres suivent une loi discrète dont la densité de probabilité tend vers une loi continue rectangulaire lorsque  $k$  tend vers l'infini (fig. 3). Il est facile d'en calculer la moyenne et la variance.

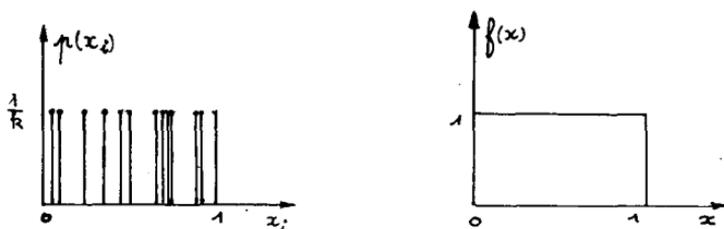


Fig. 3

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - 1/2) f(x) dx = \int_0^1 (x - 1/2)^2 dx = 1/12$$

soit  $\bar{x}_k$  la moyenne de  $k$  nombres aléatoires équiprobables. D'après le théorème de LINDBERG et LÉVY cité précédemment  $\bar{x}_k$  est une nouvelle variable aléatoire qui suit approximativement

une loi de GAUSS de moyenne  $\bar{x} = \frac{1}{2}$  et d'écart-type :

$$\sigma_k = \frac{\sigma}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{12k}}$$

bien que chaque variable aléatoire d'origine suive une loi rectangulaire. L'approximation est d'autant meilleure que  $k$  est plus élevé.

Certes, on peut s'interroger sur l'indépendance stochastique de nombres équiprobables engendrés par un procédé arithmétique. Malgré cette réserve, une plus grande facilité de programmation et le désir de « vérifier expérimentalement » un des théorèmes fondamentaux de la théorie des probabilités m'ont conduit à retenir cette méthode.

On s'attend à ce que la fonction  $\frac{\bar{x}_k - 1/2}{\sigma_k}$  tende vers une

loi normale centrée réduite lorsque  $k$  devient suffisamment grand. A titre de vérification, j'ai fait calculer cette quantité 50 fois par la machine pour  $k = 100$  et  $k = 500$ . Les résultats ont été testés selon la norme X0650 citée par MOREAU [11]. La fig. 4 ne permet pas de rejeter catégoriquement l'hypothèse gaussienne.

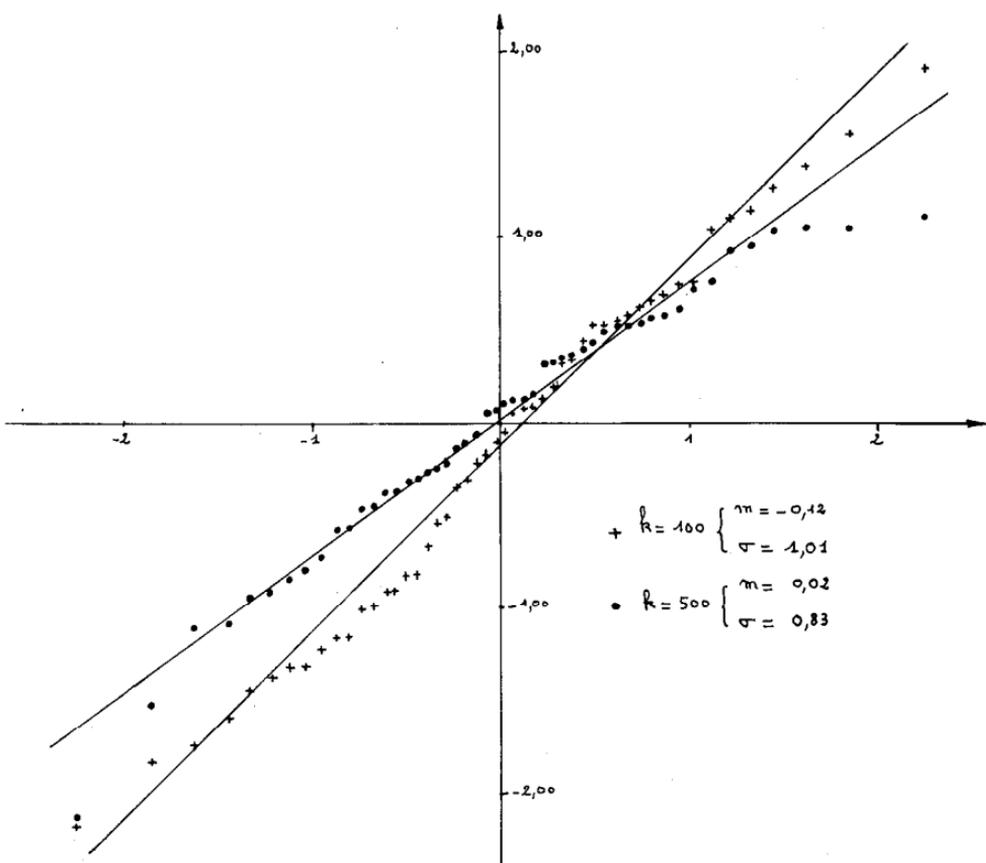


Fig. 4

### 3) Valeur numérique de $\bar{M}(t)$ .

Rappelons que  $\bar{M}(t)$  est proportionnel à la durée du comptage  $t$  avec une excellente approximation mais reste inconnu à l'expérimentateur sauf s'il a fait au moins une fois un comptage

de très longue durée. Même en s'armant de patience, l'expérimentateur obtient une valeur  $\bar{M}(t)$ , qui dépend non seulement de la source mais aussi de la position relative source-détecteur, de l'efficacité du détecteur. L'échantillon dont disposait M<sup>me</sup> LE BAIL avait une activité de  $10 \mu\text{Ci}$  en 1980, ce qui correspond à 330 000 électrons  $\beta^-$  et 250 000  $\gamma$  émis par seconde [4]. Même si le détecteur a une efficacité de quelques pour cent, des ordres de grandeur de quelques désintégrations par seconde n'ont pu être obtenus qu'après interposition d'écrans absorbants.

Pour toutes ces raisons, il ne m'est pas possible avec les seuls renseignements que je possède de recréer les conditions exactes de l'échantillon et du détecteur employé. J'ai donc adopté arbitrairement pour  $\bar{M}(2)$  la seule valeur qui me soit accessible : pour  $t = 2 \text{ s}$  :

$$\bar{n}(2) = 3,28 \simeq \bar{M}(2)$$

soit :

$$\bar{M}(t) = 1,64 t.$$

Il est fort probable que dans l'expérience réelle  $\bar{n}(2)$  a pu différer sensiblement de  $\bar{M}(2)$ .

### C) LE PROGRAMME ET SES EXECUTIONS POSSIBLES.

Rédigé en LSE (version 8) le programme est prévu pour l'utilisation sur les micro-ordinateurs LX 529 qui ont été livrés cette année. Comportant peu d'affichage et aucune utilisation de fichier, ce programme peut être facilement utilisé sur d'autres machines, avec d'autres versions du LSE ou traduit en BASIC. Je le tiens sous forme de disquettes ou de listing à la disposition des collègues intéressés. Ce programme est certainement perfectible car j'ai appris la programmation en LSE et l'emploi du micro-ordinateur en même temps que je concevais le programme. Je sollicite l'indulgence des spécialistes de l'informatique.

Le même programme comporte plusieurs exécutions possibles déclenchées par des numéros de code que le professeur connaît et communique ou non aux élèves.

L'exécution professeur permet de visualiser le contenu des cases du damier donc de connaître la totalité des résultats des comptages sans avoir à effectuer manuellement chaque comptage dès lors qu'ont été précisés  $t$  et  $C$ . Cette exécution donne accès à l'exploitation automatique des résultats : la machine calcule elle-même le nombre de comptages à 0, 1, 2... événements, leurs fréquences, le nombre maximum d'événements enregistrés au cours d'un comptage, le nombre moyen d'événements par comptage (à titre de vérification). En outre, la machine calcule les valeurs

théoriques des probabilités selon la loi de POISSON pour la valeur moyenne considérée. Le professeur n'a plus qu'à comparer les probabilités théoriques aux fréquences observées et à tracer les histogrammes (les programmes de tracé de courbes existant en LSE peuvent sans doute le libérer de cette dernière tâche).

Dans l'exécution élève les comptages sont effectués manuellement comme dans la manipulation réelle en appuyant sur une touche. Le résultat du comptage est affiché sur l'écran. Si le professeur l'y a autorisé en lui donnant le numéro de code, l'élève peut utiliser le traitement automatique des résultats.

#### D) LES RESULTATS.

Quelques exemples de résultats expérimentaux sont donnés fig. 5 pour la durée de comptage  $t = 2,439$  s correspondant à  $\bar{M}(t) = 4$  et pour 100, 400 et 625 comptages. Bien qu'elle ne soit

pas continue la « courbe » de POISSON  $P(k, 4) = \frac{4^k e^{-4}}{k!}$  a été

tracée en pointillés pour plus de clarté. On observe que les valeurs de  $\bar{n}(2,439)$  s'écartent très peu de  $\bar{M}(2,439) = 4$ . La fig. 6 montre le damier tel qu'il sort de l'imprimante.

Ces résultats qui seront utilement comparés aux résultats analogues obtenus par M<sup>me</sup> LE BAIL apparaissent tout à fait satisfaisants. Ils doivent cependant être nuancés pour les deux raisons suivantes :

##### 1) Le temps de calcul.

Le tirage de nombres aléatoires par la machine, donc le remplissage du damier consomme beaucoup de temps machine. Il faut avoir présent à l'esprit que pour une durée de comptage  $t = 2,5$  s, 100 comptages correspondent au tirage d'environ 800 nombres aléatoires, 400 comptages exigent près de 3 200 nombres et 625 comptages 4 800 tirages.

Suivant le procédé employé pour engendrer les nombres aléatoires, 400 comptages de 4 secondes exigent 12 à 15 mn de temps machine, exploitation automatique comprise. Certes, la machine prie gentiment l'opérateur de bien vouloir patienter pendant qu'elle « prépare » l'échantillon de  $^{137}\text{Cs}$  mais il est évident qu'on ne peut guère prétendre faire simuler 1 000 comptages d'une durée de 45 s ce qui demanderait probablement 4 heures à la machine (à noter toutefois que la manipulation faite par un expérimentateur infatigable et très efficace demanderait au moins 12 h 30 mn). Il n'est pas exclu toutefois de faire fonctionner la machine pendant la nuit et de mettre les résultats en mémoire sur disquette mais la séquence étant toujours la même on se

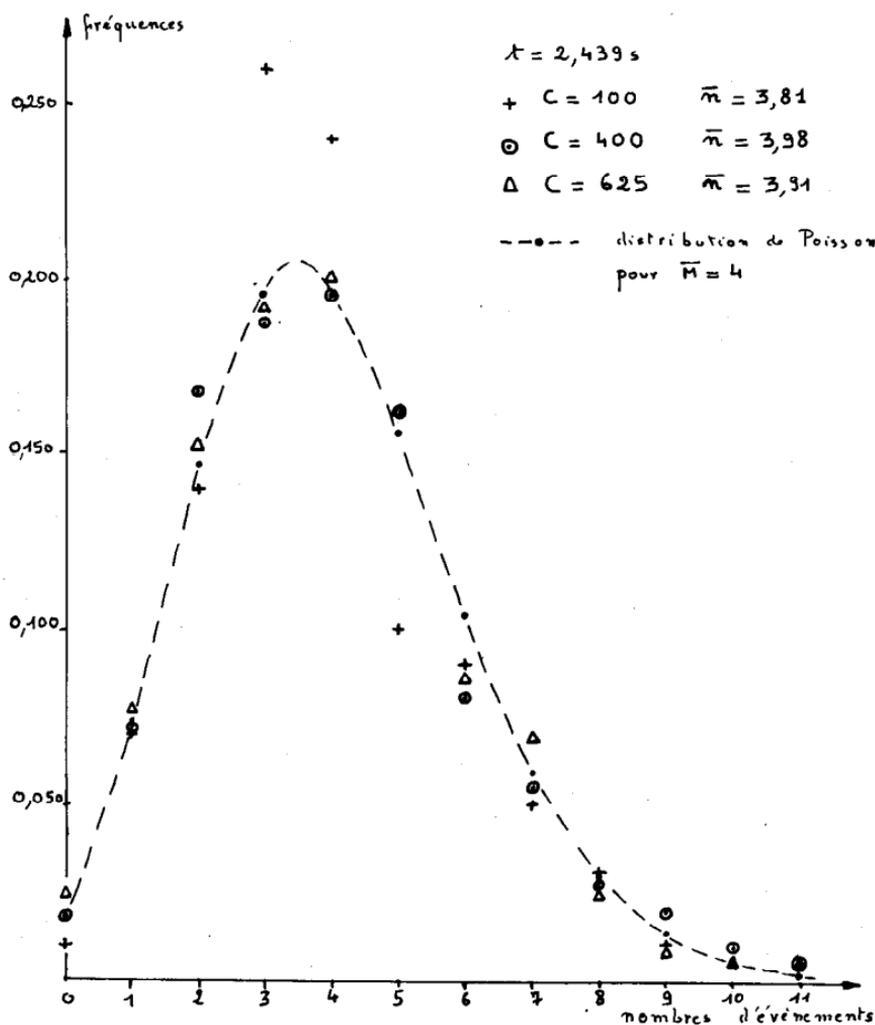


Fig. 5

priverait d'une partie de l'aspect aléatoire sauf à enregistrer plusieurs séquences analogues.

Sur certains ordinateurs programmables en assembleur, on peut certes optimiser les temps de calcul mais je doute qu'il soit possible de modifier sensiblement les ordres de grandeur précédents. Rappelons que MM. BLACK et OGBORN ont travaillé sur des matrices  $30 \times 30$  avec 80 000 tirages de nombres aléatoires et MM. BRIGUET, GRAVERON et RUHLA sur des matrices  $14 \times 14$  avec 30 000 tirages de nombres aléatoires en utilisant, il est vrai, des ordinateurs sans doute plus performants.



si l'on s'intéresse à des temps de comptage élevés ou à des nombres de comptages importants c'est-à-dire un grand nombre de tirages. La fig. 7 donne un exemple des déboires auxquels on peut s'attendre.

Sur micro-ordinateur, on peut faire appel à deux procédés principaux.

Il existe sur la machine une fonction ALE(0) en LSE ou RND(0) en BASIC qui donne un nombre au hasard compris entre 0 et 1 à chaque appel, le premier nombre d'une série d'appels étant toujours différent d'une série à l'autre (la constante de départ est elle-même aléatoire).

On peut aussi inventer son propre procédé. On en trouvera des exemples dans [5] et [7] ou dans la notice de certaines calculatrices de poche. J'ai utilisé le procédé qui consiste à se donner un nombre quelconque compris entre 0 et 1 puis à le multiplier par une constante, à conserver la partie fractionnaire du résultat sur laquelle on répète le processus. Ces procédés sont assez sensibles au choix des constantes de départ. Ils ont l'inconvénient de toujours donner les mêmes séquences à chaque série d'appel.

En outre même si le procédé choisi présente apparemment de sérieuses garanties quant à l'équiprobabilité des différents nombres, il ne suffit pas à assurer des résultats corrects. Le procédé qui a donné les résultats décevants de la fig. 8 avait pourtant fourni  $k = 500$  nombres compris entre 0 et 1 de moyenne :  $\bar{x}_k = 0,501324$  et d'écart-type :  $\sigma_k = 0,293326$ .

Alors que les valeurs théoriques correspondantes pour  $k$  infini sont :

$$\text{moyenne : } \bar{x} = 0,500000, \text{ écart-type : } \sigma = 0,288675 = \frac{1}{\sqrt{12}}.$$

Ce même procédé restreint aux seuls indices colonnes des cases du damier employé en même temps qu'un autre procédé pour la désignation des seuls indices lignes fournit un résultat correct (fig. 8 b).

J'ai pu constater également que, employée seule, la fonction ALE(0) conduit à des déboires au-delà de 5 000 tirages et parfois même à partir de 3 000 tirages alors qu'employée avec un autre procédé elle fournit des résultats tout à fait corrects au-delà de 5 000 tirages.

Il semble donc préférable d'utiliser des séquences de nombres équiprobables aussi indépendantes que possible pour désigner les indices lignes et les indices colonnes.

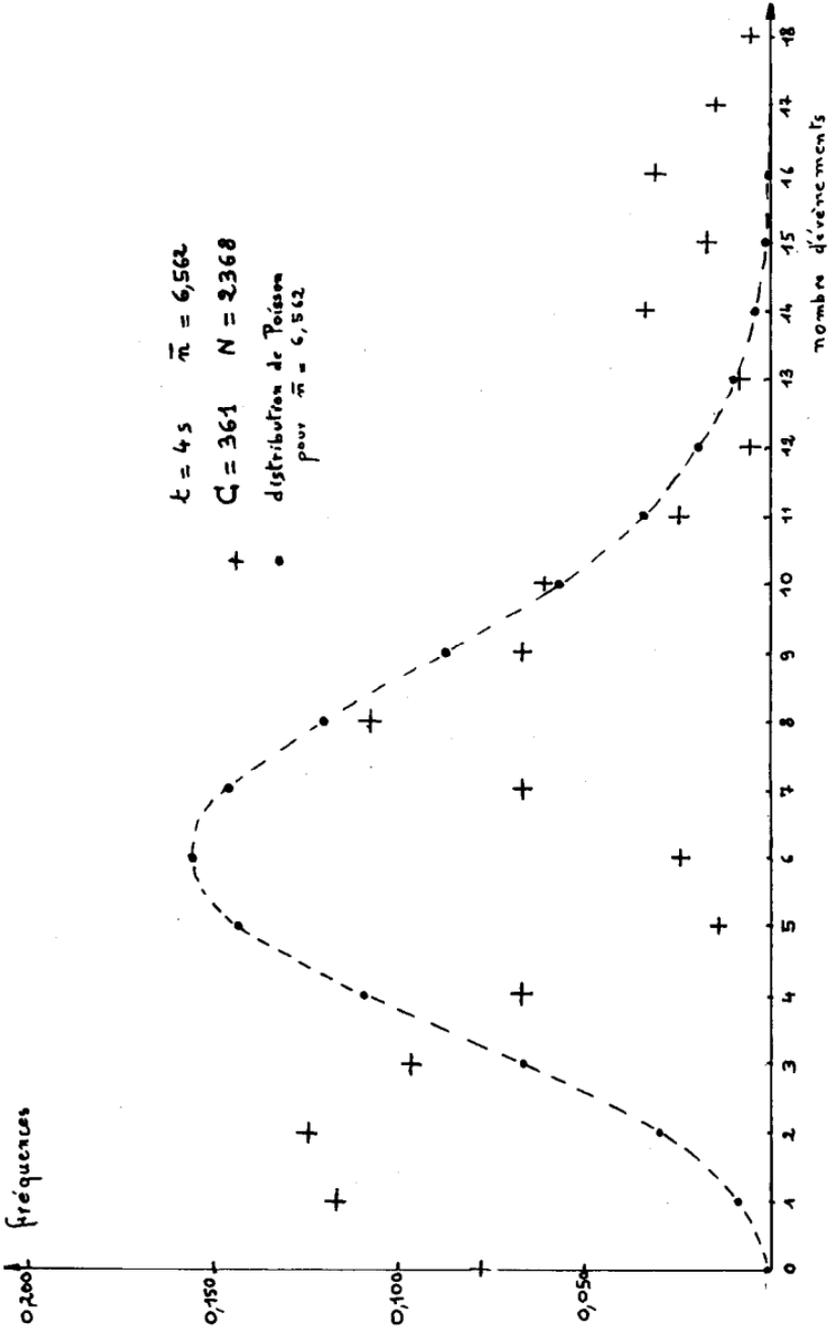


Fig. 7

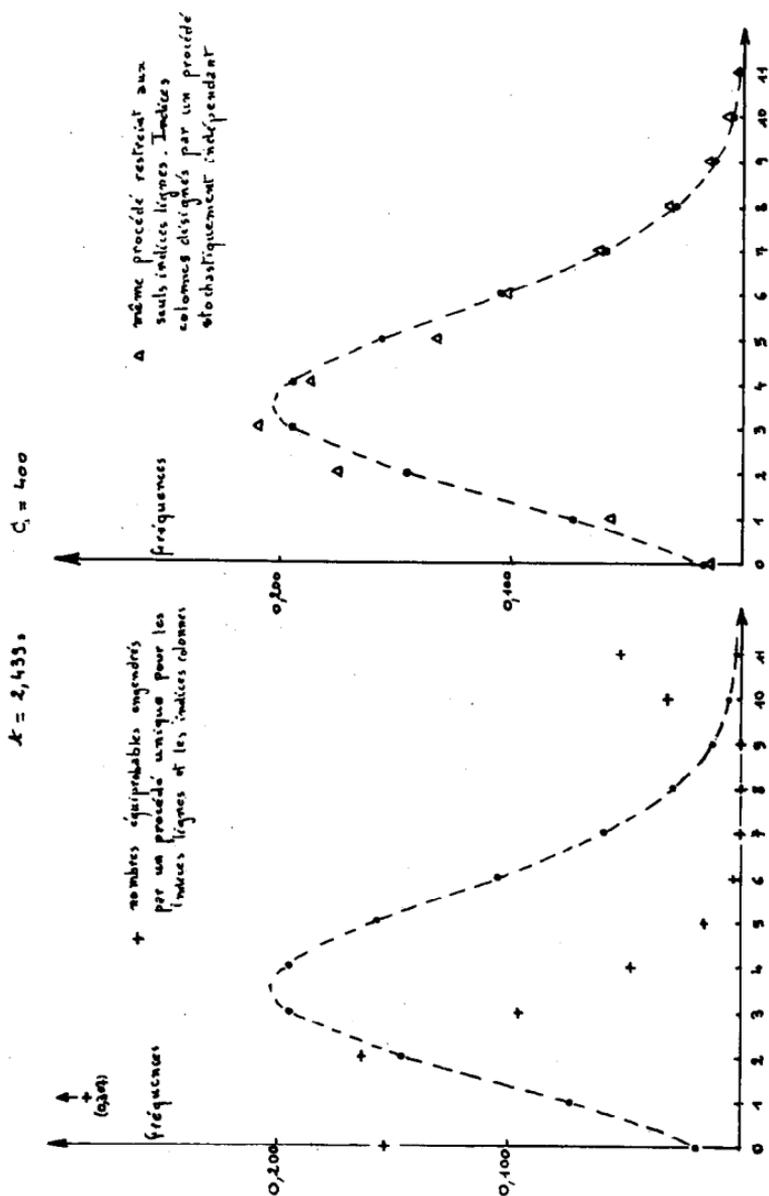


Fig. 8

**CONCLUSION.**

La simulation de l'aléatoire par l'aléatoire est faisable sur les micro-ordinateurs des lycées moyennant quelques précautions

dans la génération des lois de probabilités. Elle peut servir à restituer certains « aléas » de la pratique expérimentale lorsque le matériel qui permettrait de faire l'expérience est inaccessible physiquement ou financièrement. Elle peut servir à illustrer certains concepts délicats mais ne peut se substituer à une expérience réalisable en classe.

Beaucoup de travail reste à faire pour améliorer l'outil, par exemple en cherchant à extraire une loi de POISSON d'un phénomène naturel comme le bruit de fond d'un dispositif à semi-conducteurs.

Au plan pédagogique, les possibilités de la simulation sont loin d'être explorées. En libérant en partie mes collègues des contraintes de l'outil, j'espère que ce modeste travail sera le point de départ de fructueuses réflexions sur cette catégorie de problèmes.

Je remercie M. l'Inspecteur Général GIÉ d'avoir bien voulu relire les premiers manuscrits et formuler, outre des critiques de forme, une objection de fond. Sans cette objection la simulation n'aurait pas été aussi complète et le sujet exploré aussi passionnant.

---

## BIBLIOGRAPHIE

- 
- [1] *Evolution et hasard* (BLACK et OGBORN), B.U.P. n° 605, mai 1978.
- [2] *Simulations sur ordinateur : le paramagnétisme et la désaimantation adiabatique* (BRIGUET, GRAVERON, RUHLA), B.U.P. n° 605, mai 1978.
- [3] *Etude des désintégrations radioactives* (H. GIÉ, H. LE BAIL), B.U.P. n° 627, octobre 1980.
- [4] *Physique T.C.E.* (A. SAISON), p. 386.
- [5] *Examen de quelques processus stochastiques simples* (A. BRIGUET), B.U.P. n° 605, mai 1978.
- [6] W. FELLER « *An Introduction to Probability Theory and its Applications* », John Wiley Son Edition, 1977, Tome I.
- [7] H. DENIS-PAPIN et A. KAUFMANN, *Cours moderne de calcul des probabilités*, Albin Michel, 1965.
- [8] *Précisions sur une méthode d'exploitation rapide des mesures collectives d'une grandeur* (R. LESCOUL), B.U.P. n° 531, janvier 1971.
- [9] *Statistiques et probabilités. Erreurs et incertitudes* (R. LACHAUD), B.U.P. n° 505, mai 1968.
- [10] MURRAY R. SPIEGEL, *Théorie et applications de la statistique*, Série Schaum MacGraw Hill, 1978.
- [11] *Exploitation d'une série de mesures* (R. MOREAU), B.U.P. n° 596, juillet - août - septembre 1977.
-