81e Année - N° 695 Publication mensuelle Juin 1987

Bulletin de l'Union des Physiciens

Association de professeurs de Physique et de Chimie

Auto-entretien des oscillations

EXEMPLE D'APPLICATION AUX QUARTZ PIEZO-ELECTRIQUES

par A. FRÜHLING,

Université de Nancy I,
Vandœuvre-lés-Nancy.

Cet exposé provient de la remise en forme d'un enseignement de Licence dans une approche de généraliste, sur le fonctionnement d'un auto-oscillateur piézo-électrique comme le quartz.

Après l'étude des conditions générales d'oscillations stables, dans la limite de l'auto-réglage paramétrique cependant, et la description de quelques circuits, on passe au fonctionnement électromécanique du quartz et à son schéma équivalent. Un démultiplicateur de fréquence est présenté dans une annexe qu'il n'a pas été possible d'abréger davantage, bien qu'elle reste exclusivement descriptive, sous peine de passer sur trop de points importants et intéressants, sans difficultés au surplus.

I. ETUDE GENERALE

1) SCHEMA D'UN AUTO-OSCILLATEUR.

A) Description.

Un « système » (S) est caractérisé par sa relation de cause à effet entre l'entrée $u(t)$ et la sortie $y(t)$, que nous supposerons linéaire et à coefficients invariables dans le temps t.

La résolution de l'équation différentielle qui traduit cette relation fournit la sortie $y(t)$.

En général, on passe en transformée de Laplace pour $u(t)$ et $y(t)$, selon :

$$U(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau$$

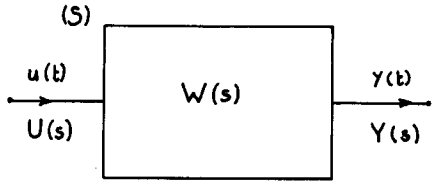


Fig. 1

avec inversement :

$$u(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{j\omega = -j\infty}^{+j\infty} U(s)\, e^{st}\, d(j\omega)$$

ce qui revient à chercher $y(t)$ sous la forme d'exponentielles e^{st} de la pulsation complexe $s = \sigma + j\omega$.

Avec la variable s qui remplace le temps, à la dérivation en t, correspond la multiplication par s.

On obtient alors pour le système, en l'absence de conditions initiales, l'équation algébrique :

$$Y(s) = W(s) \cdot U(s)$$

où le rapport $W(s) = Y(s)/U(s)$ est la transmittance de (S).

Du seul fait de l' « inertie » toujours présente, à pulsation croissante, la transmittance diminue jusqu'à s'annuler : $W(|s| = \infty) = 0$.

Si maintenant on boucle le système sur lui-même, comme sur la fig. 2, avec la sortie comme seule entrée, il est autonome.

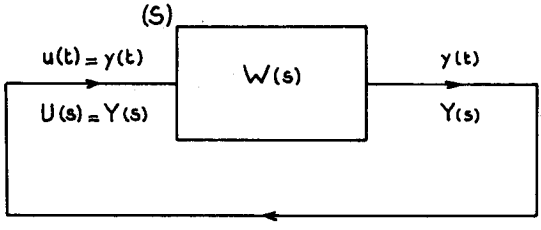


Fig. 2

Avec alors :

$$W(s) = 1 \qquad (1)$$

cette relation décrit par sa solution en s, la variation dans le temps du régime $y(t)$ qui satisfait à $Y(s) = W(s) \cdot Y(s)$.

B) Condition d'auto-oscillation.

Pour la solution $s = 0 + j\omega_0$ qui donne $Y(t) = Y_0 e^{0t} e^{j\omega_0 t}$, le régime autonome est sinusoïdal de pulsation ω_0 et d'amplitude constante.

Il y a donc auto-oscillation pour $W(j\omega) = 1$, et inversement, soit :

$$|W(j\omega)| = 1 \quad \text{et} \quad \arg W(j\omega) = 0 \qquad (2)$$

ou, de manière équivalente, en parties réelle (P.R.) et imaginaire (P.I.), pour :

$$\text{P.R. } W(j\omega) = 1 \quad \text{et} \quad \text{P.I. } W(j\omega) = 0. \qquad (2')$$

En général, $|W| = 1$ fixe la condition d'entretien, $\sigma = 0$, tandis que $\arg W(j\omega) = 0$ donne la pulsation d'auto-oscillation dont la valeur est d'autant mieux déterminée que $\arg W(j\omega)$ y varie plus rapidement.

Parfois on exploite $W(s) = 1$ d'une manière différente, mais qui ne change pas le fond.

C'est ainsi que le double intégrateur en $(1/s)^2$ de la fig. 3, avec le multiplieur $-p^2$, donc avec $W(s) = -\dfrac{s^2}{p^2}$, donne $\omega_0 = \pm p$.

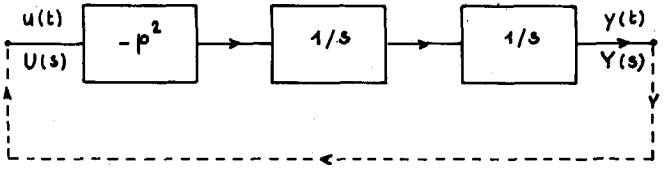


Fig. 3

Ce régime est justement celui décrit par $y + p^2 y = 0$ représenté avec le bouclage en tirets, qui explicite l'égalité $y = -p^2 y$.

2) EXEMPLES D'APPLICATION.

A) Auto-oscillateur R, C à amplificateurs opérationnels (1).

Considérons la cascade des deux amplificateurs opérationnels (A.O.) entourés des éléments résistance et capacité comme sur la fig. 4, et de tensions d'entrée et de sortie $U(s)$ et $Y(s)$.

(1) On pourra consulter dans l'annexe A les principales propriétés des amplificateurs opérationnels.

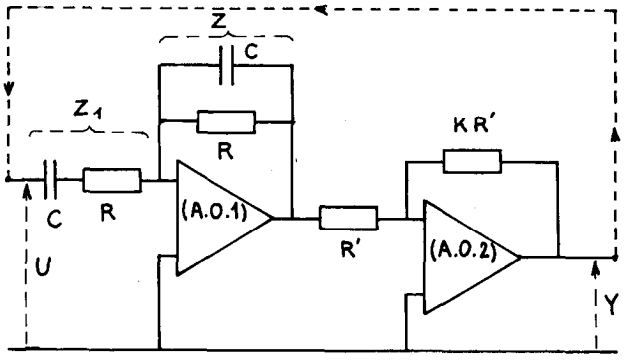


Fig. 4

Les impédances pour (A. O. 1) sont :

$$Z_1 = \frac{1 + RCs}{Cs} \quad \text{et} \quad Z = \frac{R}{1 + RCs}$$

et pour (A. O. 2), R' et KR'.

La transmittance de l'ensemble en traits pleins est :

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{KR'}{R'} \frac{\dfrac{R}{1 + RCs}}{\dfrac{1 + RCs}{Cs}} = \frac{KRCs}{(1 + RCs)^2},$$

soit, en posant $\omega_0 = 1/RC$:

$$W(s) = \frac{K\, s/\omega_0}{(1 + s/\omega_0)^2} = \frac{K}{2 + s/\omega_0 + \omega_0/s}. \qquad (3)$$

On note en passant, que pour $s = j\omega$, la transmittance en $j\omega$ est :

$$W(j\omega) = \frac{K\, j\omega/\omega_0}{(1 + j\omega/\omega_0)^2} = \frac{K/2}{1 + \dfrac{j}{2}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}. \qquad (3')$$

Cette transmittance est l'inverse de :

$$\frac{2}{K}\left[1 + \frac{j}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right] = \overline{ON},$$

dont la représentation, toujours à ω croissant, est la droite de la fig. 5 *a*. Elle est donc représentée selon $W(j\omega) = \overline{OM}$ par le cercle de la fig. 5 *b*. La différence $W(j\omega) - 1$ qu'on considèrera page 698, s'en déduit par translation de -1.

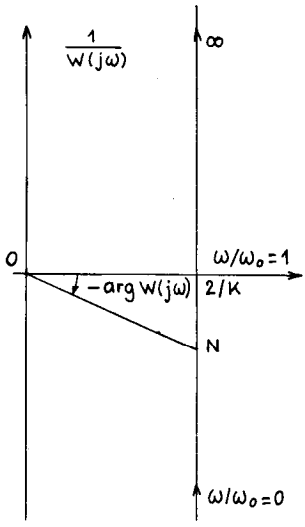


Fig. 5 *a*

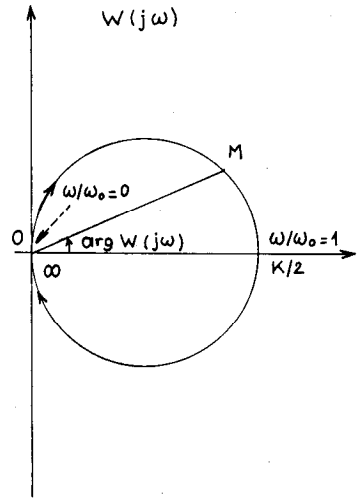


Fig. 5 *b*.

En revenant à l'équation $W(s) = 1$, représentée par le bouclage en tirets, soit :

$$s^2 + (2 - K)\,\omega_0\, s + \omega_0^2 = 0 \qquad (4)$$

on obtient la solution imaginaire pure $s = \pm j\omega_0$, pour $K = 2$, donc l'oscillation de pulsation ω_0 et d'amplitude constante.

Pour $K > 2$, la partie réelle σ de s est positive avec alors croissance de l'amplitude, tandis qu'avec $K < 2$, il y a décroissance.

B) Auto-oscillateur à cellule réactive en (II).

Considérons un tripôle actif idéal (T), unidirectionnel, de conductance nulle à l'entrée et G' à la sortie, de transconductance constante G_m, comme par exemple un transistor en « montage normal » [ou élément de type G] (2).

(2) Par opposition aux suiveurs de courant ou de tension.

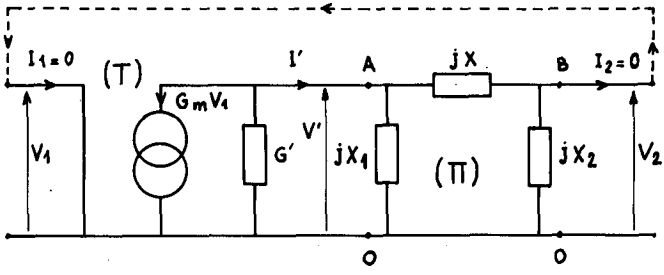


Fig. 6

Chargeons-le comme sur la fig. 6, par la seule cellule réactive en (Π) entre A, B et O, sans pertes, d'impédances élémentaires jX_1, jX_2 et jX, imaginaires pures suivant $j\omega$, et avec donc $I_2 = 0$.

Entre O et A, à la sortie de (T), l'impédance est :

$$Z = \frac{jX_1(X + X_2)}{X + X_1 + X_2},$$

tandis que le quotient V_2/V' des tensions de part et d'autre du (Π) est :

$$\frac{V_2}{V'} = \frac{X_2}{X + X_2}.$$

Le courant $G_m V_1$ traverse l'impédance :

$$\frac{Z/G'}{1/G' + Z} = \frac{Z}{1 + G'Z}$$

aux bornes de laquelle la tension est donc :

$$V' = \frac{-Z G_m V_1}{1 + G'Z} = -\frac{jX_1(X + X_2) G_m}{X + X_1 + X_2 + jG' X_1 (X + X_2)} V_1$$

avec le signe (—) puisque le courant descend les potentiels.

On en déduit pour la transmittance $\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_2}{V'} \cdot \frac{V'}{V_1}$ de l'ensemble (T) (Π) :

$$\frac{V_2}{V_1} = -\frac{j X_1 X_2 G_m}{X + X_1 + X_2 + jG' X_1 (X + X_2)}. \qquad (5)$$

En bouclant alors le système comme en tirets, avec $V_2 = V_1$, ce qui respecte aussi $I_2 = 0$, puisque $I_1 = 0$, on a auto-oscillation lorsque :

$$-\frac{j X_1 X_2 G_m}{X + X_1 + X_2 + jG' X_1 (X + X_2)} = 1 \qquad (6)$$

possède une solution imaginaire pure en $j\omega$, donc réelle en ω.

Il faut ainsi la double condition :

$$X + X_1 + X_2 = 0 \qquad (7)$$

et :

$$\frac{X_2 G_m}{G' (X + X_2)} = -1$$

où la seconde, avec la première, donne :

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{G'}{G_m}. \qquad (7')$$

Les réactances X_1 et X_2 sont ainsi du même signe, opposé à celui de X.

Par ailleurs, (7) montre que l'impédance Z est alors infinie, donc que $I' = 0$.

Le (II), ainsi en résonance parallèle, est parcouru par un courant qui s'y conserve, de telle sorte qu'avec (7') les tensions V' et V_2 sont opposées.

En outre, autre formulation de (7), l'admittance est nulle entre deux quelconques des trois bornes A, B ou O du (II).

Pour poursuivre, examinons des cas concrets.

a) Pour $jX = jL\omega$, $jX_1 = -\frac{j}{C_1 \omega}$, $jX_2 = -\frac{j}{C_2 \omega}$, cas

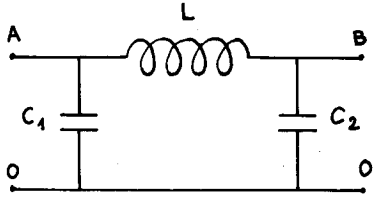


Fig. 7

de l'oscillateur Colpitts (fig. 7), les conditions précédentes sont satisfaites pour :

$$L\omega^2 = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \tag{8}$$

qui définit la pulsation d'oscillation, et :

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{G'}{G_m}$$

qui en conditionne l'entretien.

b) Pour $jX = j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = jL\omega_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$, où $\omega_0 = 1\sqrt{LC}$ est la pulsation de résonance de L, C, et $jX_1 = -\frac{j}{C_1\omega}$, $jX_2 = -\frac{j}{C_2\omega}$, comme sur la fig. 8, la pulsation d'auto-oscillation est définie par :

$$L\omega_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2 \omega} \tag{9}$$

avec toujours $\frac{C_1}{C_2} = \frac{G'}{G_m}$.

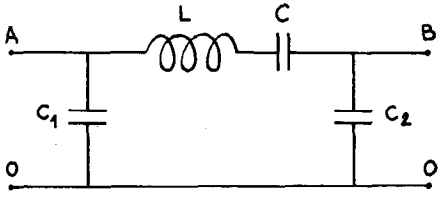


Fig. 8

Lorsque ω est proche de ω_0, c'est-à-dire lorsque le « désaccord » $\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$ est assez faible pour que :

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \simeq \frac{2(\omega - \omega_0)}{\omega_0},$$

on a l'écart relatif :

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \simeq \frac{(C_1 + C_2)\,C}{2\,C_1 C_2}. \tag{9'}$$

c) Le cas de la fig. 9 sera considéré dans la suite page 724.

A l'auto-oscillation, l'annulation de l'admittance entre les points A et B donne, toujours avec $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$:

$$\frac{1}{L\omega_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \left(C_0 + C_{12} + \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\right)\omega.$$

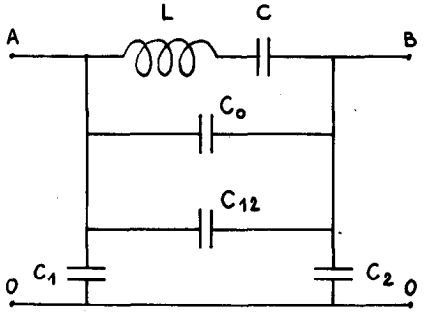


Fig. 9

Si l'écart est faible, on en déduit, en posant :

$$C_L = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} :$$

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \simeq \frac{C}{2(C_0 + C_{12} + C_L)} \qquad (10)$$

avec encore :

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{G'}{G_m}.$$

C) Usage d'un inverseur.

Le tripôle actif (T) du montage général de la fig. 6, a pour rôle essentiel l'inversion des tensions depuis V_1 ($= V_2$), à V'.

Ce rôle peut aussi être tenu par un inverseur logique (I) dont on montrera plus loin (annexe B, page 733), qu'il joue aussi le rôle d'un amplificateur autour du basculement.

La fig. 10 schématise ce montage.

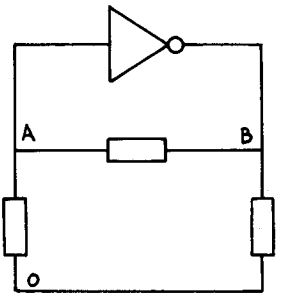


Fig. 10

3) STABILISATION DES AMPLITUDES PAR AUTO-REGLAGE PARAMETRIQUE.

A) Examen qualitatif.

Jusqu'à présent, l'exposé a surtout été consacré à la pulsation d'auto-oscillation, l'amplitude A supposée constante dès lors que pour $s = \sigma + j\omega$, on avait $\sigma = 0$.

Mais ce cadre est insuffisant, ne serait-ce que pour assurer le « démarrage » des oscillations, sans compter que σ n'est jamais rigoureusement nul, et même fluctue selon les influences extérieures.

Dans ces conditions, on munit le système d'un composant non-linéaire pour lequel nous nous limiterons au cas où ses variations, très lentes par rapport à la période d'oscillation, assurent la stationnarité de l'amplitude autour d'une valeur A_0, l'oscillation restant à chaque instant sensiblement sinusoïdale.

Plus précisément, on peut s'appuyer sur l'équation (4) de l'oscillateur R, C, déjà discutée pour l'influence de K. C'est ainsi qu'on prendra pour l'élément KR' de la fig. 4 une thermistance à coefficient de température négatif (CTN) pour laquelle le paramètre K, autour de K = 2, diminue quand l'amplitude du courant traversant augmente, et inversement.

B) Etude générale (3).

Comme toute fonction de la variable s, la fonction $W(s) - 1$ traduit une correspondance entre les images de s du plan $s = \sigma + j\omega$, et l'image $W(s) - 1$ du plan (W) des transmittances.

(3) Les sous-paragraphes B et C peuvent être omis dans une première lecture.

Puisque $W(s) - 1$ est toujours une fonction analytique (4), cette transformation est conforme, c'est-à-dire conserve les angles et les positions relatives.

C'est ainsi que l'axe imaginaire (I), du plan des s, où donc $s = j\omega$, parcouru de $-j\infty$ à $+j\infty$, se retrouve selon le diagramme (Γ) de $W(j\omega) - 1$ orienté dans le sens des ω croissants, ou diagramme de Nyquist, pour $W(s) - 1$.

Comme $W[(s) \to \infty] = 0$, ce diagramme est fermé sur lui-même en -1 ; en outre, il est symétrique par rapport à l'axe réel, avec des valeurs opposées pour ω.

Le demi-plan $\sigma < 0$, à gauche de (I), est représenté sur la gauche de (Γ).

Il en résulte qu'à la condition (1),

$$W(s = \sigma + j\omega) - 1 = 0$$

représentée par l'origine O du plan (W), correspond :

$\sigma = 0$, si (Γ) passe par O, avec alors ω_0,

$\sigma < 0$, si (Γ) laisse O à sa gauche,

$\sigma > 0$, si (Γ) laisse O à sa droite.

C'est ce que montrent les cercles de la fig. 11, relatifs à l'exemple du paragraphe 2.A. pour lequel on retrouve ainsi les conclusions de la page 691.

Introduisons alors l'effet d'un paramètre réglable, fonction de l'amplitude A du régime, et dont la variation doit ramener spontanément A à sa valeur initiale A_0 dans le cas d'un écart, la pulsation étant celle de l'auto-oscillation, ici ω_0, avec maintenant $W(s, A)$ pour la transmittance.

Pour cela, traçons dans le plan (W) le double réseau des courbes $W(j\omega, A) - 1$, pour des valeurs constantes, de A d'une part, ou courbes « équiamplitudes » (A), et de ω d'autre part, ou « équipulsations », pour lesquelles on considèrera les valeurs croissantes de ω et de A comme on le précisera p. 700 (fig. 12).

---

(4) Une fonction analytique de la variable complexe $s = \sigma + j\omega$, peut s'exprimer exclusivement en fonction de s, et inversement. Elle est alors dérivable en s, la dérivation se faisant comme pour une variable réelle. Ainsi, $\sigma^2 + 2j\sigma\omega$ n'est pas analytique, alors que $\sigma^2 - \omega^2 + 2j\sigma\omega = s^2$ l'est, sa dérivée étant $2s$.

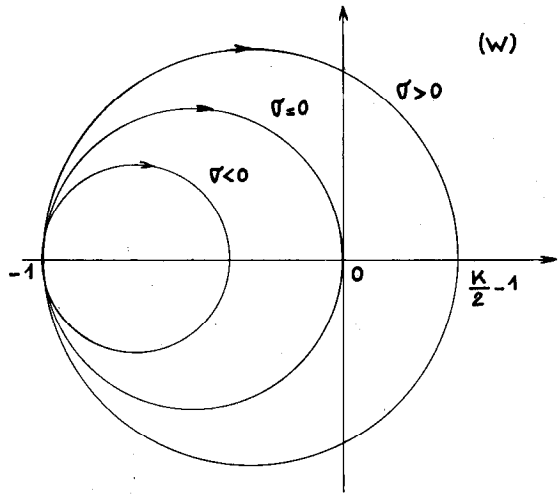


Fig. 11

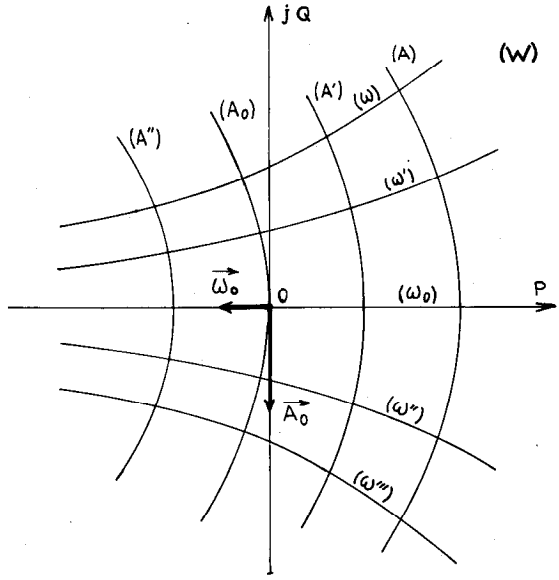


Fig. 12

Nous savons que les courbes $A = A_0$ et $\omega = \omega_0$ se coupent à l'origine O.

Décomposons $W(j\omega, A) - 1 = P(\omega, A) + jQ(\omega, A)$ en parties réelle et imaginaire.

Si on donne alors à la pulsation et à l'amplitude, à partir de ω_0 et de A_0, de petits accroissements $\delta\omega = \delta\omega_0 - j\delta\sigma$ (5) et δA, on obtient autour de O :

$$W[j\omega_0 + j(\delta\omega_0 - j\delta\sigma), A_0 + \delta A] - 1 \simeq$$

$$P(\omega_0, A_0) + jQ(\omega_0, A_0) +$$

$$+ \left(\frac{\partial P}{\delta\omega} + j\frac{\partial Q}{\partial\omega}\right)_0 (\delta\omega_0 - j\delta\sigma) + \left(\frac{\partial P}{\partial A} + j\frac{\partial Q}{\partial A}\right)_0 \delta A.$$

Mais comme toujours $W - 1 = 0$, et que :

$P(\omega_0, A_0) + jQ(\omega_0, A_0) = 0$ pour l'auto-oscillation, on a, en annulant la somme des deux derniers termes du second membre :

$$\frac{\partial P}{\partial\omega}\delta\omega_0 + \frac{\partial Q}{\partial\omega}\delta\sigma = -\frac{\partial P}{\partial A}\delta A,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial\omega}\delta\omega_0 - \frac{\partial P}{\partial\omega}\delta\sigma = -\frac{\partial Q}{\partial A}\delta A$$

où les dérivées, qui sont aussi celles pour W, sont prises en O.

En résolvant en $\delta\sigma$ et $\delta\omega_0$, on obtient :

$$\delta\sigma = \frac{\frac{\partial P}{\partial\omega}\frac{\partial Q}{\partial A} - \frac{\partial P}{\partial A}\frac{\partial Q}{\partial\omega}}{\left(\frac{\partial P}{\partial\omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial\omega}\right)^2}\delta A \qquad (11)$$

$$\delta\omega_0 = -\frac{\frac{\partial P}{\partial A}\frac{\partial P}{\partial\omega} + \frac{\partial Q}{\partial A}\frac{\partial Q}{\partial\omega}}{\left(\frac{\partial P}{\partial\omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial\omega}\right)^2}\delta A. \qquad (11')$$

(5) Qui correspond à $j\delta\omega = \delta\sigma + j\delta\omega_0$, donc au facteur d'amortissement $\delta\sigma$, dont la valeur est nulle en O, et que nous considérerons algébriquement.

Pour que l'amplitude A_0 du régime soit stationnaire, il faut qu'à $\delta A > 0$ corresponde $\delta\sigma < 0$, et inversement, afin que l'écart tende à s'annuler quel qu'en soit le signe.

Il y a ainsi stationnarité pour $\delta\sigma \cdot \delta A < 0$, donc si autour de O :

$$\frac{\delta P}{\partial\omega}\frac{\delta Q}{\partial A} - \frac{\partial P}{\partial A}\frac{\partial Q}{\partial\omega} < 0. \qquad (12)$$

Or, les dérivées, $\frac{\partial P}{\partial\omega}$, $\frac{\partial Q}{\partial\omega}$, prises en O, sont les projections de la tangente $\vec{A}_0$ en O, à l'équiamplitude (A_0), dans le sens de ω croissant. De même, $\frac{\partial P}{\partial A}$, $\frac{\partial Q}{\partial A}$ sont celles de la tangente $\vec{\omega}_0$ en O, à l'équipulsation (ω_0), orientée selon A croissant.

En terme de produit vectoriel, la condition (12) s'écrit :

$$\vec{\omega}_0 \wedge \vec{A}_0 > 0. \qquad (12')$$

C'est le critère de Lœb qui signifie que l'équipulsation (ω_0) est alors coupée de droite à gauche par l'équiamplitude (A_0), comme c'est le cas sur la fig. 12.

L'expression (11) de $\delta\sigma$ permet d'expliciter la constante de temps du rappel à zéro de l'écart d'amplitude δA.

En effet, comme le facteur d'amortissement $\delta\sigma$, inverse de cette constante, est la « vitesse » de la variation relative $\delta A/A_0$ de l'amplitude, on a :

$$\delta\sigma = \frac{1}{A_0}\frac{d(\delta A)}{dt}.$$

Pour expliciter la « vitesse » de variation relative de l'écart $\frac{d(\delta A)}{\delta A}$ qui nous intéresse, il suffit de multiplier l'expression précédente de $\delta\sigma$ par $A_0/\delta A$, pour en tirer avec (11) :

$$\frac{1}{\delta A}\frac{d(\delta A)}{dt} = A_0 \frac{\frac{\partial P}{\partial\omega}\frac{\partial Q}{\partial A} - \frac{\partial P}{\partial A}\frac{\partial Q}{\partial\omega}}{\left(\frac{\partial P}{\partial\omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial\omega}\right)^2}$$

dont l'inverse est la constante de temps recherchée.

L'expression (11') de $\delta\omega_0$ explicite la variation en pulsation provoquée par l'écart d'amplitude δA. Au deuxième ordre près, elle est nulle si les courbes (A_0) et (ω_0) sont orthogonales, cas pour lequel l'amortissement est maximal.

A titre d'exemple, reprenons le cas du paragraphe 2.A., avec :

$$W(j\omega) - 1 = \frac{K}{2 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} - 1$$

où $K = K(A)$ est fonction décroissante de A pour une résistance KR' à C. T. N.

Les équiamplitudes sont les cercles de la fig. 13 dont le diamètre $K(A)/2$ décroît quand A croît.

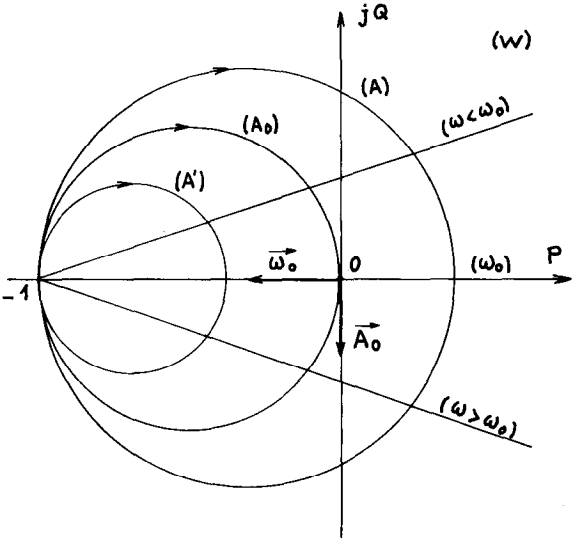


Fig. 13

Les équipulsations $\frac{K(A)}{2 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} - 1$, ω = cte, sont les droites issues de -1, dont la pente $\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)$ décroît quand ω/ω_0 croît.

L'intersection en O, pour (ω_0) et (A_0), telle que $K(A_0) = 2$, donne l'auto-oscillation de pulsation ω_0, dont l'amplitude A_0 est stationnaire, compte tenu de la position des tangentes $\vec{\omega_0}$ et $\vec{A_0}$.

C) Cas usuel.

Souvent, le paramètre réglable en fonction de l'amplitude n'intervient, dans la transmittance, que par le facteur $1/N(A)$, indépendant de s, avec donc la forme :

$$W(s) = L(s) \frac{1}{N(A)}.$$

Comme le bouclage $W(s) = 1$ donne $L(s) = N(A)$, l'auto-oscillation est définie par :

$$L(j\omega_0) = N(A_0).$$

Autour de ce point, avec les notations précédentes, on a encore :

$$L[j\omega_0 + j(\delta\omega_0 - j\delta\sigma)] = N(A_0 + \delta A).$$

On en déduit, avec les parties réelle et imaginaire P et jQ, ici de L :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \omega} + j\frac{\partial Q}{\partial \omega}\right)_0 (\delta\omega_0 - j\delta\sigma) \simeq \left(\frac{\partial N}{\partial A}\right)_0 \delta A$$

d'où :

$$\frac{\partial P}{\partial \omega}\delta\omega_0 + \frac{\partial Q}{\partial \omega}\delta\sigma = \frac{\partial N}{\partial A}\delta A$$

et :

$$\frac{\partial Q}{\partial \omega}\delta\omega_0 - \frac{\partial P}{\partial \omega}\delta\sigma = 0$$

soit en résolvant en $\delta\sigma$,

$$\delta\sigma = \frac{\dfrac{\partial N}{\partial A}\dfrac{\partial Q}{\partial \omega}}{\left(\dfrac{\partial Q}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial P}{\partial \omega}\right)^2}\delta A$$

où les dérivées sont à prendre pour ω_0 et A_0.

Pour la stationnarité, $\delta\sigma \cdot \delta A < 0$, il faut ainsi :

$$\frac{\partial N}{\partial A}\frac{\partial Q}{\partial \omega} < 0$$

et inversement, donc que le produit vectoriel des vecteurs de composantes $\frac{\partial N}{\partial A}, 0$, et $0, \frac{\partial Q}{\partial \omega}$, soit négatif.

Pour l'exemple considéré, $L(j\omega) = \frac{1}{2 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$, représenté par le cercle de la fig. 14, et $N(A) = 1/K(A)$, axe réel, pris dans le sens croissant, on retrouve bien la stationnarité.

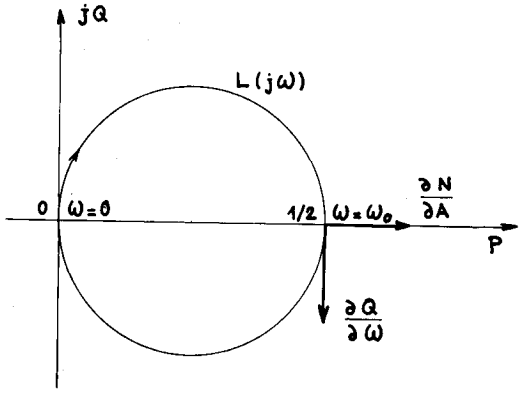


Fig. 14

II. AUTO-OSCILLATEUR PIEZO-ELECTRIQUE A QUARTZ

1) PIEZO-ELECTRICITE.

Une molécule, assemblage neutre de charges électriques, se polarise par déformation, notamment sous l'effet d'un champ électrique $\vec{\mathcal{E}}$ en acquérant un doublet électrique supplémentaire $\Delta\vec{\mu} = q \cdot \Delta\vec{l}$ (fig. 15). Cette polarisation diélectrique crée, pour le volume $d\tau$ le moment électrique :

$$d\vec{\mathfrak{M}} = \vec{p} \cdot d\tau$$

où $\vec{p}$ est le vecteur polarisation.

Mais la déformation peut résulter d'une tension mécanique $\vec{T}$, quoique faiblement, car cette force est toujours très petite par rapport aux forces de cohésion interne.

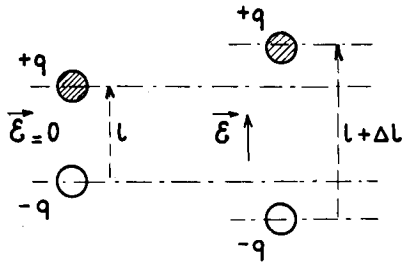


Fig. 15

La polarisation correspondante ne se manifeste macroscopiquement que pour les ensembles ordonnés de molécules, c'est-à-dire pour les monocristaux, et à condition que ceux-ci ne possèdent pas de centre de symétrie (sauf exception).

C'est la piézo-électricité décrite par la proportionnalité :

$$\vec{p} = K\vec{T} \qquad (13)$$

entre la tension mécanique et son effet, la polarisation piézo-électrique, le facteur K étant le module, ou constante piézo-électrique (6).

Assez générale, quoique rarement notable, la piézo-électricité a été prévue et découverte en 1880 par les frères J. et P. CURIE, sur le cas typique du quartz auquel nous nous limitons presque toujours dans la suite.

La silice SiO_2, sous forme de « cristal de roche », ou quartz α, naturel ou synthétique, énanthiomorphe, appartient à la classe rhomboédrique trigonale. Il se présente suivant un prisme droit à 6 côtés coiffés de deux pyramides où les extrémités d'une arête sur deux présentent des troncatures qui vont avec l'absence d'un centre de symétrie (fig. 16 *a*).

L'axe principal ($\vec{Z}$), ternaire, est l'axe optique (fig. 16 *b*). Les trois axes binaires ($\vec{X}$) qui lui sont perpendiculaires, sortant par les arêtes tronquées, sont les axes électriques. Les axes ($\vec{Y}$), ou axes mécaniques, complètent un trièdre trirectangulaire direct par convention pour le quartz gauche (7).

(6) En réalité, la relation (13) n'est que l'expression simple pour des directions privilégiées, de la relation générale tensorielle de même forme.

(7) Ces conventions ne sont pas toujours suivies, et ici, elles n'ont guère d'intérêt.

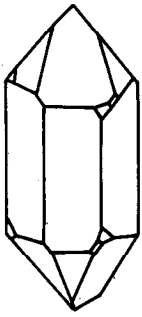


Fig. 16 *a*.

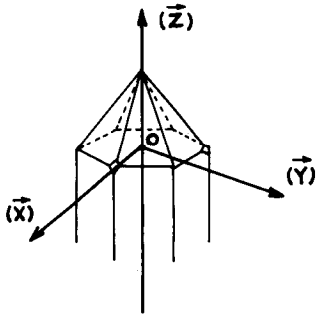


Fig. 16 *b*.

Le plus souvent, le quartz est utilisé en lames parallélipipédiques, taillées selon les axes du cristal, les faces principales perpendiculaires à l'axe électrique : c'est la coupe (X), ou coupe de CURIE, pour laquelle la piézo-électricité est maximale (fig. 17).

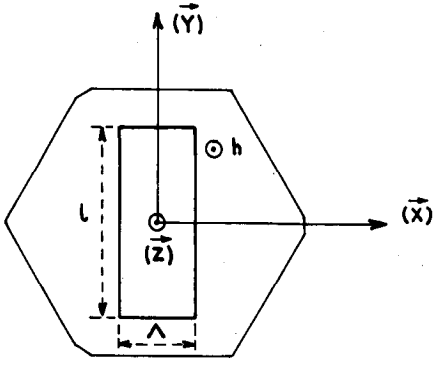


Fig. 17

Soient Λ l'épaisseur ou longueur de la lame, l et h la largeur et la hauteur, donc $S = lh$ la surface.

L'application de la force de traction $\vec{F}$ selon $(\vec{X})$, donc de la tension $\vec{F}/lh$ provoque d'une part l'allongement x et d'autre part la polarisation piézo-électrique parallèle, ou longitudinale :

$$\vec{p} = K\vec{F}/lh \qquad (14)$$

où, numériquement, $K = 2{,}3 \cdot 10^{-12}$ C/N.

Cette polarisation crée à la surface de la lame la distribution superficielle de charges fictives de densité $\sigma = p$, et de valeur totale :

$$Q = KF. \qquad (14')$$

Si $\vec{F}$ agit suivant $(\vec{Y})$, avec la tension $F/\Lambda h$, il y a encore suivant $(\vec{X})$, dans l'effet maintenant transversal, la polarisation piézo-électrique :

$$p' = -KF/\Lambda h. \qquad (15)$$

La charge correspondante, $\dfrac{KF}{\Lambda h} lh = KF\ l/\Lambda$, est la précédente multipliée par l/Λ (8).

Au phénomène piézo-électrique direct décrit, correspond le phénomène inverse prévu par G. LIPPMANN en 1881 et vérifié aussitôt par les frères CURIE : au dépôt d'une distribution de charge $\pm\sigma$ sur les faces de la lame correspond l'allongement x de celle-ci.

Le couplage électromécanique ainsi explicité a été utilisé la première fois par P. LANGEVIN en 1916 dans les générateurs ultrasonores à quartz pour le sondage sous-marin.

2) CONDENSATEUR A DIELECTRIQUE PIEZO-ELECTRIQUE ; ETAT STATIQUE.

En pratique, les faces de la lame piézo-électrique sont toujours métallisées pour constituer un condensateur de capacité $C = \dfrac{\varepsilon S}{\Lambda}$, où la permittivité est $\varepsilon \simeq 4{,}5/36\pi \cdot 10^9 \simeq 4 \cdot 10^{-11}$ pour le quartz.

De cette manière, les charges de polarisation piézo-électriques créent par influence des charges effectives égales sur la surface extérieure des armatures (A) si celles-ci sont isolées (fig. 18 *a*), ou changées de signe pour le potentiel nul, donc le champ nul dans la lame (fig. 18 *b*).

La métallisation facilite en outre la mise en œuvre de l'effet inverse pour ce condensateur piézo-électrique, le « quartz » dans la suite, représenté en général comme sur la fig. 18 *c*.

---

(8) L'identité des coefficients K dans (14) et (15) résulte de la forme particulière pour le quartz du tenseur piézo-électrique.

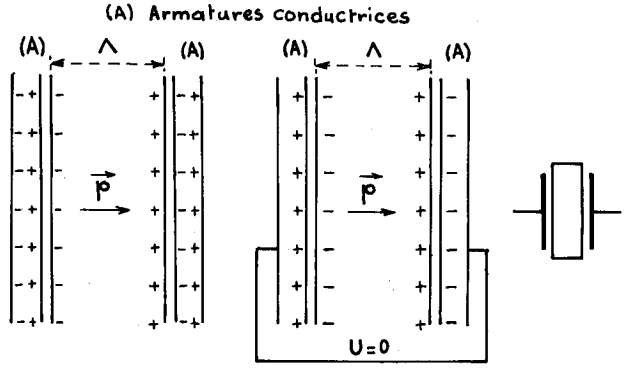


Fig. 18 *a*. Fig. 18 *b*. Fig. 18 *c*.

Si alors on applique au « quartz » :

la tension électrique U, sans force, il prend la charge effective :

$$CU = \frac{\varepsilon \Lambda}{S} U,$$

la force F, à tension électrique nulle, il prend la charge :

$$-KF$$

compte tenu du changement de signe qui vient d'être évoqué.

En superposant ces états particuliers, on a, pour l'effet général provoqué par les causes U et F, la charge totale :

$$Q = CU - KF.$$

Mais sous l'action de la force, il s'allonge de x selon $\frac{F}{S} = E \frac{x}{\Lambda}$, où E est le module d'Young, ici $E = 8 \cdot 10^{10}$ N/m^2.

On en déduit :

$$Q = CU - \frac{KES}{\Lambda}$$

soit, en explicitant U, avec $\frac{S}{\Lambda} = \frac{C}{\varepsilon}$:

$$U = \frac{Q}{C} + \frac{KE}{\varepsilon} x.$$

En posant $A = \frac{KE}{\varepsilon}$, on a donc la forme :

$$U = \frac{Q}{C} + Ax$$

où les variables de quantité Q et x sont prises comme causes de l'effet U, variable de tension.

Le premier terme correspond à la capacité habituelle et le second traduit l'effet piézo-électrique direct.

Le facteur piézo-électrique :

$$A = \frac{KE}{\varepsilon} \tag{16}$$

ne dépend que des propriétés piézo-électriques, mécaniques et diélectriques du matériau, à l'exclusion des dimensions géométriques.

De la même manière, la variable force de tension mécanique est reliée à l'état allongement x et charge Q par une relation de la forme :

$$F = kx + A'Q$$

où $k = \frac{ES}{\Lambda}$ est la dureté du ressort constitué par la lame.

Pour préciser le facteur A', considérons la modification simultanée dx, dQ, de l'état du système en régime adiabatique et réversible pour laquelle l'augmentation d'énergie est :

$$U dQ + F dx = kx\,dx + \frac{Q dQ}{C} + Ax\,dQ + A'Q dx.$$

Comme cette différentielle doit être totale exacte, il faut $A = A'$.

Ainsi, on a simultanément :

$$\begin{aligned} U &= \frac{Q}{C} + Ax \\ F &= AQ + kx \end{aligned} \tag{17}$$

qui explicite le couplage électromécanique par les « déplacements » Q et x, avec le coefficient $A = \frac{KE}{\varepsilon}$.

Numériquement pour le quartz, on a :

$$A = \frac{2{,}3 \cdot 10^{-12} \cdot 8 \cdot 10^{10}}{4 \cdot 10^{-11}} = 4{,}6 \cdot 10^{9} \text{ N/C} \quad (\text{ou V/m}).$$

L'effet piézo-électrique modifie les comportements électrique et élastique.

Sans piézo-électricité, $A = 0$, on a $U = Q/C$, avec alors $x = 0$ si $F = 0$.

Pour $A \neq 0$, avec toujours $F = 0$, le système précédent donne :

$$x = -\frac{A}{k}Q, \text{ donc } U = \frac{Q}{C} - \frac{A^2}{k}Q = \frac{1}{C}\left(1 - \frac{A^2C}{k}\right)Q.$$

En explicitant A, puis C et k, le facteur entre parenthèses s'écrit :

$$1 - \frac{A^2C}{k} = 1 - AA\frac{C}{k} = 1 - A\frac{KE}{\varepsilon}\frac{\varepsilon S}{\Lambda}\frac{\Lambda}{ES} = 1 - AK \qquad (18)$$

où $AK = \dfrac{K^2E}{\varepsilon} > 0$ ne dépend aussi que du matériau.

La capacité C pour $A = 0$, devient donc :

$$\frac{C}{1 - AK}. \qquad (18')$$

On obtient de la même manière, la dureté apparente du ressort :

$$k(1 - AK). \qquad (18'')$$

Si numériquement, le terme :

$$AK = 4{,}6 \cdot 10^{9} \cdot 2{,}3 \cdot 10^{-12} \simeq 0{,}01$$

paraît simplement être un terme correctif, pour le quartz tout au moins, il a, fondamentalement, la plus grande importance énergétique dans le couplage entre Q et x.

En effet, l'énergie emmagasinée dans C est $\dfrac{CU^2}{2}$, et dans la

capacité apparente $\dfrac{CU^2}{2(1-AK)}$, donc augmentée en valeur relative de AK. Cette augmentation est l'énergie piézo-électrique convertible sous forme mécanique dans les transducteurs d'énergie dont l'étude n'entre cependant pas dans ce cadre.

3) REGIME DYNAMIQUE.

On admettra que les effets statiques précédents subsistent en mouvement.

En valeurs instantanées dans le temps t, les équations qui décrivent le régime global sont donc de la forme :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + r\dot{x} + kx + AQ &= F \\ Q/C + Ax &= U \end{aligned} \qquad (19)$$

où $\dot{x} = dx/dt$, $\ddot{x} = d^2x/dt^2$, m étant une masse et r un coefficient de dissipation.

Mais en général, la déformation n'est plus régulièrement répartie dans l'épaisseur Λ de la lame, comme en régime statique où la dilatation relative est x/Λ.

Dans ce dernier cas, avec $Q = 0$, à la dilatation relative x/Λ, correspondent la tension Ax et le champ électrique uniforme Ax/Λ.

En régime quelconque, la tranche d'épaisseur dl, à la distance l du milieu (fig. 19 a), avec l'allongement $\dfrac{x}{2}(l, t)$, est soumise à la dilatation relative :

$$\frac{\partial x(l, t)}{2\,\partial l}\, dl$$

avec donc le champ électrique :

$$A\,\frac{\partial x(l, t)}{2\,\partial l}\, dl.$$

La différence de potentiel qui intervient en (19) est alors :

$$\frac{A}{2}\int_{l=-\Lambda/2}^{+\Lambda/2} \frac{\partial x(l, t)}{\partial l}\, dl.$$

Pour le régime mécanique libre considéré dans la suite, $F = 0$, le cas le plus simple et le plus fréquent est celui du mode

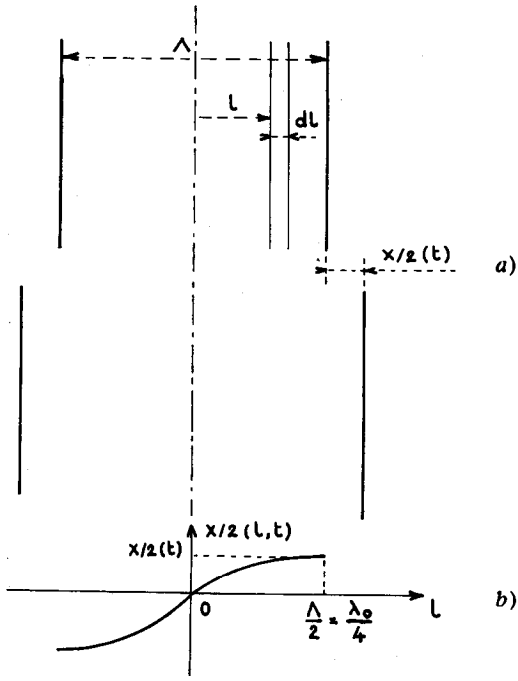


Fig. 19

vibratoire longitudinal en deux fois quart-donde $\lambda_0/4$, le milieu étant immobile ; c'est le mode fondamental.

On a alors, comme sur la fig. 19 *b* :

$$\frac{x(l,t)}{2} = \frac{x(t)}{2} \sin 2\pi \frac{l}{\lambda_0} \qquad (20)$$

où $x(t)$ est l'allongement de l'extrémité de la lame, ($l = \Lambda/2$), la variation dans le temps étant sinusoïdale.

La différence de potentiel précédente :

$$Ax(t) \int_0^{\lambda_0/4} \frac{\partial}{\partial l} \left(\sin 2\pi \frac{l}{\lambda_0} \right) dl = Ax(t)$$

est donc la même qu'en régime statique.

En d'autres termes, le coefficient A du système (19) est identique au facteur piézo-électrique défini statiquement en (16).

Pour la masse m du mouvement et dans les contraintes k et r, on prend les constantes énergétiques « localisées » équivalentes calculées dans les cours de Mécanique, et qui, numériquement inférieures aux constantes statiques, en sont néanmoins voisines.

En revenant au détail dans le temps du régime vibratoire longitudinal libre en $x(t, l)$, on établit dans l'étude de la dynamique des tiges libres aux extrémités, qu'avec la longueur Λ, la pulsation pour le fondamental est :

$$\omega_0 = 2\pi \sqrt{\frac{E}{\varrho}} \cdot \frac{1}{2\Lambda} \tag{21}$$

où ϱ est la masse volumique et $\sqrt{E/\varrho}$ la vitesse de propagation longitudinale d'une déformation.

Pour les harmoniques supérieurs, les pulsations sont les multiples entiers de ω_0.

Ces régimes libres sont aussi les régimes de résonance.

Pour le quartz, $\varrho = 2{,}65 \cdot 10^3$ kg/m^3 donne $\sqrt{E/\varrho} = 5\,500$ m/s.

A la fréquence souvent utilisée de $2^{22} = 4194304$ Hz correspond pour le fondamental la longueur :

$$\Lambda = \frac{5\,500}{2 \cdot 4{,}19 \cdot 10^6} = 0{,}66 \cdot 10^{-3} \text{ m (9).}$$

Pour $2^{15} = 32768$ Hz, d'usage courant aussi, on aurait $\Lambda = 84$ mm (10).

4) REGIME ELECTRIQUE D'ENSEMBLE - SCHEMA EQUIVALENT.

A) Préliminaire.

Le système de la fig. 20 a pour impédance en s, entre A et B :

$$\frac{1/Cs\,(L_m s + R_m + 1/C_m s)}{1/Cs + L_m s + R_m + 1/C_m s} = \frac{L_m C_m s^2 + R_m C_m s + 1}{Cs\,(L_m C_m s^2 + R_m C_m s + 1 + C_m/C)}. \tag{22}$$

(9) A $\Lambda = 1$ mm, correspond 2,8 MHz avec la longueur d'onde électromagnétique d'environ 110 m, ce qui conduit, en jargon, à l'audacieuse extrapolation de langage : « un quartz oscille à 110 m par mm ».

(10) En réalité, ces fréquences numériquement « simples » sont, comme on le verra en (26'), (33) et (34), celles du système résultant, inférieures de quelques 10^{-3} à la fréquence définie par (21).

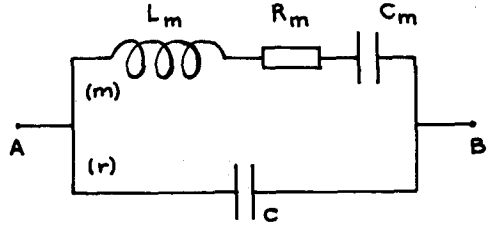


Fig. 20

B) Impédance du quartz.

En régime mécanique libre, F = 0, les équations (19) sont en s :

$$[ms^2 + rs + k]\,X(s) + A\,Q(s) = 0$$
$$Q(s)/C + A\,X(s) = U(s).$$

En éliminant $X(s)$, on obtient :

$$\left[\frac{1}{C} - \frac{A^2}{ms^2 + rs + k}\right] Q(s) = U(s).$$

L'impédance du quartz est ainsi (11) :

$$\frac{U(s)}{sQ(s)} = \frac{ms^2 + rs + k - A^2C}{Cs(ms^2 + rs + k)}.$$

C) Schéma équivalent du quartz.

En divisant l'expression précédente en haut et en bas par $k - A^2C = k(1 - AK)$ établi en (18), on a pour l'impédance :

$$\frac{\dfrac{m}{k(1-AK)}s^2 + \dfrac{r}{k(1-AK)}s + 1}{Cs\left[\dfrac{m}{k(1-AK)}s^2 + \dfrac{r}{k(1-AK)}s + \dfrac{1}{1-AK}\right]}. \qquad (23)$$

Cette impédance correspond donc au schéma préliminaire 20 qui représente ainsi entre A et B le fonctionnement électrique du quartz.

---

(11) Dans la suite, la charge n'interviendra plus et le symbole Q sera réservé au facteur de qualité.

La branche (r) de ce schéma est constituée par la capacité statique ou de repos C.

Pour les composantes de la branche (m) relative au mouvement, on a :

$$L_m C_m = \frac{m}{k(1-AK)}; \qquad R_m C_m = \frac{r}{k(1-AK)};$$

$$1 + \frac{C_m}{C_m} = \frac{1}{1-AK}. \qquad (24)$$

On en déduit :

$$C_m = C\,\frac{AK}{1-AK}; \qquad R_m = \frac{r}{k}\,\frac{1}{CAK} \quad \text{et}$$

$$L_m = \frac{m}{k}\,\frac{1}{CAK}. \qquad (24')$$

Le facteur $1-AK$ a été rencontré page 709, avec le rapport de conversion d'énergie AK, ici numériquement $AK \simeq 0{,}01$.

Des expressions (24), on déduit :

$$\frac{L_m}{R_m} = \frac{m}{r} \quad \text{et} \quad \frac{C_m}{C} = \frac{AK}{1-AK} \simeq AK. \qquad (25)$$

5) ADMITTANCE EN REGIME SINUSOIDAL.

On poursuit désormais en régime sinusoïdal, la pulsation ω en paramètre.

A) Résonance de la branche motionnelle - Facteur de mérite.

La branche motionnelle (m) est à la résonance pour :

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{L_m C_m}} = \sqrt{\frac{k}{m}(1-AK)} \qquad (26)$$

soit, avec la pulsation de résonance $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ du système mécanique k, m, et la valeur numérique petite de $AK \simeq 10^{-2}$:

$$\omega_m = \omega_0\sqrt{1-AK} \simeq \omega_0\left(1-\frac{AK}{2}\right). \qquad (26')$$

Le facteur de qualité est :

$$Q_m = \frac{L_m \omega_m}{R_m} = \frac{1}{R_m C_m \omega_m} = \frac{m \omega_m}{r}$$

$$\simeq \frac{m \omega_0}{r}\left(1 - \frac{AK}{2}\right) = Q_0\left(1 - \frac{AK}{2}\right) \qquad (27)$$

où $Q_0 = \dfrac{m \omega_0}{r}$ est le facteur de qualité du système mécanique k, m, r.

L'impédance de la branche motionnelle s'écrit alors :

$$R_m \left[1 + j\, Q_m \left(\frac{\omega}{\omega_m} - \frac{\omega_m}{\omega}\right)\right]. \qquad (28)$$

A la résonance ω_m, le rapport en module des admittances, donc des courants, des branches (m) et (r), est le facteur de mérite du quartz :

$$M = \frac{1/R_m}{j\, C \omega_m} = \frac{1}{C R_m \omega_m} = \frac{C_m}{C} \frac{1}{R_m C_m \omega_m}$$

$$= \frac{C_m}{C} Q_m \simeq Q_m AK. \qquad (29)$$

Il est important que ce facteur soit élevé pour que le courant « utile » de la branche motionnelle soit grand devant le courant capacitif de repos (ou courant d'excitation). A la limite même, on pourra simplifier en supprimant la branche (r) lorsque la branche (m) est à la résonance.

VALEURS NUMÉRIQUES.

Dans des conditions absolument exceptionnelles, on a pu mesurer pour le quartz seul, $Q_0 = 50 \cdot 10^6$.

En pratique, compte tenu des pertes parasites, $5 \cdot 10^6$ est excellent. Avec 10^5 comme bonne valeur typique dans les applications soignées, mais courantes, on a $Q_m \simeq 10^5$, donc $M = 10^5 \cdot 10^{-2} = 10^3$.

Avec les dimensions géométriques habituelles, la capacité de repos C est de l'ordre de 10^{-12} F, donc la capacité dynamique $C_m = CAK$, de 10^{-14} F.

Nous verrons que les fréquences d'auto-oscillation sont extrêmement voisines de ω_m, donc très proches de ω_0.

Avec $\omega_0 \simeq 2\pi \cdot 33 \cdot 10^3$, $L_m = \dfrac{1}{\omega_0^2} \dfrac{1}{CAK}$ donne $2{,}3 \cdot 10^3$ H, tandis que pour $\omega_0 \simeq 2\pi \cdot 4{,}2 \cdot 10^6$, on a $L_m = 0{,}14$ H.

Enfin, $R_m = \dfrac{L_m \omega_m}{Q_m}$ est pour ces deux pulsations, $5 \cdot 10^3\ \Omega$ et $40\ \Omega$ respectivement.

B) Diagramme d'admittance.

L'admittance totale du quartz, rapportée à $1/R_m$, est ainsi, en partant des deux branches en parallèle :

$$\frac{\overline{Y}}{1/R_m} = j R_m C\omega + \frac{1}{1 + j Q_m x} \tag{30}$$

avec le désaccord :

$$x = \frac{\omega}{\omega_m} - \frac{\omega_m}{\omega}. \tag{31}$$

Comme Q_m est très grand, le terme $Q_m x$ n'intervient que pour x très petit, donc ω très voisin de ω_m, avec alors l'écart relatif :

$$\frac{\omega - \omega_m}{\omega_m} = \frac{x}{2}.$$

Dans ce domaine qui seul nous intéresse, on a :

$$j R_m C\omega \simeq j R_m C\omega_m = \frac{j}{M}$$

et :

$$\frac{\overline{Y}}{1/R_m} = \frac{j}{M} + \frac{1}{1 + j Q_m x}. \tag{32}$$

Le diagramme de $\dfrac{1}{1 + j Q_m x}$, lorsque x varie, est le cercle de centre 1/2 et 0, et de rayon 1/2 (12).

Le diagramme de l'admittance $\dfrac{\overline{Y}}{1/R_m}$ s'en déduit par la très petite translation j/M vers le haut (fig. 21).

On note la position des points R ($x = 0$), C et C_2 ($x = \pm 1/Q_m$).

(12) Ce cercle se déduit par inversion de la droite verticale $1 + j Q_m x$ d'abscisse 1.

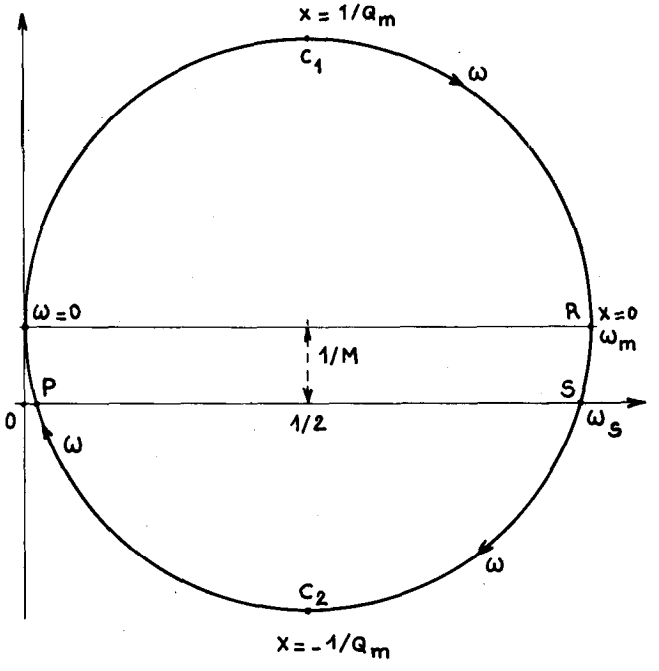


Fig. 21

6) AUTO-OSCILLATIONS.

A) Pulsations d'auto-oscillations.

Aux points S et P du diagramme, pour les pulsations ω_s et ω_p, l'argument de l'admittance est nul.

Si alors le quartz est inséré dans une boucle fermée avec un amplificateur de transmittance réelle, la condition en argument de l'auto-oscillation, qui porte ici sur $\overline{Y}$, est satisfaite (page 689) pour ω_s et ω_p, appelées pulsations de résonance série et parallèle.

Avec :

$$\frac{\overline{Y}}{1/R_m} = j\left[\frac{1}{M} + \frac{1 - j\,Q_m\,x}{j\,(1 + Q_m{}^2\,x^2)}\right] = j\left[\frac{1}{M} - \frac{Q_m\,x + j}{1 + Q_m{}^2\,x^2}\right],$$

ω_s et ω_p sont définies par l'annulation de la partie réelle entre crochets, soit :

$$x^2 - \frac{M}{Q_m}\,x + \frac{1}{Q_m{}^2} = 0.$$

Comme le produit des racines $1/Q_m^2 \simeq 10^{-10}$ est extrêmement petit, tandis que la somme $M/Q_m = \frac{10^3}{10^5} = 10^{-2}$ l'est beaucoup moins, une des racines est extrêmement petite.

Pour celle-ci, en négligeant x^2, on a donc sensiblement :

$$x = \frac{1}{M\,Q_m}$$

soit numériquement $x = 10^{-8}$.

Pour la seconde racine, en négligeant entièrement la première, donc avec le produit nul, l'équation se réduit à $x(x - \frac{M}{Q_m}) = 0$ qui donne :

$$x = \frac{M}{Q_m}$$

soit numériquement $x = 10^{-2}$.

La première solution correspond à ω_s, comme le montre le diagramme, avec donc l'écart :

$$\frac{\omega_s - \omega_m}{\omega_m} = \frac{x_s}{2} = \frac{1}{2\,M\,Q_m} \qquad (33)$$

soit $\frac{x_s}{2} = 5 \cdot 10^{-9}$, ou, en pratique $\omega_s = \omega_m$, d'autant plus rigoureusement que $Q_m \simeq Q_0$ est plus grand.

Pour la seconde, relative à ω_p, on a :

$$\frac{\omega_p - \omega_m}{\omega_m} = \frac{x_p}{2} = \frac{M}{2\,Q_m} \qquad (34)$$

$$\simeq 0{,}005$$

donc ω_p très près de ω_m, qui montre encore que la quasi-totalité du diagramme est parcourue pour une très faible variation de x autour de 0.

B) Caractères série et parallèle des résonances.

Indépendamment de ce qui vient d'être établi, considérons, autour de ω_s, la branche (m) du schéma équivalent 20, d'abord seule, comme cela est possible dans ce cas (page 715).

D'impédance $R_m + j\,(L_m\,\omega - \dfrac{1}{C_m\,\omega})$, elle est à la résonance série avec la valeur minimale R_m pour $\omega_m = 1/\sqrt{L_m\,C_m}$, égal en pratique à ω_s comme on vient de le voir.

Autour de cette résonance, l'impédance est ainsi décrite par

$$R_m\left[1 + j\,Q_m\left(\frac{\omega}{\omega_m} - \frac{\omega_m}{\omega}\right)\right] = R_m\,(1 + j\,Q_m\,x).$$

En particulier, à la résonance, l'argument ϕ de l'impédance est nul et la pente de la courbe $\phi\,(\omega/\omega_m)$ y est $2\,Q_m$, dont la valeur très élevée définit très précisément la valeur de la pulsation en ce point (13).

Considérons maintenant d'autre part la boucle (m) (r). Son impédance :

$$R_m + j\left[L_m\,\omega - \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_m}\right)\right] \qquad (35)$$

est minimale pour :

$$\omega^2 = \frac{1}{L_m}\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_m}\right) = \frac{1}{L_m\,C_m}\left(1 + \frac{C_m}{C}\right) = \omega_m^2\,(1 + AK)$$

qui donne l'écart :

$$\frac{\omega - \omega_m}{\omega_m} \simeq \frac{AK}{2} = \frac{M}{2\,Q_m}$$

soit sensiblement la valeur (34) relative à ω_p.

Avec donc $x_p = M/Q_m$, l'admittance (32) entre A et B est pour ω_p :

---

(13) De $\phi = \text{arc tg}\ Q_m\,x$, on déduit $\dfrac{d\phi}{dx} = \dfrac{Q_m}{1 + Q_m^2\,x^2}$, soit avec $x \simeq \dfrac{2\,(\omega - \omega_m)}{\omega_m}$, $\left[\dfrac{d\phi}{d\,(\omega/\omega_m)}\right]_{x=0} = 2\,Q_m$.

$$Y(\omega_p) = \frac{1}{R_m}\left(\frac{j}{M} + \frac{1}{1 + jM}\right)$$

$$= \frac{1}{R_m}\left(\frac{j}{M} + \frac{1 - jM}{1 + M^2}\right) \simeq \frac{1}{M^2 R_m}. \qquad (36)$$

L'impédance du quartz entre A et B est M^2 fois plus grande que pour la résonance série.

Autour de $x = x_p$, le développement en série de TAYLOR de $Y(x)$, limité au deuxième terme, est, avec (32) :

$$Y(x) = \frac{1}{M^2 R_m} + \left.\frac{dY}{dx}\right|_{x = x_p} (x - x_p)$$

$$= \frac{1}{M^2 R_m} - \frac{j Q_m}{R_m (1 + j Q_m x_p)^2} (x - x_p)$$

$$\simeq \frac{1}{M^2 R_m} [1 + j Q_m (x - x_p)]$$

puisque $Q_m x_p = M \gg 1$.

Comme dans le domaine considéré :

$$x - x_p = 2\left(\frac{\omega - \omega_m}{\omega_m} - \frac{\omega_p - \omega_m}{\omega_m}\right) = 2\frac{\omega - \omega_p}{\omega_m}$$

$$\simeq \frac{(\omega - \omega_p)}{\omega_p} \frac{(\omega + \omega_p)}{\omega} = \frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega},$$

on en déduit :

$$Y(\omega) = \frac{1}{M^2 R_m}\left[1 + j Q_m \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega}\right)\right] \qquad (37)$$

qui met bien en évidence la variation de l'admittance autour de son minimum (36) selon le caractère de la résonance parallèle.

Cette admittance entre A et B est ainsi équivalente aux éléments en parallèle, détaillés avec les relations (29) et (27) pour Q_m/M et Q_m, selon :

$$R_p = M^2 R_m$$

$$C_p = \frac{Q_m}{M^2 R_m \omega_p} = \left(\frac{Q_m}{M}\right)^2 \frac{1}{R_m Q_m m} = \left(\frac{C}{C_m}\right)^2 C_m \qquad (38)$$

et :

$$L_p = \frac{M^2 R_m}{Q_m \omega_p} = \left(\frac{M}{Q_m}\right)^2 \frac{L_m \omega_m}{\omega_p} \simeq \left(\frac{C}{C_m}\right)^2 L_m.$$

Bien que la variation de l'argument ϕ en fonction de ω soit aussi rapide que dans le cas précédent, la résonance parallèle est peu utilisée, surtout parce que le courant d'excitation dans C est sensiblement égal au courant utile dans la branche motionnelle, tandis qu'il est négligeable dans la résonance série.

7) MONTAGE DES AUTO-OSCILLATEURS.

A) Résonance série.

Pour compenser les pertes par amortissement dans le régime auto-oscillant, le quartz peut être disposé en cascade avec un amplificateur.

La chaîne ainsi constituée est fermée avec, pour la transmittance, $W(s = 0 + j\omega) = 1$ (page 689).

Avec l'impédance $R_m(1 + j Q_m x)$ en résonance série du quartz à ω_s, le schéma 22 montre que l'ensemble est en auto-oscillation pour ω_s à condition que la transmittance de l'amplificateur :

$$H = \frac{\text{tension de sortie U}}{\text{courant d'entrée I}}$$

donne $R_m(1 + j Q_m x)/H = 1$ pour $x = 0$, soit $H = R_m$.

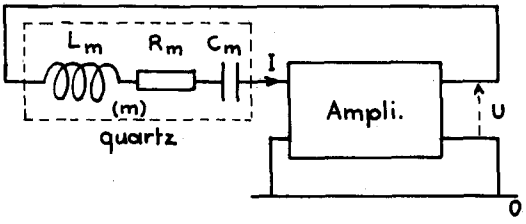


Fig. 22

Ainsi H doit être réel, c'est-à-dire ne pas introduire de déphasage.

Le démarrage des oscillations et la fixation de leur amplitude sont assurés par la présence dans H d'un élément non-linéaire qui décroît avec le courant dont l'amplitude s'établit à une valeur stationnaire pour $H = R_m$.

La détermination précise de la pulsation d'auto-oscillation est alors assurée par la valeur élevée de Q_m (*cf.* page 719).

B) **Cellule en** Π.

L'oscillateur peut aussi être réalisé suivant la fig. 23 d'après le schéma 6, page 692, avec le tripôle actif (T), $jX_1 = 1/j\,C_1\,\omega$, $jX_2 = 1/jC_2\,\omega$ et pour la branche horizontale du (Π), le quartz. Celui-ci est en effet purement réactif dans la mesure où les pertes y sont négligeables devant celles dans G'.

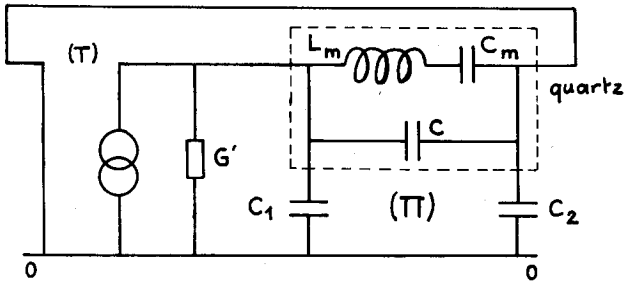


Fig. 23

Le (Π) est alors celui de la fig. 9 (page 695), avec $C_{12} = 0$, pour lequel, à l'auto-oscillation, l'écart relatif (10) vis-à-vis de ω_s est :

$$\frac{\omega - \omega_s}{\omega_s} = \frac{C_m}{2\,[C + C_1\,C_2/(C_1 + C_2)]} \qquad (39)$$

qui dépend ainsi de la « capacité de charge » $C_L = C_1C_2/(C_1 + C_2)$.

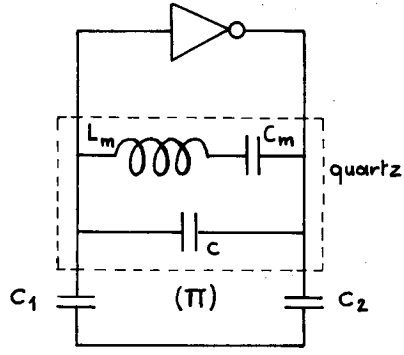


Fig. 24

A titre d'exemple, avec $C_m = 10^{-14}$ F, $C = 10^{-12}$ F, en prenant $C_1 = C_2 = 20 \cdot 10^{-12}$ F, soit $C_L = 10^{-11}$ F, on a :

$$(\omega - \omega_s)/\omega_s = 4{,}5 \cdot 10^{-4},$$

la pulsation d'auto-oscillation étant d'autant plus voisine de ω_s que C_1 et C_2 sont grands devant C, et donc C_m.

Avec cette cellule en (II), le rôle inverseur et aussi amplificateur du (T), est souvent tenu par un « inverseur », comme sur la fig. 24, conformément à la remarque page 733 de l'annexe B.

C) **Ajustement de la fréquence d'auto-oscillation.**

La fréquence d'auto-oscillation, par l'intermédiaire de ω_m et ω_s, est initialement fixée par la fréquence propre mécanique $\omega_s/2\pi$ du quartz, donc par sa longueur Λ.

Comme il est difficile d'atteindre pour Λ la précision de 10^{-6} obtenue sans mal « électriquement », il faut pouvoir, dans des limites modérées cependant, ajuster autrement la fréquence d'auto-oscillation à la valeur exacte souhaitée, en horlogerie par exemple où une puissance entière de 2 est requise pour qu'avec des diviseurs de fréquence par 2, on aboutisse exactement à 1 Hz.

Pour cela, dans le cas de la résonance série de la fig. 22, ajoutons la capacité C_a en cascade avec la seule branche (m) qui intervient (fig. 25).

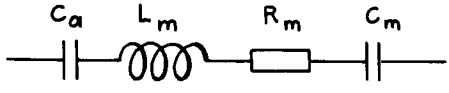


Fig. 25

L'impédance de l'ensemble est alors dans le domaine considéré :

$$-\frac{j}{C_a\,\omega} + R_m\,(1 + j\,Q_m\,x) \simeq -\frac{j}{C_a\,\omega_m} + R_m\,(1 + j\,Q_m\,x).$$

En annulant sa partie imaginaire, on obtient pour la condition d'auto-oscillation :

$$R_m\,Q_m\,x = \frac{1}{C_a\,\omega_m}.$$

L'ajustement relatif donné par C_a est donc :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_m} = \frac{1}{2\,R_m\,Q_m\,\omega_m\,C_a} = \frac{C_m}{2\,C_a}$$

mais possible seulement en accroissement.

Avec $C_m = 10^{-14}$ F, il n'y a aucune peine à faire des ajustements de 10^{-6}.

Dans le cas du (II) des fig. 23 et 24, ajoutons en parallèle sur le quartz la capacité C_{12}.

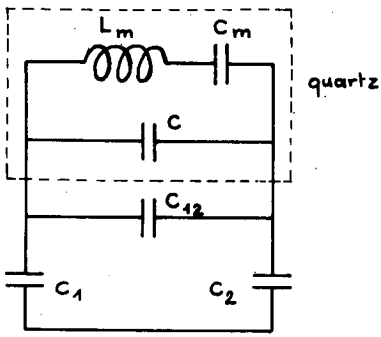


Fig. 26

Avec la nouvelle capacité de charge $C_L = C_{12} + C_1\,C_2/(C_1 + C_2)$, la relation (10) donne, à l'auto-oscillation, le nouvel écart :

$$\frac{\omega - \omega_s}{\omega_s} = \frac{C_m}{2\,[C + C_{12} + C_1\,C_2/(C_1 + C_2)]}$$

à comparer avec (39.)

Avec $C_{12} = 10^{-14}$ F, l'écart précédent est diminué d'environ 10^{-3}, donc la pulsation d'auto-oscillation de $5 \cdot 10^{-7}$ par rapport à ω_s.

8) REALISATION PRATIQUE DES CRISTAUX PIEZO-ELECTRIQUES.

A) Façonnage.

Les gisements de quartz naturel étant quasiment épuisés, pour un matériau devenu de grande importance économique et stratégique, on synthétise depuis environ 30 ans le quartz par cristallisation hydrothermale, à 350 °C et à très haute pression (1 800 bars), à partir d'une solution de silice pure et autour

d'un germe. Les cristaux obtenus en quelques semaines ont de 200 à 500 g.

Pour les épaisseurs notables, par exemple d'au moins 1 mm, la taille s'effectue mécaniquement, la direction des axes fixée avec une très grande exactitude (à 10^{-5} rad près).

Pour les épaisseurs inférieures, on utilise les usinages chimique et ionique, pour arriver à la limite à des lames de quelques microns ménagées au fond d'une cuvette dont la couronne périphérique ne sert que de support, et pour lesquelles la fréquence fondamentale va jusqu'à 1 GHz, et même 3 GHz avec l'ordre 3.

D'un autre côté, aux fréquences plus basses, dans les montres-bracelets par exemple, on utilise des diapasons comme celui de la figure, pour lequel la fréquence est de $2^{15} \simeq 33$ kHz, pour lesquels sont aussi résolues les difficultés de suspension. Les contraintes mécaniques de compression (C) et de dilatation (D), et inversement, au cours de la vibration, se traduisent dans l'effet transversal, avec les axes électrique (X) et mécanique ($\vec{Y}$), par la polarisation correspondante utilisée grâce à la métallisation détaillée sur la fig. 27, entre les bornes B_1 et B_2.

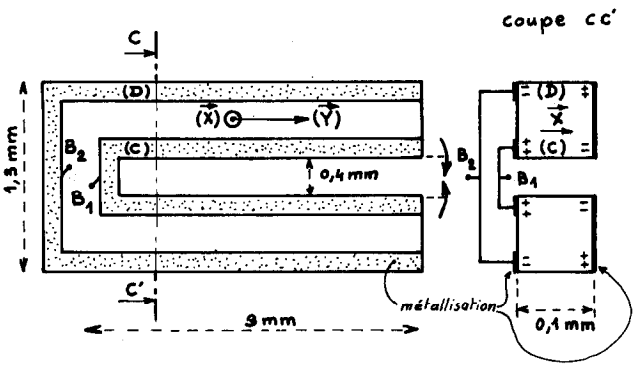


Fig. 27

La métallisation est dans tous les cas réalisée par évaporation et condensation sous vide.

B) **Vibrations parasites.**

Dans tous les cas, à la vibration effectivement utilisée en mode (par exemple élongation, flexion ou cisaillements), et en ordre (fondamental, ordres supérieurs), se superposent d'autres

modes et ordres, auxquels correspondent, dans le schéma équivalent 20, d'autres branches motionnelles en parallèle sur la première (m) et la branche de repos (r).

Comme en général ces vibrations sont indésirables, on les atténue au départ par des retouches en taille des lames (par exemple bordées par des biseaux), et dans leurs effets, par filtrage électrique.

C) **Dérive thermique.**

La fréquence de vibration mécanique du quartz dépend de la température ϑ (°C) d'une manière étroitement liée à la direction des axes cristallins.

Dans la coupe de CURIE, la variation de $\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0}$ est donnée par la caractéristique parabolique de la fig. 28, avec la température d'inversion voisine de l'ambiante.

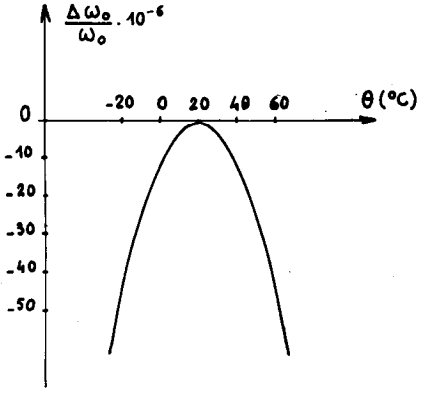


Fig. 28

En taillant la lame non plus suivant les axes du cristal, mais avec une rotation δ d'environ 35° autour du seul axe électrique, en « coupe AT », on obtient une caractéristique cubique, dont la variante (I), avec 35°20', correspond à une amélioration considérable (fig. 29).

Une coupe à « double rotation » [autour de $(\vec{X})$ et de $(\vec{Z})$] peut encore être meilleure.

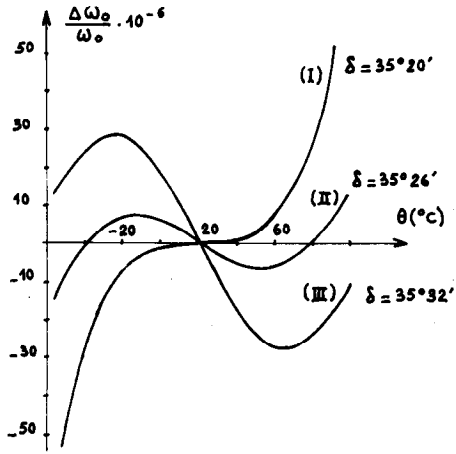


Fig. 29

D) **Stabilité.**

Après vieillissement de quelques mois, en enceinte thermostatique la stabilité en fréquence du quartz excité à faible niveau (1 μW par exemple) atteint, pour les exigences extrêmes des « pilotes en fréquence », 10^{-12} sur une durée de 1 s et 10^{-10} sur un jour.

E) **Autres matériaux.**

Les matériaux piézo-électriques connus à présent sont de plus de 400. Mais seuls avec le quartz, connaissent un usage notable, pour les transducteurs d'énergie surtout, le sel de Seignette, ou de Rochelle (tartrate double de sodium et de potassium), les phosphates mono-ammoniques et -potassiques, et le titanate de baryum ou le niobate de lithium, ces derniers sous forme de céramiques dont l'anisotropie est obtenue par solidification dans un champ électrique.

ANNEXE A

NOTIONS SUR LES AMPLIFICATEURS OPERATIONNELS

1) DEFINITION.

Un amplificateur opérationnel est, idéalement à la limite, un amplificateur de tension de gain infini, réel, c'est-à-dire sans déphasage, d'impédance d'entrée infinie et d'impédance de sortie nulle.

2) MONTAGE HABITUEL. EQUATIONS.

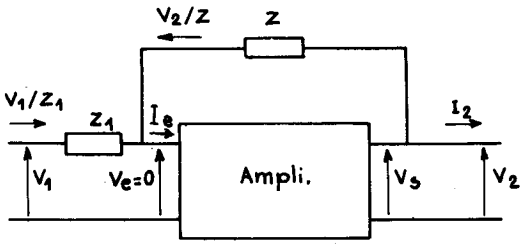


Fig. A. 1.

Le montage de la figure donne, écrites en transformées de LAPLACE, les relations suivantes :

$V_e = 0$: traduit le gain $\dfrac{V_s = V_2}{V_e}$ infini.

$\dfrac{V_1}{Z_1} = -\dfrac{V_2}{Z}$: traduit l'impédance d'entrée infinie, donc le courant d'entrée nul $I_e = 0$.

V_2 : indépendant du courant de sortie I_2 (impédance de sortie nulle).

3) « OPERATIONS ».

Comme essentiellement $V_2 = -\dfrac{Z}{Z_1} V_1$, l'amplificateur effectue sur V l'opération $-Z/Z_1$.

Si $Z = R$, $Z_1 = R$, on a un changeur de signe.

Si $Z = R$, $Z_1 = R$, on a un changeur de signe avec le multiplieur R/R_1.

Si $Z = \frac{1}{j C \omega}$, $Z_1 = R$, on a un intégrateur (changeur de signe).

Si $Z = R$, $Z_1 = \frac{1}{j C \omega}$, on a un dérivateur (changeur de signe).

On pourra imaginer un montage additionneur et un montage soustracteur.

On passe du schéma A. 1 à ceux de la fig. 4 avec une origine commune des tensions d'entrée et de sortie.

4) REALISATIONS.

La propriété essentielle de l'amplificateur est la valeur élevée de gain, typiquement de l'ordre de 200 000 à 10^6.

Mais d'autres caractéristiques interviennent, d'importances inégales selon les utilisations : saturation, bruit, dérive, temps de réponse, tenue à la température,...

Le coût unitaire varie de 3 F à 1 000 F, avec 20 F pour les réalisations usuelles.

ANNEXE B

NOTIONS SUR LE DIVISEUR DE FREQUENCE

Les réalisations de logique électronique revêtent des formes très diverses.

On se bornera à exposer dans ses grandes lignes un usage des transistors MOS pour un diviseur de fréquence par 2, sans entrer dans des détails théoriques ou pratiques.

1) TRANSISTOR MOS (Métal - Oxyde - Semi-conducteur).

Vu de l'extérieur, le transistor MOS, ou le MOST, se compose d'un substrat (B), d'une grille (G), d'une source (S) et d'un drain (D), les rôles de (S) et (D) étant interchangeables ; les potentiels sont pris par rapport à (B) (fig. B. 1)

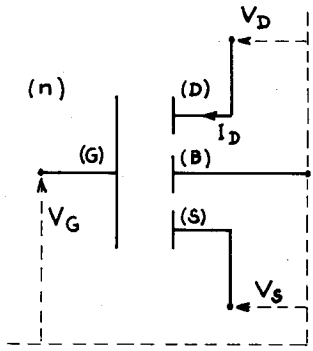


Fig. B. 1.

La grille (G) est disposée sur une très mince couche isolante et son courant est nul quelle que soit la tension V_G. Mais, par l'intermédiaire des « jonctions » BD et BS, V_G agit sur la conductance d'un « canal » entre source et drain dont elle contrôle le courant.

Pour le type à canal (*n*), le fonctionnement est décrit dans le domaine qui nous intéresse par les caractéristiques de la fig. B. 2, I_D en fonction de $V_D - V_S$, avec V_S = cte, et V_G en paramètre, où les valeurs numériques donnent des ordres de grandeurs.

Ainsi, lorsque V_G est inférieur à un seuil V_0, $I_D = 0$, quel que soit $V_D - V_S$, le transistor est bloqué.

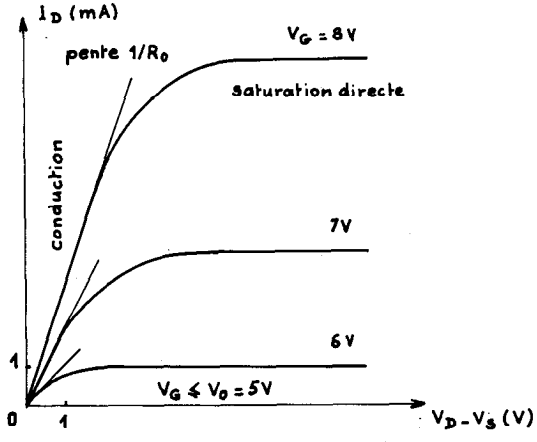


Fig. B. 2.

Pour V_G = cte $> V_0$, le courant est d'abord proportionnel à $V_D - V_S$, avant d'atteindre la « saturation directe » où il n'augmente pratiquement plus.

La conductance $1/R_0$ du régime de « conduction » est proportionnelle à $V_G - V_0$.

Le courant de saturation est proportionnel à $(V_G - V_0)^2$.

La tension de seuil V_0 est fonction linéairement croissante de V_S, par exemple $V_0 = 1{,}4 + 1{,}8\ V_S$, pour l'exemple de la figure où on a pris $V_S = 2$ V.

Pour le MOST à canal (p), le sens des jonctions est inversé, les caractéristiques étant toujours celles de la fig. B. 2, à condition de compter les potentiels et le courant dans le sens opposé.

Le MOST a ainsi deux propriétés essentielles utilisées dans les logiques C MOS.

D'une part, pour $V_D - V_S$ petit, il se comporte comme une résistance R_0 commandée par V_G, avec, en-deçà de la limite $V_G = V_0$, un interrupteur.

D'autre part, pour $V_D - V_S$ grand, à la saturation, il constitue une source de courant commandée par V_G.

2) CIRCUIT LOGIQUE C MOS - EXEMPLE D'UN INVERSEUR.

Dans les circuits C MOS, on utilise systématiquement deux transistors MOS (n) et (p), dits complémentaires (C MOS), aussi

symétriques que possible, pour réaliser une paire d'interrupteurs complémentaires, où l'un étant fermé, l'autre est ouvert, et inversement.

Considérons ainsi les MOS complémentaires (T) et (T') disposés comme sur la fig. B.3. sur la tension positive V^+, les grilles à l'entrée au potentiel V_a et les drains à la sortie en circuit ouvert, au potentiel V_s, avec les sources reliées aux substrats ($V_S = 0$). En pratique, la tension V^+ est grande par rapport à la tension de seuil V_0, par exemple 5 à 10 fois plus.

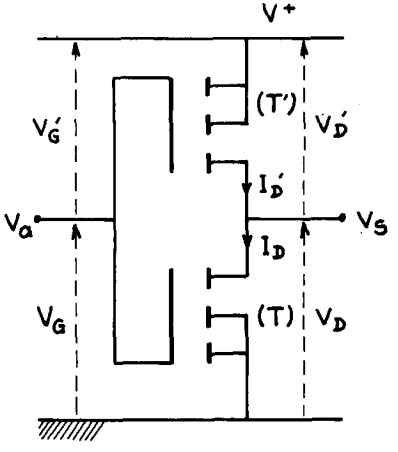


Fig. B.3.

On a donc $V_G + V_{G'} = V^+$, $V_D + V_{D'} = V^+$ et $I_D = I_{D'}$ avec les conventions faites pour utiliser les caractéristiques de la fig. B.2., à la fois pour (T) et (T').

Puisque $V_D = V^+ - V_{D'}$, $I_{D'}$ est donné en fonction de V_D par la fig. B.4. où est représenté aussi I_D, (T) et (T') supposés débloqués tous les deux.

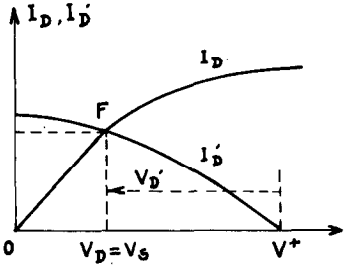
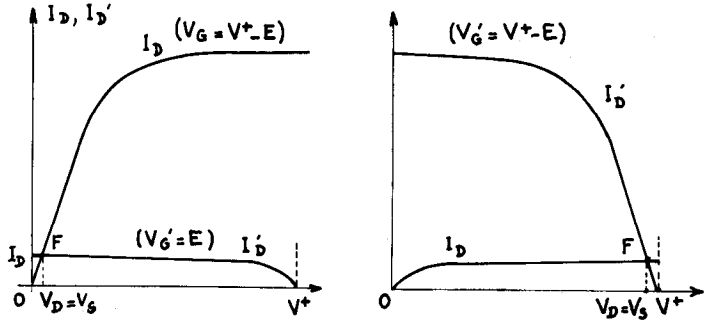


Fig. B.4.

Comme $I_D = I_{D'}$, le point de fonctionnement est défini par l'intersection F qui fournit le courant commun de drain et la tension de sortie $V_s = V_D$.

Si on prend alors pour $V_a = V_G$ une valeur assez voisine de V^+, $V_G = V^+ - E$, le petit écart $E = V_{G'}$ $(= V^+ - V_G)$, cependant suffisant pour que (T') soit à peine débloqué, le courant de fonctionnement est petit, de même que la tension de sortie V_D (fig. B. 5. *a*). Dans ce régime, la saturation de (T') impose la conduction pour (T).

Si au contraire V_a est petit devant V^+, $V_a = E$, mais suffisant pour que (T) soit à peine débloqué, les rôles de (T) et (T') sont inversés (fig. B. 5 *b*).



a) *b*)

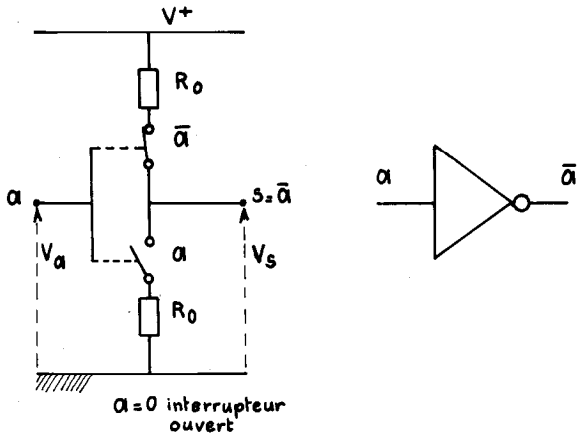
Fig. B. 5.

A la limite, pour $V_a = V^+$, $V_G = 0 < V_0$, (T') est bloqué et le point de fonctionnement est à l'origine. Alors, à ce « niveau haut » de l'entrée, soit en logique positive (la plus usitée), d'entrée logique $a = 1$, correspond $V_s = 0$, « niveau bas » de la sortie, sortie logique $s = 0 = \bar{a}$; (T') joue le rôle d'un interrupteur ouvert.

Pour $V_a = 0$ au contraire, $a = 0$, on a $V_s = V^+$, $s = 1$, donc encore $s = \bar{a}$, avec cette fois (T) pour interrupteur.

On a ainsi réalisé un inverseur logique schématisé sur la fig. B. 6. *a* et où, pour simplifier, on peut souvent supprimer R_0 qui traduit le fonctionnement autour de l'interruption acquise pour la valeur 0 de la variable. Le symbole de l'inverseur est représenté fig. B. 6. *b*.

Entre les deux états qui viennent d'être décrits se trouve la zone de commutation où les caractéristiques de courant I_D et $I_{D'}$ de la fig. B. 4. se déplacent en sens inverse. Le basculement est raide puisque le point d'intersection F se trouve alors



a) *b)*

Fig. B. 6.

sur les portions quasi-horizonales des caractéristiques. En prenant alors V_a de 0 à V+ et en tenant compte du seuil V_0, on obtient, pour la commutation, la caractéristique de transfert $V_s = V_s(V_a)$ de la fig. B. 7.

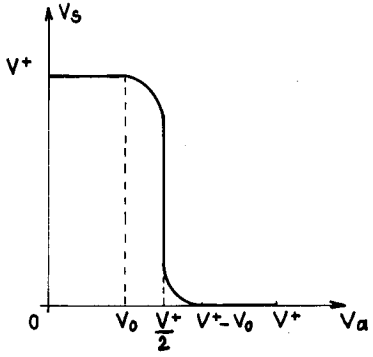


Fig. B. 7.

On voit ainsi qu'autour de $V_a = \frac{V+}{2}$ le système est un amplificateur à gain très élevé.

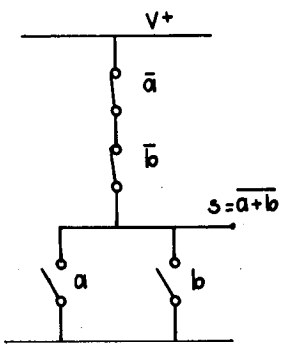
Dans le temps, sous l'effet d'un échelon d'entrée, l'inverseur répond avec un retard de l'ordre de 10^{-8} s, durée de transit

dans les C MOS, ce qui fixe la fréquence maximale de fonctionnement correct à 2 ou 3 MHz.

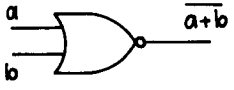
En dehors du basculement, la consommation de courant est nulle, avantage important des C MOS.

3) PORTE LOGIQUE NOR (OU - NON, soit aussi « inhibition »).

En interconnectant en « série » et en « parallèle » deux paires de C MOS, comme le schématise la fig. B. 8. *a*, on obtient la sortie $s = \overline{a} + \overline{b}$, inverse logique de « *a* ou (+) *b* », soit ou-non, ou NOR, dont la fig. B. 9. *b* donne le symbole et rappelle la table de vérité : sortie nulle si l'une ou l'autre des entrées est nulle.



a	b	$\overline{a+b}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



a) *b*)

Fig. B. 8.

On remarque la réalisation sur le schéma de la règle de De Morgan : $\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$.

4) PORTE LOGIQUE ET.

En faisant précéder les entrées de la porte NOR par deux inverseurs qui lui fournissent $\overline{a}$ et $\overline{b}$, on a à la sortie :

$$\overline{\overline{a} + \overline{b}} = \overline{\overline{a}} \cdot \overline{\overline{b}} = a \cdot b, \text{ « } a \text{ et } b \text{ »}.$$

L'ensemble est une porte ET (fig. B. 9).

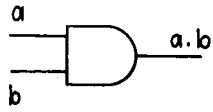


Fig. B. 9.

5) BASCULE BISTABLE R.S.

A) Branchement de deux portes NOR en bascule.

Considérons les deux portes NOR (1) et (2) disposées comme sur la fig. B. 10., soumises aux entrées S et R, avec les retours P et Q, tous de niveaux statiques 0 ou 1.

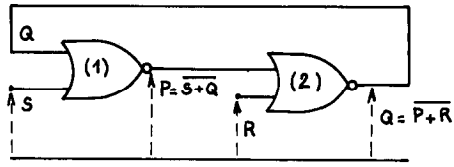


Fig. B. 10.

Les combinaisons statiques en S, R, P, Q de ce système sont rassemblés ci-après, de gauche à droite, comme de droite à gauche sur la fig. B. 10.

Q = 0	et S = 0, donc P = 1,	et	R = 0, donc Q = 0	compatible avec le renvoi sur (1), à la colonne de gauche
		ou	R = 1, donc Q = 0	compatible
	ou S = 1, donc P = 0,		R = 0, donc Q = 1	incompatible
			R = 1, donc Q = 0	compatible
Q = 1	et S = 0, donc P = 0,	et	R = 0, donc Q = 1	compatible
		ou	R = 1, donc Q = 0	incompatible
	ou S = 1, donc P = 0,	et	R = 0, donc Q = 1	compatible
		et	R = 1, donc Q = 0	incompatible

Ce tableau se lit de la manière suivante, par exemple sur sa première ligne (comptée à droite).

On considère à l'entrée de la porte (1) le cas Q = 0, avec lequel on choisit S = 0, ce qui donne à la sortie de (1), $P = \overline{S + Q} = 1$; avec alors R = 0 comme deuxième entrée de (2), on a à la sortie de (2), $Q = \overline{P + R} = 0$, bien compatible avec son renvoi sur (1). Cet état est stable.

Si par contre en suivant la troisième ligne, avec Q = 0, on prend S = 1, soit P = 0, avec toujours R = 0, on obtient Q = 1 à la sortie de (2), incompatible avec le retour sur (1).

Il y a alors, sur (1), basculement de Q depuis 0 à 1, avec le retard temporel relatif au transit du signal dans (1) et (2), l'état final, stable, étant celui de la ligne 7.

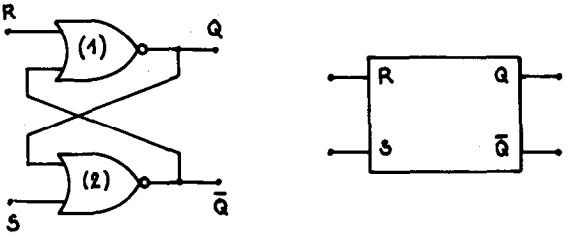
Ainsi, le passage de S = 0 à S = 1, avec R = 0, fait passer Q de 0 à 1.

De la même manière, de Q = 1 avec S = 0, on obtient Q = 0 en faisant R = 1, comme sur la ligne 6, avec passage à la ligne 2.

B) **Bascule R.S.**

En pratique, on exclut le cas S = 1, R = 1, écartant ainsi le basculement de la ligne 8 vers l'état de la ligne 4. On constate qu'alors $P = \overline{Q}$, en régime statique pour les cas restants, ce qui est avantageux en pratique.

On a ainsi la disposition de la fig. 11 *a*, schématisée en 11 *b*.



a) *b*)

Fig. B. 11.

Pour la sortie Q, la table de vérité de la bascule réalisée est représentée par la fig. B. 12 où le symbole Q^+ indique l'état final dans le maintien ou après le basculement.

S	R	Q	Q^+	Evolution de Q à Q^+
0	0	0	0	Maintien à 0
0	0	1	1	Maintien à 1
0	1	0	0	Maintien à 0
0	1	1	0	Basculement de 1 à 0
1	0	0	1	Basculement de 0 à 1
1	0	1	1	Maintien à 1

Fig. B. 12.

Ainsi, l'action sur S maintient Q à 1 ou le fait passer de 0 à 1 (S, comme set, mettre, à 1).

L'action sur R maintient Q à 0 ou le fait passer de 1 à 0 (R, comme reset, remettre, à 0).

La bascule décrite est à deux états stables commandés par les entrées S et R.

C) **Comportement dynamique dans les basculements successifs.**

Le fonctionnement dynamique de la bascule dépend fondamentalement des durées de propagation des signaux dans les portes. Il est schématisé par la fig. B. 13 où, à partir de Q = 0 et R = 0, S passe de 0 à 1, le temps d'un créneau assez bref (ou improprement, d'une impulsion), mais de durée suffisante pour assurer les opérations qui suivent.

L'intervalle de temps t_1 qui s'écoule depuis le passage à 1 de S, jusqu'au basculement de $\overline{Q}$ à 0, correspond au transit du signal dans la porte (2).

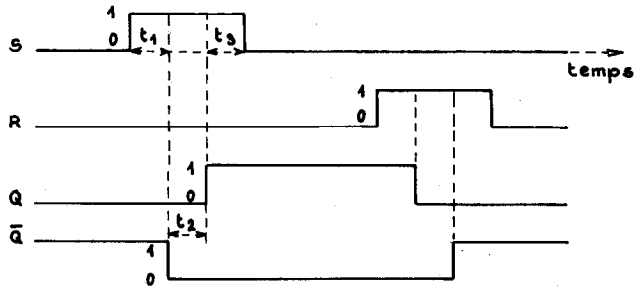


Fig. B. 13.

L'effet du changement de $\overline{Q}$ dans la porte (1) se produit avec le retard t_2 après lequel Q passe à 1.

A partir de l'intervalle t_3, Q maintenant égal à 1 confirme $\overline{Q} = 0$ à la sortie de (2) quel que soit désormais S qui peut disparaître, Q en ayant pris le relais.

Puis l'application du niveau 1 en R procède au basculement inverse, et ainsi de suite pour une nouvelle action en S, puis une en R,...

6) DIVISEUR DE FREQUENCE PAR DEUX.

Considérons la bascule RS de la fig. B. 14, actionnée en retour par Q et $\overline{Q}$, en même temps que par un signal d'horloge H (ou CK comme clock), sous forme d'impulsions qui se succèdent avec la période T.

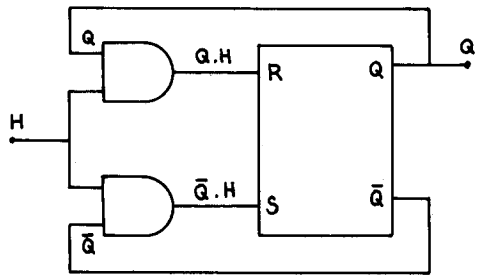


Fig. B. 14.

Avec l'impossibilité d'avoir simultanément $R = QH = 1$ et $S = \overline{Q}H = 1$, la bascule RS fonctionne selon la table B. 12, avec S = 1 qui maintient ou assure Q = 1, et R = 1 qui maintient ou assure Q = 0.

L'ensemble présente, pour l'entrée H et la sortie Q, la table de vérité B. 15, dont les lignes correspondent d'ailleurs aux états successifs commandés par H = 0, puis 1, 0,...

Q	$\overline{Q}$	H	$R = QH$	$S = \overline{Q}H$	Q^+
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0

Fig. B. 15.

Comme le représentent les deux premières lignes du diagramme temporel de la fig. B. 16, les états 0 et 1 se succèdent pour Q avec la période 2 T.

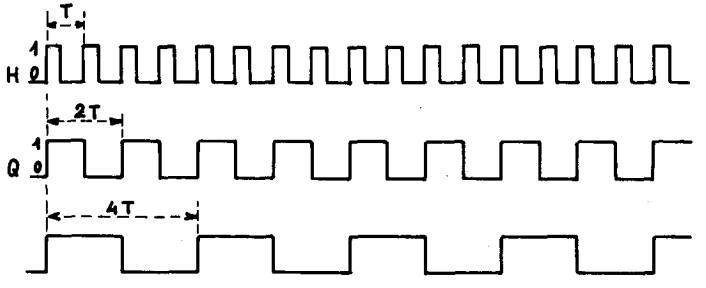


Fig. B. 16.

On a ainsi réalisé un diviseur de fréquence par deux.

Schématiquement, en disposant à sa sortie Q un deuxième diviseur, on obtiendra une deuxième division de fréquence par deux, et ainsi de suite.

C'est une telle chaîne à 15 (ou 21 étages) qui fait suite à un oscillateur à quartz dont la sortie est préalablement « mise en forme » pour fournir en horlogerie un signal à 1 Hz.

ELEMENTS DE BIBLIOGRAPHIE

I. ETUDE GÉNÉRALE DES AUTO-OSCILLATEURS.

1) A. BLAQUIÈRE : *Analyse des systèmes non-linéaires.* P.U.F., Paris, 1966.

2) J.-D. CHATELAIN et R. DESSOULAVY : *Traité d'électricité* t. VIII, Electronique, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1982.

II. PIÉZO-ÉLECTRICITÉ ET OSCILLATEUR A QUARTZ : référence I-2 ci-dessus et :

1) W. G. CADY : *Piezoelectricity,* Dover Publications, New-York, 1962.

2) E. DURAND : *Electrostatique,* t. III, Masson, Paris, 1966.

3) A. ERKENS : *Piézo-électricité,* E. 1890, p. 1 à 20, Electronique, Techniques de l'Ingénieur, Paris.

4) L. EYRAUD : *Diélectriques solides anisotropes,* Gauthier-Villars, Paris, 1967.

5) J. BURFOOT et G. TAYLOR : *Polar dielectrics and their applications,* MacMillan, Londres, 1979.

6) I. BUNGET et M. POPESCU : *Physics of Solid Dielectrics,* Elsevier, Amsterdam, 1984,

et depuis la rédaction de cet article :

7) J. ZELENKA : *Piezoelectric resonators and their applications,* Studies in Electrical and Electronic Engineering, 24, 1986.

III. DIVISEUR DE FRÉQUENCES : toujours référence I.2 et :

1) J.-M. BERNARD et J. HUGON : *Pratique des circuits logiques,* Eyrolles, Paris, 1985.

2) *National Semi-Conductor,* Databook MOS/LSI, Santa Clara, 1977.

3) C. VERBEEK : *Les composants actifs en commutation,* Dunod, Paris, 1980.

Nota :

L'appel aux constructeurs pour la fourniture de documents techniques a été très décevant. Beaucoup d'entre eux n'ont pas jugé convenable de répondre.

Les notices fournies par les autres ne concernent en général que les fréquences et les dimensions des boîtiers, sans indication sur leurs contenus et moins encore sur le fonctionnement.

Aucune réponse n'a été obtenue pour les prix.

Compte tenu des prix des montres, on peut admettre que les quartz y interviennent en général pour moins de 50 F.