

Théorie élémentaire des lentilles

par Jean-Paul MANEVAL
et Albert MARIE DE FICQUELMONT,
E.N.S., Université Paris VII.

La pratique de l'échographie ultrasonore, en particulier en imagerie bio-médicale [1], a rendu plus familiers les principes de la physique ondulatoire. Pour les acousticiens, les transducteurs piézoélectriques qui équipent la sonde échographique agissent comme les « sources secondaires » du principe de Huygens-Fresnel. Ce point de vue est extrêmement fécond dans la conception des barrettes à focalisation ou à balayage sectoriel, des lentilles annulaires,... [2].

Lorsqu'il est initié à l'optique par la méthode géométrique [3-6], l'étudiant risque de retenir du stigmatisme une définition — « condition pour que des rayons isogènes convergent en un point unique » [6] — qui ne fait pas mention du nécessaire accord de phase entre les rayons. Celui-ci n'est explicité d'emblée que dans des ouvrages relativement plus difficiles [7-9].

Au niveau du premier cycle universitaire, il nous paraît profitable d'introduire une théorie ondulatoire simplifiée des lentilles, reposant sur le principe de superposition et le théorème d'interférence, somme toute plus naturels que la loi des sinus de réfraction, et qui puisse s'adapter également à l'optique ultrasonore ou corpusculaire. En effet, une fraction des étudiants, notamment en D.E.U.G. S.N.V., se trouvera confrontée à des instruments d'observation (microscope électronique, etc.), souvent sans autre préparation générale en physique. D'où la nécessité d'un exposé élémentaire et ouvert sur les applications. Cet article est la version très succincte d'un tel programme [10].

A. OPTIQUE ULTRASONORE.

A.1. La barrette de transducteurs piézoélectriques (fig. 1 a).

Le transducteur est un dispositif qui, comme le quartz des montres modernes, convertit un signal électrique en vibrations ultrasonores, et réciproquement. L'émetteur-récepteur le plus répandu en échographie médicale est formé d'une rangée de ces éléments (jusqu'à 64), régulièrement espacés, qui transmettent leur mouvement à la peau du sujet par l'intermédiaire d'un gel

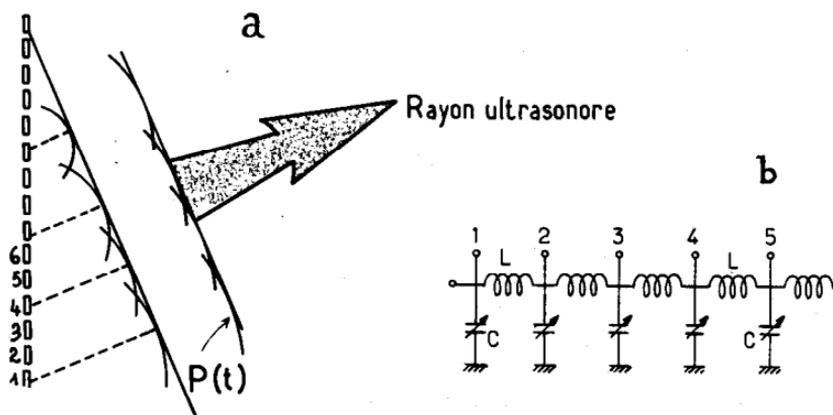


Fig. 1. — a) Les transducteurs ultrasonores équidistants numérotés 1, 2, 3, 4,... vibrent sinusoïdalement avec un déphasage constant de l'un à l'autre. Ils émettent des ondes quasi-circulaires dont une enveloppe à l'instant t est la droite $P(t)$, perpendiculaire au rayon ultrasonore.

Fig. 1. — b) Ligne périodique de selfs (L) et de condensateurs-vari-caps (C) produisant des retards en progression arithmétique de raison \sqrt{LC} ; C a une capacité variable avec la tension continue U_0 .

approprié. Ils sont animés par un générateur électrique commun, mais avec une phase contrôlable individuellement pour chacun d'eux.

Un système déphaseur possible est constitué par la ligne périodique de selfs (L) et de condensateurs (C) de la fig. 1 b. On peut montrer qu'un signal injecté à l'entrée est retardé d'une cellule à l'autre d'un temps \sqrt{LC} . Supposons un signal périodique $u_1 \sin \omega t$. Si les tensions qui apparaissent aux points 1, 2, 3, 4, 5,... sont appliquées aux transducteurs correspondants, ceux-ci émettent des ondelettes ultrasonores décalées en temps, formant dans le plan de la figure un réseau de cercles homothétiques, et dont la droite-enveloppe apparaît oblique par rapport à la barrette. Selon le théorème de Malus, la direction perpendiculaire est celle du « rayon » ultrasonore.

L'orientation du rayon est modulable à volonté si l'on substitue aux condensateurs des diodes-varicaps dont la capacité est une fonction de la tension appliquée. En superposant alors au signal sinusoïdal une tension continue U_0 , avec $U_0 \gg u$, on détermine un retard $\sqrt{L \cdot C(U_0)}$, et donc une orientation, continûment ajustables.

La barrette à déphasage linéairement croissant avec la position du transducteur produit donc un « balayage sectoriel ». En exploration médicale, ce dispositif permet de réaliser des coupes planes, ou tomographies, sans avoir à déplacer la barrette-sonde le long de l'organe à observer. L'analyse en profondeur est dérivée de la technique radar : on émet un train d'ondes relativement bref et l'on repère les différents objets réfléchissants par les temps d'arrivée des échos. Le générateur de sinusôides fonctionne couramment entre 1 et 5 mégahertz, ce qui correspond à des longueurs d'onde (λ) comprises entre 1,5 et 3 mm dans les tissus mous. Les limites sont déterminées d'un côté par la résolution souhaitée de l'image (≈ 1 mm), de l'autre par l'absorptivité des milieux traversés, qui est généralement fonction croissante de la fréquence.

A.2. La lentille acoustique : focalisation.

Le simple balayage sectoriel n'a qu'une résolution latérale médiocre puisqu'il n'y a pas focalisation du faisceau acoustique. Cherchons maintenant quelle condition il faut imposer aux transducteurs pour que leurs vibrations parviennent en phase en un point F sur l'axe, situé à la distance f du centre O de la barrette (fig. 2). Continuons d'étudier le problème dans le plan et, pour être spécifiques, prenons le cas d'un émetteur convergent.

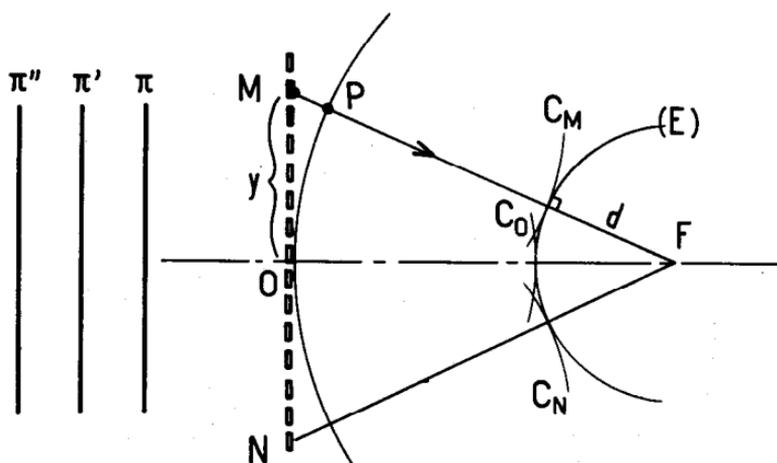


Fig. 2. — Barrette focalisante : Ici, le déphasage appliqué à l'élément M d'ordonnée y est proportionnel à y^2 (cf. équation 4). Les ondes circulaires C_O, C_M, C_N, \dots émises à un même instant des transducteurs O, M, N... ont pour enveloppe un cercle de centre F. Les droites π, π', π'', \dots figurent l'arrivée d'une onde plane sur la barrette, qui agit alors comme une lentille de foyer F.

Par rapport à l'onde ultrasonore issue de O, celle qui vient du point M, d'ordonnée y , doit parcourir le trajet supplémentaire MP, P étant l'intersection du cercle de centre F passant par O.

$$\begin{aligned} MP &= MF - OF = \sqrt{f^2 + y^2} - f \\ &\simeq \frac{y^2}{2f} \quad \text{pour } y \ll f \end{aligned} \quad (1)$$

L'approximation $y \ll f$ n'est autre que la condition de Gauss des rayons paraxiaux (faiblement inclinés sur l'axe). L'inégalité des trajets peut être compensée si l'on dote le mouvement des transducteurs du décalage convenable. Ainsi, la célérité des ondes étant c , on placera en M(y) une avance relative (en temps) égale à :

$$\Delta t(y) = \frac{1}{c} \cdot \frac{y^2}{2f}. \quad (2)$$

Selon que l'excitation est monochromatique ou impulsionnelle, que le milieu-image est dispersif ou non, il est préférable d'exprimer cette avance en termes de longueur comme en (1), de temps comme en (2), ou d'un nombre d'oscillations $\Delta N(y)$:

$$\Delta N(y) = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{y^2}{2f} \quad (3)$$

ou enfin d'une avance de phase $\Delta\varphi(y)$ telle que :

$$\Delta\varphi(y) = 2\pi \Delta N(y) = \frac{\pi y^2}{\lambda f}. \quad (4)$$

Nous avons implicitement considéré les transducteurs comme sources d'ondes quasi-circulaires (ce qui est le cas si leur extension est petite devant λ). D'après le choix de $\Delta N(y)$, les ondelettes C_O, C_M, C_N, \dots centrées sur les points O, M, N, ..., ont pour enveloppe, à un instant donné, un cercle centré sur F. Ce cercle, noté (E) sur la fig. 2, est la trace, dans le plan, d'une surface d'onde au sens de Huygens et l'on voit que, lorsque tous les transducteurs agissent simultanément, la barrette engendre par superposition une onde circulaire convergeant en F.

Au retour, si F est un objet ponctuel diffusant, l'onde circulaire divergente qu'il réémet parcourt des trajets inégaux jusqu'aux différents transducteurs, mais ces différences sont, comme à l'aller, effacées par les mêmes avances $\Delta N(y)$, ou $\Delta t(y)$ selon le cas, si bien que les oscillations piézoélectriques correspondantes interfèrent constructivement, définissant doublement F comme le point d'observation.

Enfin, l'examen de la formule (4) montre que la focale f est ajustable soit par le choix des déphasages, soit par celui de la longueur d'onde. Contrairement au cas de l'optique lumineuse, le contrôle de ces paramètres peut se faire de façon purement électronique dans le domaine des fréquences ultrasonores usuelles.

A.3. Observation par balayage. Résolution.

Peut-on faire interférer constructivement les ondes ultrasonores en F' , situé à l'ordonnée Y dans le plan focal de F ? Nous évaluons maintenant la différence de longueur entre MF' et OF' (fig. 3) en nous restreignant au plan de la figure, défini par l'axe Ox et la barrette de transducteurs :

$$MF' - OF' = \sqrt{f^2 + (y - Y)^2} - \sqrt{f^2 + Y^2}.$$

A l'approximation de Gauss ($y \ll f$; $Y \ll f$), il vient aisément :

$$MF' - OF' = -\frac{Y}{f}y + \frac{y^2}{2f}. \quad (5)$$

Le résultat souhaité — la compensation des différences de parcours (5) — est obtenu par superposition d'un déphasage linéaire en y , comme au paragraphe 1, et d'un déphasage quadratique, comme au paragraphe 2. Le premier oriente le faisceau selon la direction Ox' ; le second focalise en F' . Là encore, l'opération ne demande aucun déplacement mécanique.

Si l'on veut faire décrire au point F' non plus un segment de droite, mais une portion du plan focal (F), on dispose une seconde barrette de transducteurs perpendiculaire à la première et pilotée en phase de façon analogue. Les deux effets de déviation s'additionnent vectoriellement.

Pour la présentation des échos sur un écran vidéo, on asservit les déflexions horizontale et verticale sur les tensions U_0 (cf. paragraphe 1 et fig. 1 b) de commande de déphasage linéaire des deux barrettes.

L'examen de la formule (5) permet aussi de résoudre sommairement la question du pouvoir séparateur (résolution) :

Supposons les N transducteurs placés aux ordonnées y_1, y_2, \dots, y_N et pilotés en phase de façon à éliminer les différences de trajet $y^2/2f$. La focalisation a donc lieu en F . Au contraire, à l'ordonnée Y_0 dans le plan focal se superposent des vibrations parties apparemment en phase, mais qui ont parcouru des trajets différant des quantités :

$$\frac{Y_0}{f} y_1, \frac{Y_0}{f} y_2, \dots, \frac{Y_0}{f} y_N.$$

Si ces longueurs forment une suite régulière et s'étendent sur exactement une longueur d'onde, l'amplitude résultante sera nulle. Ceci se produit lorsque :

$$\frac{Y_0}{f} y_N - \frac{Y_0}{f} y_1 = \pm \lambda \quad Y_0 = \pm \frac{\lambda f}{y_N - y_1}. \quad (6)$$

Au foyer apparaît donc une tache de hauteur $2|Y_0| = \lambda f/A$, où $A = |y_N - y_1|$ est l'extension de la barrette. On retrouve le résultat général en optique (*), que la résolution ultime $|Y_0|$ est déterminée par la longueur d'onde et l'angle d'ouverture A/f .

A.4. La lentille acoustique.

C'est ainsi que l'on appelle communément le dispositif que nous venons de décrire, alors que le nom d'antenne serait plus approprié. Pour s'approcher de la définition usuelle d'une lentille (milieu transparent), il faut admettre que les transducteurs soient remplacés par de simples répéteurs qui reproduisent, avec un déphasage en y^2 , la vibration qui leur parvient d'un côté. Si c'est une onde plane qui arrive du côté gauche parallèlement à l'axe (schématisée par les plans d'onde π, π', π'', \dots sur la fig. 2), les ondelettes transmises vers le côté droit arriveront en phase au point F défini par l'équation 4. Si l'onde plane est inclinée par rapport à l'axe, elle met en mouvement les différents transducteurs avec un déphasage fonction linéaire de y , ce qui incline le faisceau émergent d'un angle égal à l'angle d'incidence et produit la focalisation en un point tel que F' de la fig. 3.

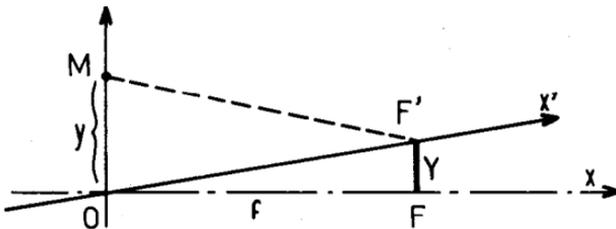


Fig. 3. — Evaluation de la différence $MF' - OF'$: par combinaison d'un déphasage linéaire et d'un déphasage quadratique en y , on fait interférer les ondes constructivement en F'.

(*) C'est la limite de diffraction déterminée conventionnellement pour un contraste à 3 dB : une meilleure résolution est possible en ultrasons.

On peut donc finalement donner la définition d'une lentille sous la forme d'un principe de construction :

« Une lentille convergente (respectivement divergente) est un dispositif qui, à la distance y de l'axe, avance (resp. retarde) la phase relative d'une quantité proportionnelle à y^2 . Pour obtenir une focale f , on déphasera de $\pi y^2/\lambda f$, λ étant la longueur d'onde dans le milieu-image. »

La définition s'applique à un émetteur comme à une lentille ou un miroir, les conditions de validité et la précision étant celles de l'optique de Gauss. Restant au stade des principes, il n'y a pas lieu de distinguer entre les diverses natures d'onde (ultrasonore, lumineuse, etc.).

B. LE STIGMATISME.

B.1. Image d'un point A sur l'axe (fig. 4).

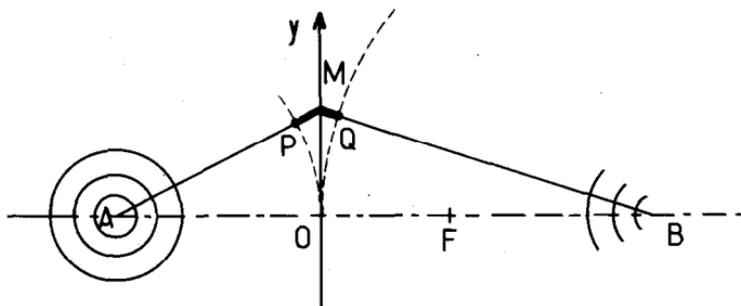


Fig. 4. — Formule de conjugaison : pour que l'onde divergente issue de A converge en B, il faut que l'avance de phase en M (y) compense le supplément de longueur $PM + MQ$ des trajets obliques.

Considérons une lentille convergente et, pour simplifier, limitons-nous au cas d'objets et d'images réels. Le point A est source d'une onde sphérique divergente et nous cherchons la condition pour que soit reconstruite une onde sphérique centrée sur B (posons $OA = a$; $OB = b$). Les ondulations suivent des trajets tels que AM, puis MB. Comparons le trajet $AM + MB$ au trajet de référence $AO + OB$. Conformément à l'équation 1, nous évaluons :

$$PM = AM - AO \simeq y^2/2a$$

$$MQ = MB - OB \simeq y^2/2b.$$

La différence de trajet géométrique est la somme :

$$PM + MQ = (AM + MB) - (AO + OB) \simeq \frac{y^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad (7)$$

avec la même approximation que précédemment, c'est-à-dire à l'ordre 2 en (y/a) et en (y/b) . Or la lentille est conçue de façon à compenser une différence $y^2/2f$ (cf. équation 1) à l'ordonnée y . La compensation se produit donc pour :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}. \quad (8)$$

Cette équation est la formule de conjugaison des lentilles simples à milieux extrêmes identiques : on sait qu'elle reste valable en mesures algébriques (objets ou images virtuels ; lentille convergente ou divergente). En optique géométrique, elle justifie la construction de l'image B de A* par la méthode des rayons particuliers passant soit par les foyers, soit par le centre de la lentille [5].

B.2. Image d'un point hors d'axe (fig. 5).

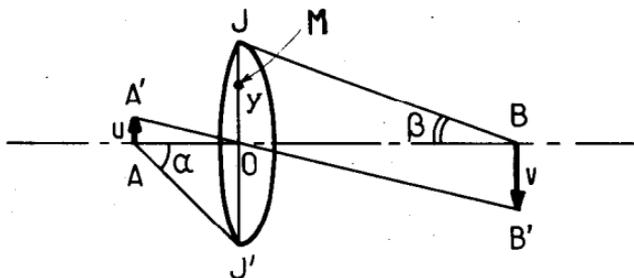


Fig. 5. — *Grandissement* : l'objet transversal $\vec{AA'}$ a pour image $\vec{BB'}$. Les points A' et B' sont alignés avec le centre O. α et β sont les demi-angles sous lesquels on voit la lentille de A et B respectivement.

Lorsque la source est déplacée de A jusqu'en A', d'ordonnée u , l'accord de phase précédemment réalisé entre les trajets obliques et le trajet central est modifié. Observons comment varie la différence $AM - AO$ à gauche :

$$\delta (AM - AO) = \delta (AM) - \delta (AO) = (A'M - AM) - (A'O - AO)$$

le symbole δ étant synonyme d'accroissement (à M fixé).

$$A'M - AM = \sqrt{a^2 + (y - u)^2} - \sqrt{a^2 + y^2} \simeq \frac{u^2}{2a} - \frac{uy}{a}$$

$$A'O - AO = \sqrt{a^2 + u^2} - a \simeq \frac{u^2}{2a}$$

$$\delta (AM - AO) \simeq -\frac{y}{a} u \quad (9a)$$

au second ordre en (u/a) et en (y/a) . Avec la même précision, nous aurions trouvé qu'en déplaçant B jusqu'en B', d'ordonnée v :

$$\delta (MB - OB) \simeq -\frac{y}{b} v. \quad (9b)$$

L'image B' de A' est le point pour lequel la somme des variations (9a) et (9b) est nulle, indépendamment de y . Ce point existe; il est défini par :

$$\frac{BB'}{AA'} = \frac{v}{u} = -\frac{b}{a}. \quad (10)$$

On exprime habituellement cette relation en disant que les rayons passant par le centre de la lentille simple ne sont pas déviés, ce qui, ajouté à l'équation 8, achève de justifier la construction des images par la méthode des rayons.

On constate que la compensation de (9a) par (9b) se fait *au second ordre* sans déplacement de B dans le sens longitudinal. Ceci permet de préciser que, si le plan transversal de A est une surface d'onde, le plan de B est aussi une surface d'onde, dont la courbure n'apparaît que lorsqu'on pousse les développements limités à un ordre supérieur à 2. Un autre problème que nous avons implicitement écarté est celui des trajets non-méridiens (non situés dans un plan contenant l'axe). On peut montrer [7] qu'à l'approximation gaussienne, les contributions de ces trajets se compensent pour préserver les égalités (8) et (10).

B.3. Grandissement et ouverture de faisceau.

La formule du grandissement (équation 10) s'exprime aussi en fonction de l'ouverture des faisceaux coniques de sommets A et B sous lesquels est vue la lentille. Soit D le diamètre de la lentille; soient α et β les angles d'ouverture côté source et côté image respectivement (fig. 5). Evaluons le rapport des angles α et β en approximation de Gauss ($\alpha \simeq \operatorname{tg} \alpha$; $\beta \simeq \operatorname{tg} \beta$) :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha/2}{\beta/2} \simeq \frac{\operatorname{tg}(\alpha/2)}{\operatorname{tg}(\beta/2)} = \frac{D/2 a}{D/2 b} = \frac{b}{a}. \quad (11)$$

Ce rapport est égal, compte non tenu du signe, au grandissement donné par l'équation 10. En combinant (10) et (11), on obtient la formule de Lagrange-Helmholtz (en valeurs absolues) :

$$\alpha \cdot AA' = \beta \cdot BB' \quad (12)$$

qui peut s'énoncer : « la traversée d'une lentille ne modifie pas le produit de la grandeur linéaire de l'objet par l'angle d'ouverture de la lentille vue de cet objet ». La relation entre surface de l'objet et angle solide d'ouverture qui dérive de (12) par élévation au carré est l' « Invariant de Lagrange » utilisé en photométrie.

S'il ne s'agit que de parvenir à la conjugaison (équation 8) et à la dimension (équation 10) des images, la méthode de l'optique ondulatoire adoptée ici ne diffère pas dans ses résultats de la méthode « géométrique ». Par contre, le point de vue ondulatoire est nécessaire pour donner du stigmatisme une définition correcte.

B.4. Stigmatisme : stationnarité du chemin optique ou du nombre d'ondulations.

En optique lumineuse, le contrôle des phases est passif. C'est la moindre vitesse de phase dans le verre ($v_\phi = c/n$, où n est l'indice) qui réduit l'avance du trajet axial par rapport aux trajets obliques. Nous référant à la fig. 4 et à l'équation 7, nous comptons en longueurs d'onde cette fois la différence de parcours $AMB - AOB = PM + MQ$:

$$\frac{PM + MQ}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{y^2}{2a} + \frac{y^2}{2b} \right) = \frac{y^2}{2\lambda f} \text{ (ondulations)}. \quad (13)$$

Ici, λ est la longueur d'onde dans l'air. Pour démontrer le rôle du verre dans la compression des ondes, prenons l'exemple instructif, quoiqu'un peu académique, de la lentille plane à indice inhomogène (fig. 6). Soit X l'épaisseur et $n(y)$ la valeur de l'indice à l'ordonnée y . Sur l'axe il y a place pour $n_0 X/\lambda$ oscillations, contre $n(y) X/\lambda$ à l'ordonnée y [nous avons posé $n_0 = n(0)$]. Par comparaison avec l'équation 13, on voit que la compensation des trajets est réalisée lorsque :

$$n_0 \frac{X}{\lambda} - n(y) \frac{X}{\lambda} = \frac{y^2}{2\lambda f}$$

d'où l'on déduit pour l'indice la condition $n(y) = n_0 - y^2/2fX$. De telles lentilles ne sont pas communes, mais le cristallin de l'œil, stratifié en pelure d'oignon, s'y apparente puisque son indice passe de 1,406 au centre à 1,386 à la périphérie [3,9]. C'est une inhomogénéité non négligeable comparée au saut d'indice $\approx 0,06$ entre le cristallin et les humeurs qui le baignent.

Le stigmatisme est une condition de phase stationnaire. La fig. 6 en suggère l'énoncé suivant : « Sur tous les trajets opti-

quement possibles qui joignent un point à son image, il y a le même nombre d'ondulations (modulo un entier)».

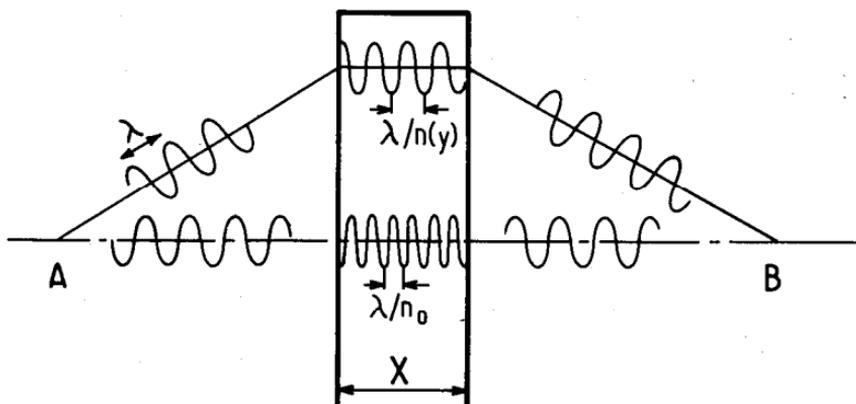


Fig. 6. — Lentille plane à indice inhomogène : le verre comprime les longueurs d'onde proportionnellement à l'indice. Sur tous les trajets, obliques ou direct, il y a le même nombre de longueurs d'onde pour aller de A en B.

Comparé au même énoncé en termes de chemin optique (cf. Appendice), celui-ci fait ressortir l'échelle de précision, de l'ordre de $\alpha^{-1} \lambda$ (cf. fig. 5), qui doit être respectée dans la confection d'un système optique. De plus, les ondulations peuvent être matérialisées, au moins dans certains cas : par la photographie pour les ondes de surface sur un liquide, ou par une technique d'ondes stationnaires, comme celle d'Otto Wiener [9] pour la lumière.

B.5. Application du principe. Formule des lunettes.

La lentille de verre est habituellement étudiée comme l'assemblage de deux dioptries auxquels successivement s'applique la loi de réfraction des rayons.

Ici, nous considérons la lentille bi-convexe (fig. 7) comme un objet diffractant unique, dont la plus grande épaisseur au centre est destinée à compenser l'excès de longueur des trajets obliques. En effet, une épaisseur X de verre d'indice n a une épaisseur optique nX , d'où par rapport au même trajet dans l'air une augmentation de $(n-1)X$ du chemin optique.

Dans le cas présent, l'épaisseur à l'ordonnée y est la distance MN entre deux cercles de rayons R_1 et R_2 centrés sur l'axe. Au paragraphe 2 (équation 1 et équation 2), nous avons évalué la distance radiale $PM = y^2/2f$ entre un cercle de rayon f

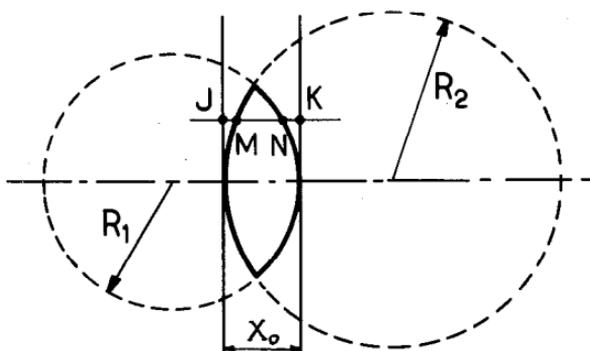


Fig. 7. — *Formule des lunetiers* : la lentille biconvexe est délimitée par les sphères de rayons R_1 et R_2 . La distance entre un point M d'ordonnée y et la tangente au sommet est $MJ \simeq y^2/2 R_1$. De même $NK \simeq y^2/2 R_2$.

et sa tangente au sommet O ; nous notons qu'au même ordre d'approximation (en y^2), la distance horizontale est la même.

Soient donc J et K les projections respectivement des points M et N sur les tangentes aux sommets correspondantes, séparées elles-mêmes d'une distance X_0 . Nous avons la relation algébrique :

$$X(y) = MN = |\overline{MJ} + \overline{JK} + \overline{KN}|$$

et en introduisant les longueurs des segments $MJ = y^2/2 R_1$, et $KN = y^2/2 R_2$, il vient :

$$X(y) = -\frac{y^2}{2 R_1} + X_0 - \frac{y^2}{2 R_2}. \quad (14)$$

La convexité de la lentille entraîne donc, par rapport au trajet axial (X_0 dans le verre), un gain en chemin optique égal à :

$$(n-1) [X_0 - X(y)] = (n-1) \frac{y^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (15)$$

qui compense le supplément des trajets obliques $(y^2/2 a) + (y^2/2 b)$ (cf. équations 7 et 8) à condition que :

$$(n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}. \quad (16)$$

Cette « formule des lunetiers », valable pour les lentilles minces, permet de déterminer les courbures des faces en vue de produire une focale f .

C. OPTIQUE ELECTRONIQUE.

C.1. La lentille électrostatique.

On fonde l'optique électronique sur la relation de L. de Broglie entre impulsion et longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad (17)$$

où m est la masse de l'électron et h la constante de Planck ($h \approx 6,63 \times 10^{-34}$ J. sec). La longueur d'onde électronique est inversement proportionnelle à la vitesse v et donc une lentille convergente, conçue selon la règle de la « compression des longueurs d'onde sur l'axe » (cf. paragraphe B.4.), est un dispositif qui accélère les électrons préférentiellement sur l'axe.

La « bouteille électrostatique » schématisée sur la fig. 8 produit un tel effet. L'électrode annulaire centrale zz' est portée à un potentiel négatif par rapport aux électrodes cylindriques

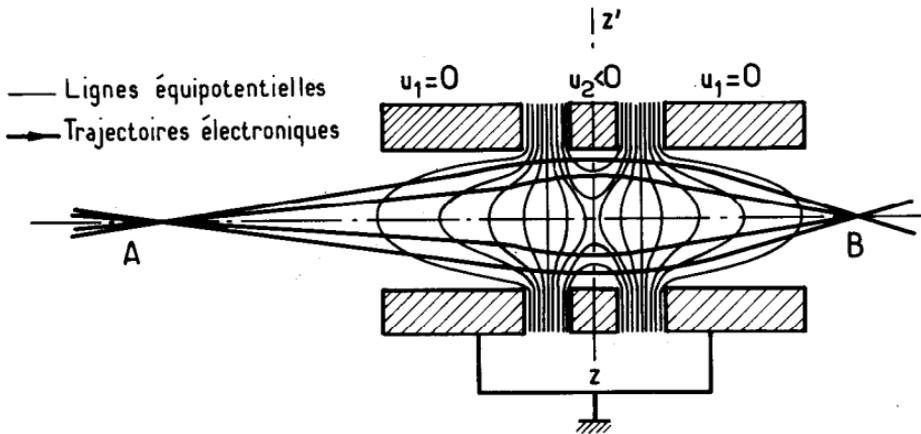


Fig. 8. — La lentille électrostatique « unipotentielle » (coupe schématique) : Arrangement de 3 cylindres coaxiaux dont les deux extrêmes sont portés au même potentiel. Les lignes de force (non figurées) sont orthogonales aux équipotentielles, ou lignes d'égal indice (cf. équation 19). Les électrons issus de A sont déviés vers B.

latérales. Les lignes équipotentielles autour de zz' sont ainsi distribuées que les rayons hors d'axes perçoivent un potentiel décélérateur (négatif), générateur de grandes longueurs d'onde, sur une plus grande fraction du trajet que le rayon axial. Ceci a pour effet de faire converger en B les rayons électroniques issus de A. (C'est l'occasion de préciser que la présence

d'un électron sur l'un ou l'autre de ces rayons, ou trajectoires possibles, est une notion statistique puisque *a priori*, à l'émission, aucune direction n'est privilégiée).

Pour trouver la longueur d'onde électronique au point de coordonnées x, y, z , on note d'abord que l'énergie totale $eU(x, y, z) + (mv^2/2)$, où e est la charge (négative) de l'électron et U le potentiel électrostatique, est un invariant dans le vide qui règne entre A et B. Si v_A et U_A sont les valeurs de v et de U à la source A, nous obtenons pour la vitesse :

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_A^2 + |e|(U - U_A) \quad (18)$$

et pour la longueur d'onde locale :

$$\frac{\lambda(x, y, z)}{\lambda_A} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2|e|(U - U_A)/m v_A^2}}. \quad (19)$$

Cette dernière relation permet de définir un indice relatif en fonction du potentiel $U(x, y, z)$. La lentille électrostatique avec ses équipotentielles positives prédominantes dans la direction de l'axe est donc l'analogue de la lentille photonique biconvexe : mêmes propriétés de convergence et de grossissement. Les longueurs d'onde électroniques permettraient en théorie d'atteindre une résolution linéaire de l'ordre de l'angström ou mieux. Malheureusement, l'imperfection des lignes de champ et de la pointe émissive forcent à réduire l'ouverture angulaire du faisceau, et la résolution est limitée à environ 10 Å dans les meilleurs cas [11].

Sur cet exemple, on peut ajouter plusieurs remarques :

a) selon de Broglie, l'électron est « guidé » par une onde. Celle-ci s'étend dans tout l'espace et notamment sur l'ensemble des trajectoires de la fig. 8 lorsque le faisceau n'est pas collimaté. La « dimension » d'un électron n'apparaît qu'à travers la dimension du système qui, éventuellement, le détecte ;

b) les divers rayons qui franchissent la lentille ne sont pas isochrones, en ce sens que le trajet axial est à la fois plus court et parcouru à une vitesse plus grande que les trajets hors d'axe. Mais il s'agit de vitesse de groupe. Comme pour tout phénomène ondulatoire, la vitesse de phase est fixée par $v_\phi = \lambda\nu$, où ν est la fréquence. Tenant compte de la relation entre le quantum d'énergie $h\nu$ et l'énergie de masse [12], soit $h\nu = mc^2$, on obtient :

$$v_\phi = \frac{mc^2}{h} \lambda. \quad (20)$$

A faible vitesse électronique ($v \ll c$), la vitesse de phase est proportionnelle à λ , et chaque longueur d'onde est parcourue dans le temps $T = 1/v = h/mc^2$. Comme, d'autre part, tous les trajets portent le même nombre d'ondulations, ils sont tous parcourus par le front d'onde électronique dans le même temps (principe de Fermat).

CONCLUSION.

Les sondes échographiques illustrent le principe de superposition de Huygens-Fresnel de façon très concrète puisque la phase de chaque transducteur est contrôlable séparément. La condition de focalisation qui s'en déduit (déphasage = fonction quadratique de la distance à l'axe) s'applique aussi bien en acoustique qu'en optique photonique ou électronique. En n'utilisant guère plus que le théorème de Pythagore et l'approximation $\sqrt{1+x} \simeq 1+x/2$, pour $x \ll 1$, on établit la formule de conjugaison des lentilles, leur grandissement et une première notion du pouvoir séparateur. Le cours « Ondes » s'adressant aux futurs étudiants en médecine [10] comporte en outre quelques développements vers l'imagerie biomédicale.

APPENDICE.

C.2. Sur le principe de Fermat.

L'histoire de l'optique est jalonnée jusqu'à l'époque classique des réflexions d'Héron, Alhazen, Descartes, Fermat, Huygens... Descartes (1637) faisait dériver la loi des sinus d'un modèle mécanique qui postulait une vitesse de la lumière plus grande dans les milieux réfringents. Sans référence à un modèle, le principe de temps minimum de Fermat (1657) implique l'hypothèse adverse ; celle-ci se trouve définitivement confirmée par la mesure de la vitesse dans l'eau (Foucault, 1850).

Ce n'est que trois siècles plus tard que le point de vue de Descartes trouve sa justification, en optique corpusculaire. En effet, l'équation 20, couplée à la relation de de Broglie (équation 17), conduit à [12] :

$$v \cdot v_{\phi} = c^2 \quad (21)$$

qui montre que la vitesse des ondes (v_{ϕ}) est faible là où la vitesse de la particule est grande.

Le chemin optique entre deux points A et B d'un même rayon lumineux (fig. 9) s'exprime indifféremment sous les formes :

$$AB = \int_A^B n(M) ds = \int_A^B \frac{c_0}{c(M)} ds = \lambda_0 \int_A^B \frac{ds}{\lambda(M)} \quad (22)$$

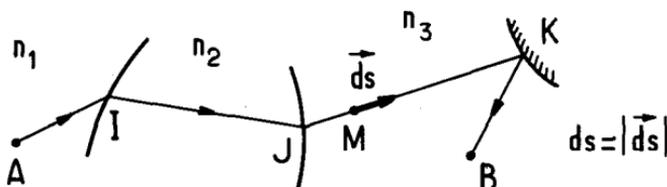


Fig. 9. — *Principe de Fermat* : le chemin optique entre les points A et B est stationnaire par rapport aux variations des points I, J, K.

où ds est l'élément de longueur géométrique et où $n(M)$, $c(M)$, $\lambda(M)$ sont les valeurs locales des paramètres n , c et λ . (On appelle λ_0 la longueur d'onde dans le milieu de référence.) On note que la dernière forme est la plus fréquemment utilisée (pour la lumière) puisque les mesures précises de l'indice sont de nature interférentielle et donc reposent sur la période spatiale λ . Au contraire, constater la stationnarité d'un temps de propagation conformément à la deuxième forme impliquerait l'émission en A d'une impulsion et sa réception en B, et obligerait à définir une vitesse de signal. De plus, le caractère polychromatique de l'émission, d'autant plus accentué que la mesure est précise, entraîne une dispersion de la vitesse dans tout milieu autre que le vide. On détecterait alors une vitesse de groupe notablement différente de c_0/n comme l'a montré Michelson dans une expérience célèbre sur CS_2 [9].

Ainsi l'on peut remarquer que la première forme est celle qui convient le mieux à l'optique électronique, la seconde aux ondes mécaniques, la troisième à la lumière.

REFERENCES

-
- [1] *Actualités en radio-diagnostic*, par AMIEL et coll., Masson, 1982.
- [2] *L'imagerie ultrasonore*, par M. FINK, Revue de Physique Appliquée, 18, 527 (1983).
- [3] *Optique*, par H. BOUASSE, Cours de Physique, Delagrave, 1912.
- [4] *Images optiques*, par P. FLEURY et J.-P. MATHIEU, Eyrolles, 1962.
- [5] *Fondements de la Physique*, Classe de 1^{re} D, Collection Cros, Belin, 1979.
- [6] *Optique, Préparation aux Grandes Ecoles*, par R. SUARDET, J.-B. Baillièrre, 1975.
- [7] *Optique et Principe de Fermat*, par J.-P. et P. PROVOST, Cédic/Fernand Nathan, 1980.
- [8] *Précis de Physique Générale*, Tome III, par KRONIG, Pergamon, 1954.
- [9] *Optics*, par E. HECHT et A. ZAJAC (en anglais), Addison-Wesley, 1979. (Signalons la documentation et l'iconographie remarquables de cet ouvrage).
- [10] *Electricité - Ondes*, par J.-P. MANEVAL, *Préparation commune aux Etudes Médicales*, Université Paris VII, 1984 (non publié).
- [11] *Electron and Ion Microscopy*, par L.-E. MURR, (en anglais), Dekker, 1982.
- [12] *Optique électronique et corpusculaire*, par Louis DE BROGLIE, Hermann, 1950.
-