

Diviseurs de tension et de courant à sources multiples

par J.-P. CARON,
E.N.S.A.M., centre de Lille.

INTRODUCTION.

A travers les nombreuses interrogations sur les résolutions des circuits électriques pratiquées aussi bien au concours d'entrée à l'E.N.S.A.M. qu'au centre régional de l'E.N.S.A.M. à Lille, j'ai pu constater et déplorer (rapports du concours) la maladresse de nos étudiants qui se réfugient systématiquement dans la seule exploitation des lois de KIRCHHOFF.

Les causes d'échec ont pour origine :

- les fréquentes erreurs de signe,
- l'absence de méthodologie.

La structure n'est pas analysée ; les inconnues sont mal choisies et leur nombre n'est pas minimisé.

Le plus souvent, ils ignorent que les inconnues de la loi des mailles sont en fait les courants de maille (Maxwell) et que leur nombre (minimal) est égal à celui des mailles indépendantes. Quant à la loi des nœuds, rares sont ceux qui l'expriment avec comme inconnues les différences de potentiel des nœuds indépendants par rapport à un nœud de référence ; le réseau étant décrit par ses sources de tensions et ses admittances.

Si les théorèmes de Thévenin et de Norton sont maintenant assez bien assimilés quant à la recherche des caractéristiques de la source équivalente, l'idée de leur utilisation, en vue par exemple de réduire le nombre de mailles, n'est pas encore très répandue.

L'introduction récente de l'étude des amplificateurs opérationnels dans les programmes des classes préparatoires (en 1970 dans les STS Electronique) devrait améliorer la situation que nous connaissons actuellement grâce à la stimulation de la curiosité que provoque toute nouveauté.

En effet, la pratique des applications linéaires des amplificateurs opérationnels montre que :

- les structures des réseaux d'éléments passifs associés aux amplificateurs opérationnels sont, dans de très nombreux cas, à un seul nœud indépendant situé du côté de la broche de l'entrée inverseuse et aussi parfois de la broche de l'entrée non inverseuse ; le deuxième nœud étant à la masse ;
- la recherche d'une fonction de transfert ou d'une relation entre les sources d'excitation et la tension de sortie passe par l'écriture :
 - * de l'égalité des tensions d'entrée $E_{(-)} = E_{(+)}$,
 - * de l'annulation des courants d'entrée.

Cette situation particulière conduit naturellement à adapter les lois de KIRCHHOFF et offrir aux étudiants les outils remarquablement efficaces que sont les *diviseurs de tension et de courant*.

L'efficacité résulte d'une meilleure appréhension des circuits, de la réduction de la longueur des calculs et de l'élimination des causes d'erreurs ; mais elle demande l'effort de la mémorisation d'un certain nombre de relations à choisir en fonction des structures.

Il est bien évident que ces méthodes ne constituent qu'un complément aux lois générales et on ne peut prétendre les utiliser avec intérêt quelque soit le cas présenté.

Notation.

- E : force électromotrice,
- U, V : différence de potentiel,
- I : intensité du courant.

Il s'agit de valeur continue, d'amplitude complexe ou opérationnelle :

- Z, Y : impédance, admittance.

Diviseurs de tension.

Le diviseur élémentaire (de type potentiométrique) est constitué d'une f.é.m. E en série avec deux éléments passifs d'impédances respectives Z_1 et Z_2 ; on s'intéresse à l'expression de la tension aux bornes de l'une des deux impédances.

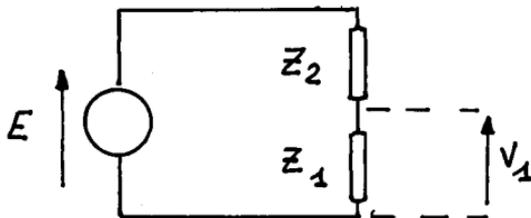


Fig. 1

Un calcul banal permet d'établir la formule du diviseur et de la présenter sous les trois formes suivantes :

$$V_1 = E \cdot \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} (A_1); \quad V_1 = E \cdot \frac{1}{1 + Y_1 Z_2} (A_2); \dots$$

$$\dots V_1 = E \cdot \frac{Y_2}{Y_2 + Y_1} (A_3).$$

Le choix de la formule dépend de la structure des impédances ; ainsi la relation (A₂) est à employer de préférence quand Z₂ est une impédance série et Z₁ est un groupement de branches en parallèle (exemple 1-2).

Diviseur de tension à deux sources.

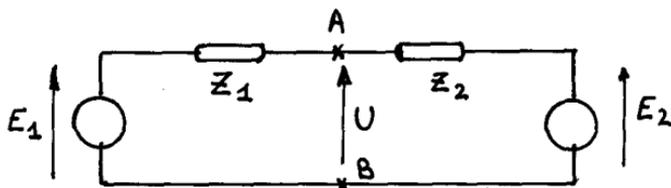


Fig. 2

L'expression de la différence de potentiel U s'obtient en associant la division de tension au théorème de superposition :
De (A₁) on déduit :

$$U = \frac{Z_2 E_1 + Z_1 E_2}{Z_1 + Z_2} \quad (B_1)$$

De (A₂) on tire :

$$U = \frac{Y_1 E_1 + Y_2 E_2}{Y_1 + Y_2} \quad (B_2)$$

Diviseur de tension à n sources (ou théorème de Millman).

La relation (B₂) se généralise :

$$U = \frac{\sum_{k=1}^n Y_k E_k}{\sum_{k=1}^n Y_k} \quad (B_3)$$

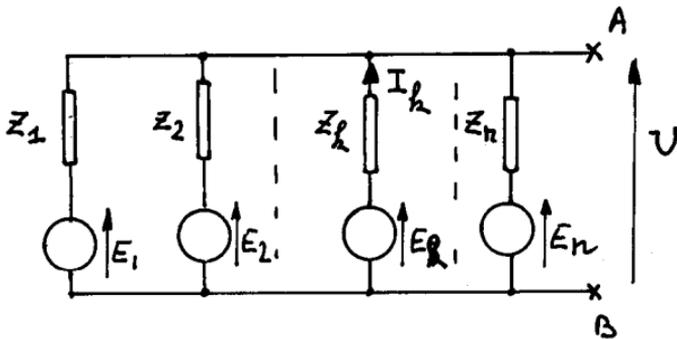


Fig. 3

Elle se démontre en écrivant que :

$$0 = \sum_{k=1}^n I_k; \quad I_k = Y_k (E_k - U).$$

Elle exprime la loi des nœuds de KIRCHHOFF à un seul nœud indépendant.

Lorsque entre A et B on connecte une charge, le courant I qui circule dans celle-ci de A vers B a pour expression :

$$I = \sum_{k=1}^n Y_k U_k - U \cdot \left(\sum_{k=1}^n Y_k \right). \quad (B_4)$$

Diviseur de courant.

Par dualité, on transpose le schéma du diviseur de tension et on déduit les relations (C).

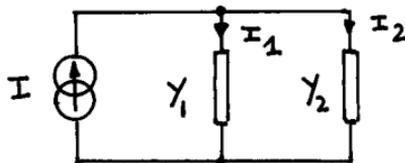


Fig. 4

$$I_1 = I \cdot \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} \quad (C_1); \quad I_1 = I \cdot \frac{1}{1 + Z_1 Y_2} \quad (C_2); \dots$$

$$\dots I_1 = I \cdot \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (C_3).$$

Généralisation.

Source de courant alimentant n branches passives en parallèle.

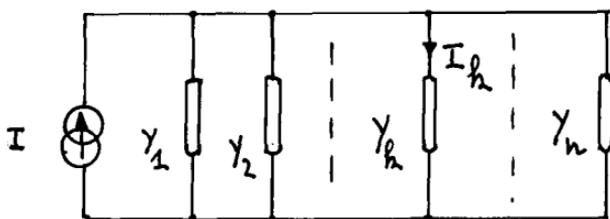


Fig. 5

$$I_k = I \cdot \frac{Y_k}{\sum_{j=1}^n Y_j} \quad (C_4)$$

La variété des exemples présentés ci-après montre l'intérêt de la connaissance des formulations (A), (B), (C).

Exemples d'application.

I. CIRCUITS PASSIFS.

I.1. Double diviseur de tension.

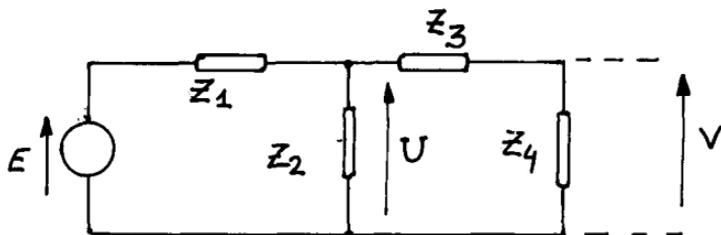


Fig. 6

Il s'agit d'établir l'expression du rapport V/E . On applique deux fois la relation du diviseur de tension au lieu de travailler avec la loi des mailles ou le théorème de Thévenin.

$$(A_1) \Rightarrow V = U \cdot \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4}$$

$$(A_2) \Rightarrow U = E \cdot \frac{1}{1 + Z_1 [Y_2 + 1/(Z_3 + Z_4)]}$$

Par élimination de U , la tension intermédiaire, on déduit :

$$\frac{V}{E} = \frac{Z_4}{Z_1 + (Z_3 + Z_4)(1 + Z_1 Y_2)}$$

1.2. Cellule de Wien.

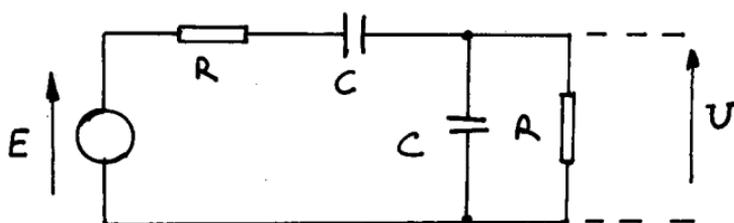


Fig. 7

La détermination de la fonction de transfert opérationnelle $H = U/E$ passe par l'application directe de la formule (A₂) où :

$$Y_1 = Cp + (1/R); \quad Z_2 = R + (1/Cp).$$

On déduit :

$$H = \frac{1}{1 + [(1/R) + Cp] [R + (1/Cp)]} = \frac{R Cp}{1 + 3 R Cp + (R Cp)^2}.$$

1.3. Circuit résonnant parallèle.

Soit le schéma d'une source de courant excitant une bobine (r, L) en parallèle avec un condensateur de capacité C .

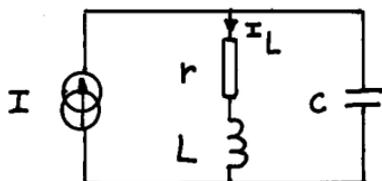


Fig. 8

Si on s'intéresse à la fonction de transfert $H = I_L/I$, on utilisera de préférence la formule (C₂) des diviseurs de courant, où $Z_1 = r + Lp$ et $Y_2 = Cp$.

$$H = \frac{1}{1 + (r + Lp) Cp}.$$

1.4. Différence de potentiel entre les deux centres d'étoile d'un réseau triphasé déséquilibré.

En supposant les impédances Z_1, Z_2, Z_3 non couplées et les f.é.m. E_1, E_2, E_3 indépendantes, on applique la formule de Millman (B₃) pour trouver U .

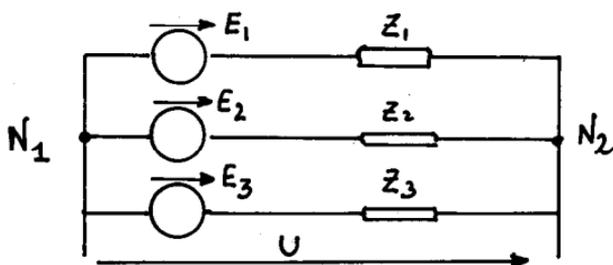


Fig. 9

$$U = \frac{Y_1 E_1 + Y_2 E_2 + Y_3 E_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

Le courant de ligne s'exprime par : $I_k = Y_k(E_k - U)$.

II. CIRCUITS ACTIFS.

L'élément actif est un amplificateur opérationnel supposé idéal :

- gain infini,
- impédances d'entrées infinies,
- impédance de sortie nulle.

Il est caractérisé par la proposition suivante :

Tant que la tension de sortie est comprise entre les deux valeurs de saturation ($-V_{sat}$) et ($+V_{sat}$), la tension différentielle d'entrée V_{di} est nulle. La sortie de l'amplificateur opérationnel est équivalente à une f.é.m. V_0 dont la valeur est déterminée en écrivant la condition $V_{di} = 0$.

II.1. Soustracteur pondéré, déphaseur.

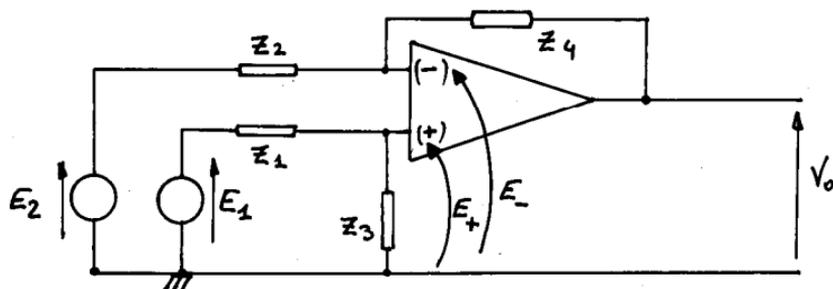


Fig. 10

On se propose d'établir la relation entre V_0 , E_1 , E_2 ; elle s'obtient en écrivant l'égalité $E_+ = E_-$.

E_+ se calcule par la division de tension (A_1),

E_- se calcule par la division à deux sources (B_1).

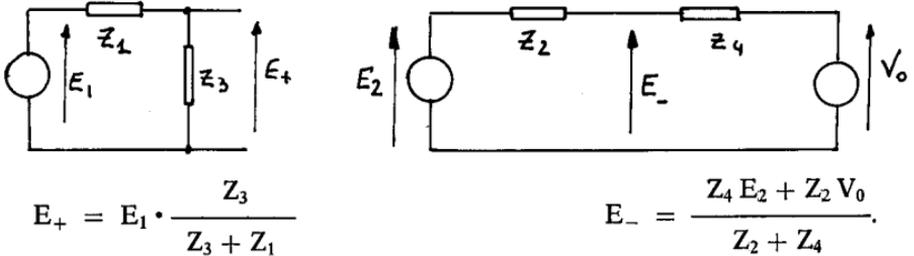


Fig. 11

Cas du soustracteur pondéré.

Hypothèses.

$$Z_1 = Z_2 = R; \quad Z_3 = Z_4 = kR.$$

On tire :

$$E_+ = k E_1 / (1 + k); \quad E_- = (k E_2 + V_0) / (1 + k).$$

La condition $E_+ = E_-$ entraîne :

$$V_0 = k(E_1 - E_2).$$

Cas du déphaseur.

Hypothèses.

$$E_1 = E_2 = V_i, \quad Z_2 = Z_4 = 2R; \quad Z_1 = 1/jC\omega, \quad Z_3 = R.$$

On tire :

$$E_+ = jRC\omega \cdot V_i / (1 + jRC\omega); \quad E_- = (V_i + V_0) / 2.$$

La condition $E_+ = E_-$ entraîne :

$$\frac{V_0}{V_i} = \frac{jRC\omega - 1}{jRC\omega + 1}$$

v_0 et v_i ont même amplitude et le déphasage de v_0 par rapport à v_i admet pour expression : $\pi - 2 \text{Arc tg}(RC\omega)$.

II.2. Source de courant commandée par une source de tension.

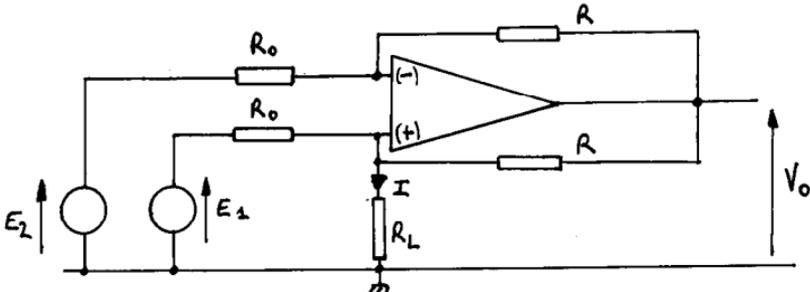
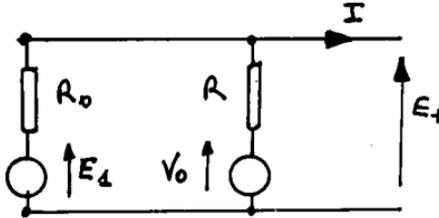


Fig. 12

Soit à déterminer l'expression de I en fonction de E_1 et E_2 , indépendamment de la charge R_L .

Tant que $-V_{sat} < V_0 < +V_{sat}$, la solution passe par l'écriture de $E_+ = E_-$.

Il s'obtient directement par la formule (B₄) associée au schéma partiel de la fig. 13 :



$$I = \frac{E_1}{R_0} + \frac{V_0}{R} - E_+ \cdot \left[\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R} \right].$$

Fig. 13

Pour E_- , on applique la formule du diviseur à deux sources, déjà employée dans l'exemple précédent.

On l'écrira, pour des raisons de simplification ultérieure, sous la forme (B₂) :

$$E_- = \left[\frac{E_2}{R_0} + \frac{V_0}{R} \right] \cdot \left[\frac{1}{(1/R + 1/R_0)} \right].$$

En égalant E_+ à E_- , il vient :

$$I = (E_1 - E_2)/R_0.$$

II.3. Filtre à réaction multiple, structure de Rauch.

Soit à déterminer la fonction de transfert $H = V_0/V_i$ du filtre actif de la fig. 14 :

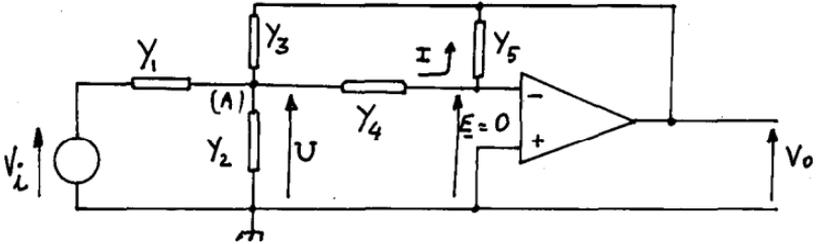


Fig. 14

Ce circuit présente un nœud A, pivot entre les sources V_i et V_0 . U est lié à V_0 dans le schéma partiel de la fig. 15 :

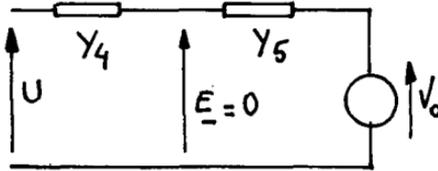


Fig. 15

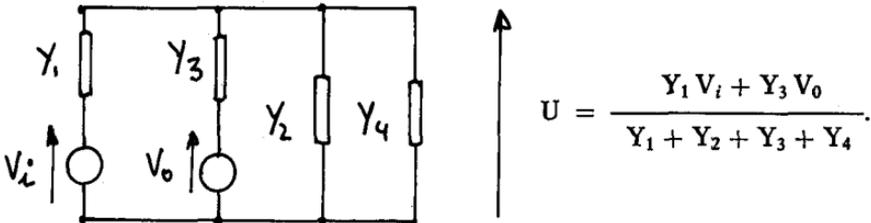
On exprime E_- en fonction de U et V_0 par la formule du diviseur à deux sources (B_2) :

$$0 = E_- = (Y_4 U + Y_5 V_0)/(Y_5 + Y_4)$$

d'où :

$$V_0 = -Y_4 U/Y_5.$$

Le schéma de la fig. 16 permet d'écrire U en fonction de V_0 et V_i (formule de Millman).



Par élimination de U, il vient :

$$H = \frac{-Y_1 Y_4}{Y_5 [Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4] + Y_3 Y_4}$$

II.4. Filtre à source contrôlée, structure de Sallen et Key.

On utilise un amplificateur, dont l'amplification de tension est K , l'impédance d'entrée est infinie et l'impédance de sortie est nulle.

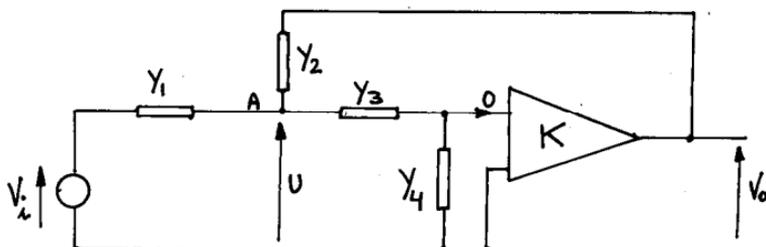


Fig. 17

C'est encore un circuit mettant en jeu un nœud prépondérant (A), soit U son potentiel par rapport à la masse.

U , divisé par (Y_3, Y_4) est amplifié :

$$(A_3) \Rightarrow V_0 = K \cdot U \cdot Y_3 / (Y_3 + Y_4)$$

U est la d.d.p. d'un réseau à deux nœuds (B_3) :

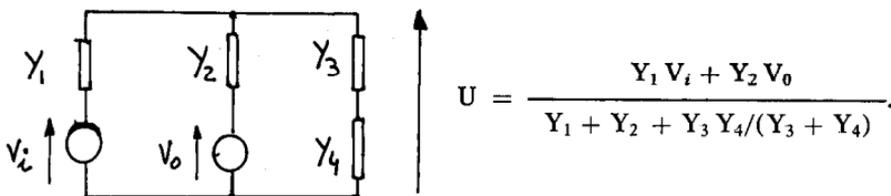


Fig. 18

Par élimination de U , on déduit :

$$\frac{V_0}{V_i} = \frac{K Y_1 Y_3}{[Y_1 + Y_2] [Y_3 + Y_4] - K Y_2 Y_3 + Y_3 Y_4}$$

CONCLUSION.

Les diviseurs de tension et de courant accroissent la richesse et la diversité des méthodes d'analyse des circuits électriques et électroniques linéaires ; ils rendent dans de nombreux cas leur résolution plus accessible.

La possibilité de choisir l'outil de travail le mieux adapté à une structure donnée ne constitue pas un obstacle mais au contraire la stimulation d'une recherche dynamique.