

Montages simulant une résistance négative

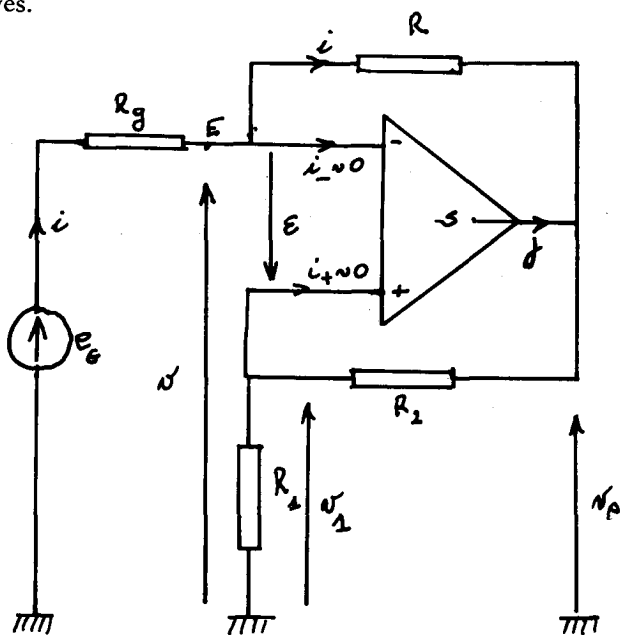
APPLICATIONS A L'OBTENTION D'OSCILLATIONS QUASI-SINUSOIDALES

par J.-M. MILLET et Ph. JULIARD
L.T.E. H.-Brisson, Vierzon.

A) REMARQUES PRELIMINAIRES

1. But de l'article.

Dans un premier temps, nous établissons la caractéristique $v = f(i)$ de chacun des montages représentés ci-après. Dans certaines conditions qui seront précisées, cette caractéristique se réduit à $v = -Ri$: l'intérêt des montages est qu'alors ils se comportent, entre E et la masse M, comme des résistances négatives.



Montage 1

$$\frac{\mu}{-} = \frac{\mu_0}{1 + j(\omega/\omega_0)} \quad \text{où} \quad \omega_0 = \frac{1}{\tau_0}.$$

Pour un 741 : $\mu_0 \sim 10^5$ et $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \sim 10$ Hz.

3) L'existence de ce régime linéaire suppose :

$$-V_{sat} < v_s < V_{sat}$$

($V_{sat} \sim 14$ V pour un A.O. alimenté symétriquement en 15 V).

4) En dehors de ce régime :

$$v_s = V_{sat} \quad \text{si} \quad \varepsilon > \frac{V_{sat}}{\mu_0} \quad \text{l'A.O. est en saturation haute,}$$

$$v_s = -V_{sat} \quad \text{si} \quad \varepsilon < -\frac{V_{sat}}{\mu_0} \quad \text{l'A.O. est en saturation basse.}$$

5) Le courant de sortie j de l'A.O. est limité de telle façon que $-j_0 < j < j_0$ ($j_0 \sim 20$ mA). Dans l'étude théorique, nous ne tiendrons pas compte de cette limitation car, expérimentalement, il est possible de se placer dans des conditions telles qu'elle n'intervienne pas.

B) MODES DE FONCTIONNEMENT DE L'AMPLIFICATEUR OPERATIONNEL DANS LES MONTAGES 1 ET 2

La première remarque qui s'impose à propos des montages étudiés est qu'ils comportent à la fois une réaction positive et une réaction négative. On sait qu'une réaction positive tend à faire fonctionner l'A.O. en saturation (haute ou basse), alors qu'une réaction négative tend à le faire fonctionner en régime linéaire.

Il faut donc faire apparaître clairement ces deux types de réaction pour déterminer le mode de fonctionnement de l'A.O.

Pour obtenir des résultats généraux, nous raisonnons en termes de schéma bloc suivant la figure ci-après.

I. Calcul général pour un système comportant simultanément une réaction positive et une réaction négative.

1. Fonction de transfert globale.

L'opérateur de chaîne directe est du premier ordre :

$$\left(\frac{\mu}{-} = \frac{\mu_0}{1 + j(\omega/\omega_0)} \right)$$

et fonctionne linéairement si $-S_{sat} \leq s \leq S_{sat}$. Il modélise l'A.O.

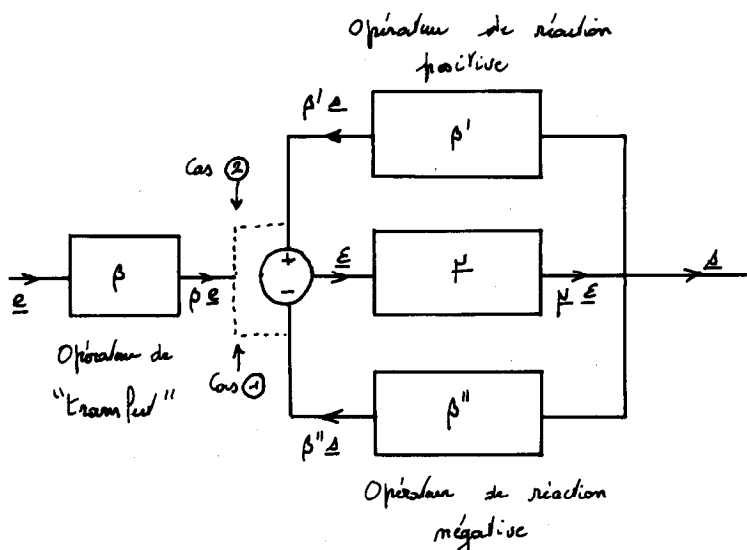


Fig. 1

Les opérateurs de « transfert », de réaction positive, de réaction négative sont supposés tels que β , β' , β'' soient réels et positifs.

La sortie de l'opérateur de transfert est branchée soit sur l'entrée — du comparateur (cas (1)) soit sur l'entrée + (cas (2)).

Analysons le cas (1) en régime permanent sinusoïdal :

$$\underline{s} = \underline{\mu} \underline{\epsilon} \text{ avec } \underline{\epsilon} = -\beta \underline{e} + \beta' \underline{s} - \beta'' \underline{s}$$

$$\Rightarrow \underline{s} = -\underline{\mu} \beta \underline{e} + \underline{\mu} (\beta' - \beta'') \underline{s}$$

On en déduit la fonction de transfert du système :

$$\underline{H}_1 = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = - \frac{\underline{\mu} \beta}{1 + \underline{\mu} (\beta'' - \beta')}$$

Dans le cas (2), on établit sans peine :

$$\underline{H}_2 = \frac{\underline{\mu} \beta}{1 + \underline{\mu} (\beta'' - \beta')}$$

2. Equation différentielle liant s et e .

A partir de $\underline{H}_1$ (ou $\underline{H}_2$) on peut remonter à l'équation différentielle liant s et e .

$$\underline{\mu} = \frac{\mu_0}{1 + j(\omega/\omega_0)} \Rightarrow \underline{H}_1 = \dots$$

$$\dots - \frac{\mu_0 \beta}{1 + j(\omega/\omega_0) + \mu_0(\beta'' - \beta')} \underline{s} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$$

$$\Rightarrow j\omega \times \frac{\underline{s}}{\omega_0} + [1 + \mu_0(\beta'' - \beta')] \underline{s} = -\mu_0 \beta \underline{e}.$$

$$\text{Or, } j\omega \underline{s} = \frac{d\underline{s}}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\omega_0} \frac{ds}{dt} + [1 + \mu_0(\beta'' - \beta')] s = -\mu_0 \beta e.}$$

(cas (1)).

Dans le cas (2) :

$$\boxed{\frac{1}{\omega_0} \frac{ds}{dt} + [1 + \mu_0(\beta'' - \beta')] s = \mu_0 \beta e.}$$

3. Discussion des solutions dans le cas où e est un échelon, suivant les valeurs respectives de β' et β'' .

a) Supposons tout d'abord $\beta'' = \beta'$.

On obtient alors $\frac{1}{\omega_0} \frac{ds}{dt} + s = \mp \mu_0 \beta e$ (— dans le cas (1),

+ dans le cas (2)).

Après un régime transitoire, le régime permanent s'établit à $s = \mp \mu_0 \beta e$. Comme en général $\mu_0 \gg 1$, on aboutit à un fonctionnement en saturation de l'opérateur de chaîne directe.

b) Supposons à présent $\beta'' < \beta'$.

On simplifie l'équation différentielle en tenant compte de $\mu_0 \gg 1$:

$$\frac{1}{\omega_0} \frac{ds}{dt} - \mu_0(\beta' - \beta'') s = \mp \mu_0 \beta e$$

dont la solution correspond à :

$$s = \pm \frac{\beta e}{\beta' - \beta''} [1 - e^{t/\tau}] \quad \text{où} \quad \tau = \frac{1}{\omega_0 \mu_0 (\beta' - \beta'')}$$

qui, pour $t \gg \tau$, conduit à $s \sim \pm \frac{\beta e}{\beta' - \beta''} \times (-e^{t/\tau})$, ce qui

amène obligatoirement l'opérateur de chaîne directe vers la saturation.

c) Supposons enfin $\beta'' > \beta'$.

L'équation différentielle donne dans ce cas :

$$\frac{1}{\omega_0} \frac{ds}{dt} + \mu_0 (\beta'' - \beta') s = \mp \mu_0 \beta e$$

dont la solution :

$$s = \mp \frac{\beta e}{(\beta'' - \beta')} [1 - e^{-t/\tau}] \quad \text{où} \quad \tau = \frac{1}{\omega_0 \mu_0 (\beta'' - \beta')}.$$

Pour $t \gg \tau$, un régime permanent s'établit à $s = \mp \frac{\beta e}{(\beta'' - \beta')}$,

ce qui autorise le fonctionnement en régime linéaire de l'opérateur de chaîne directe à condition que s soit dans l'intervalle $[-S_{sat}, +S_{sat}]$.

Cette première étude montre que l'on ne peut envisager un fonctionnement en régime linéaire de l'opérateur de chaîne directe que dans le cas où $\beta'' > \beta'$ c'est-à-dire dans le cas où la réaction négative l'emporte sur la réaction positive, résultat qui n'est guère surprenant compte tenu de la remarque faite au début.

II. Identifications des coefficients β , β' et β'' dans les montages 1 et 2.

On détermine pour chaque montage, ε en fonction de e_G (qui joue le rôle de e), v_s (qui joue le rôle de s), de R_1 , R_2 , R_G , R . On identifie ensuite avec : $\varepsilon = \mp \beta e + \beta' s - \beta'' s$.

1. Cas du montage 1.

$\varepsilon = v_1 - v_s$; (la soustraction est réalisée par l'entrée différentielle de l'A.O.).

R_1 et R_2 , parcourus par le même courant forment un diviseur

$$\text{de tension : } v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_s.$$

$$\text{De même pour } R_g \text{ et } R : v = \frac{R}{R_g + R} e_G + \frac{R_g}{R_g + R} v_s.$$

(L'addition est réalisée ici par le nœud E du montage).

On en déduit :

$$\varepsilon = -\frac{R}{R_g + R} e_G + \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_g}{R_g + R} \right) v_s.$$

Par identification :

$$\beta = \frac{R}{R_g + R}; \quad \beta' = \frac{R_1}{R_1 + R_2}; \quad \beta'' = \frac{R_g}{R_g + R}.$$

Le signe — devant $\frac{R}{R_g + R} e_G$ identifie le montage 1 au cas (1).

Si l'on veut pouvoir observer un fonctionnement en régime linéaire de l'A.O., il faut $\beta'' > \beta' \Rightarrow$ $R_g R_2 > R_1 R.$

2. Cas du montage 2.

$\varepsilon = v - v_1$, les expressions de v et v_1 étant inchangées

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{R}{R_g + R} e_G + \left(\frac{R_g}{R_g + R} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) v_s.$$

Le montage 2 s'identifie au cas (2) avec :

$$\beta = \frac{R}{R_g + R}; \quad \beta' = \frac{R_g}{R_g + R}; \quad \beta'' = \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

Le critère de stabilité $\beta'' > \beta'$ conduit à : $R_g R_2 < R_1 R.$

C) SIMULATION DE RESISTANCE NEGATIVE PAR LES MONTAGES 1 ET 2

On se propose d'établir la caractéristique $v = f(i)$ de chacun des montages 1 et 2 dans le cas où ceux-ci sont stables ($R_g R_2 > R_1 R$ pour le 1, $R_g R_2 < R_1 R$ pour le 2).

Pour alléger les calculs, on se place dans le cas particulier $R_1 = R_2$ (les critères de stabilité deviennent $R_g > R$ pour 1, $R_g < R$ pour 2).

Les calculs ne sont détaillés que pour le montage 1, mais les résultats seront donnés et comparés pour les montages 1 et 2.

1. Caractéristique $v = f(i)$ du montage 1.

L'étude globale a conduit en régime permanent à :

$$v_s = -\frac{\beta e_G}{\beta'' - \beta'} \quad \text{où} \quad \beta = \frac{R}{R_g + R}; \quad \beta' = \frac{R}{R_1 + R_2} = \frac{1}{2}$$

(car $R_1 = R_2$).

$$\beta'' = \frac{R_g}{R_g + R} \Rightarrow \beta'' - \beta' = \frac{R_g}{R_g + R} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{R_g - R}{(R_g + R)}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_s = -2 \frac{R}{(R_g - R)} e_G.}$$

Cette relation n'est vérifiée que si v_s est bien dans l'intervalle $[-V_{sat}, V_{sat}]$.

1. Fonctionnement en régime linéaire de l'A.O.

$$-V_{sat} < v_s < V_{sat}.$$

Cette condition impose que e_G soit tel que :

$$v_s < V_{sat} \Rightarrow e_G > -\frac{(R_g - R)}{2R} V_{sat}$$

$$v_s > -V_{sat} \Rightarrow e_G < \frac{(R_g - R)}{2R} V_{sat}.$$

On peut alors calculer :

$$i = \frac{e_G - v_s}{R_g + R} \Rightarrow i = \frac{e_G}{R_g - R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = -R i.}$$

$$v = e_G - R_g i \Rightarrow v = -\frac{R}{R_g - R} e_G$$

Le montage 1 simule dans ces conditions, entre E et M, une résistance négative.

Les limitations sur e_G , imposent des limitations sur i et v .

$$e_G > -\left(\frac{R_g - R}{2R}\right) V_{sat} \Rightarrow i > -\frac{V_{sat}}{2R} \quad \text{et} \quad v < +\frac{V_{sat}}{2}$$

$$e_G < \left(\frac{R_g - R}{2R} \right) V_{sat} \Rightarrow i < \frac{V_{sat}}{2R} \text{ et } v > -\frac{V_{sat}}{2}.$$

Remarque.

Le calcul de ε dans ces conditions conduit à $\varepsilon \sim 0$, ce qui correspond à l'approximation habituelle : A.O. en régime linéaire et $\mu_0 \gg 1$.

2. Fonctionnement en saturation de l'A.O.*a) Fonctionnement en saturation haute.*

Dans ce cas, $v_s = V_{sat}$ à condition que $\varepsilon > \frac{V_{sat}}{\mu_0} \sim 0$. En revenant au schéma du montage 1, on établit facilement :

$$v = Ri + V_{sat}.$$

(L'effet de résistance négative n'existe plus).

$$\varepsilon > 0 \Rightarrow e_G < -V_{sat} \left(\frac{R_g - R}{2R} \right) ; i < -\frac{V_{sat}}{2R} ; v < -\frac{V_{sat}}{2}.$$

b) Fonctionnement en saturation basse.

On a alors : $v_s = -V_{sat}$ à condition que $\varepsilon < -\frac{V_{sat}}{\mu_0} \sim 0$. Les calculs conduisent à :

$$v = Ri - V_{sat}.$$

$$\varepsilon < 0 \Rightarrow e_G > V_{sat} \left(\frac{R_g - R}{2R} \right) ; i > \frac{V_{sat}}{2R} ; v > -\frac{V_{sat}}{2}.$$

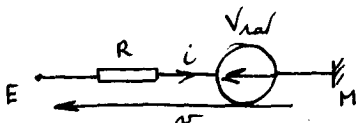
On peut résumer la situation en représentant les graphes $v_s = g(e_G)$ et $v = f(i)$ (fig. 2 et 3).

3. Remarques à propos de la caractéristique $v = f(i)$.

a) On peut donner les schémas équivalents au montage entre E et M, suivant la valeur de i :

$$i < -\frac{V_{sat}}{2R}$$

$$v = Ri + V_{sat}$$



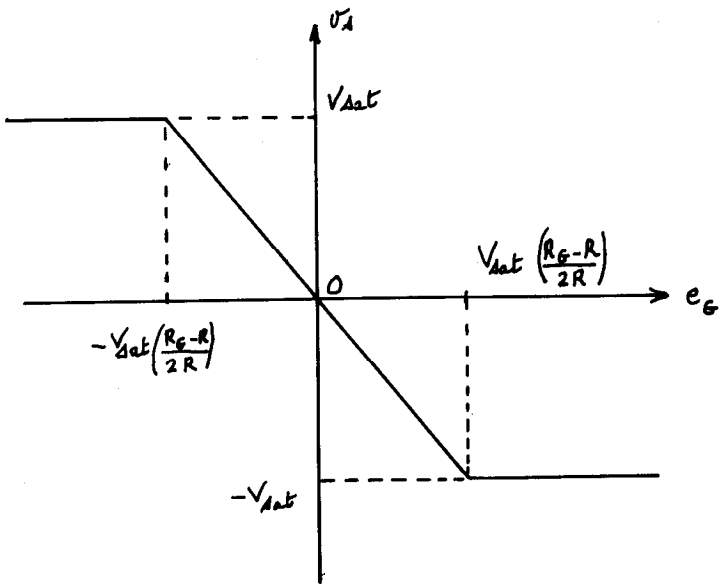


Fig. 2

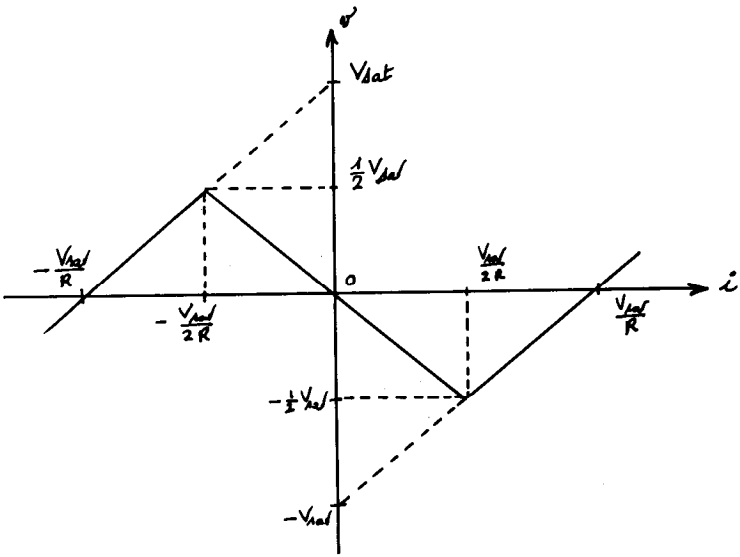
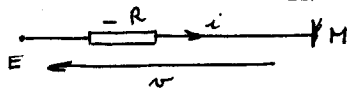
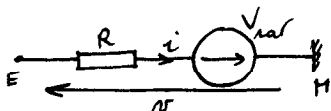


Fig. 3

$$-\frac{V_{sat}}{2R} < i < \frac{V_{sat}}{2R} \quad v = -Ri$$



$$i > \frac{V_{sat}}{2R} \quad v = Ri - V_{sat}$$



b) La caractéristique montre que à une valeur de i correspond une seule valeur de v :

* il n'existe qu'un seul point de repos correspondant à $i = 0$: $v = 0$;

* si i doit varier continûment, il en sera de même pour v ;

* la valeur de v étant déterminée à partir de celle de i , le générateur d'attaque aurait pu être représenté plus avantageusement par le schéma de Norton équivalent $\left(\frac{e_G}{R_g}, \frac{1}{R_g} \right)$;

* un générateur de courant idéal ($i_0 = i$, $R_g \rightarrow \infty$) utilisé comme générateur d'attaque permettrait de tracer toute la caractéristique.

c) Inversement, la caractéristique montre qu'à une valeur de v correspondent 3 valeurs de i (ou 1 à la limite).

Le point essentiel pour l'instant est le suivant :

Pour $R_g > R$ et

$$-V_{sat} \frac{(R_g - R)}{2R} < e_G < V_{sat} \frac{(R_g - R)}{2R}$$

$$\left(-\frac{V_{sat}}{2R} < i < \frac{V_{sat}}{2R} \right),$$

le montage 1 est stable et simule entre E et M une résistance négative $R_n = -R$.

4. Remarque à propos du critère de stabilité du montage 1.

On peut retrouver le critère de stabilité du montage 1 ($R_g > R$) en recherchant le (ou les) points de fonctionnement par superposition des caractéristiques $v = e_G - R_g i$ du générateur et $v = f(i)$ du montage dans les deux cas : $R_g > R$ et $R_g < R$.

On obtient alors les figures 4 et 5 ci-après :

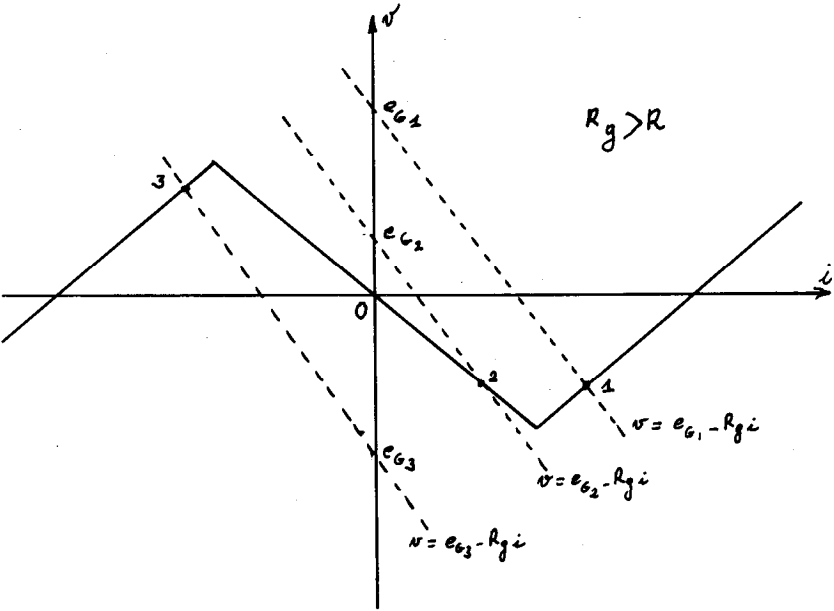


Fig. 4

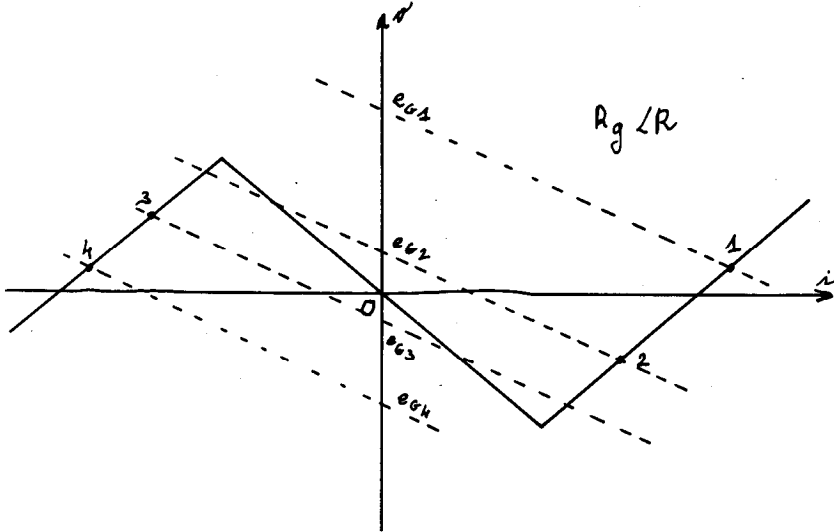


Fig. 5

La résistance interne du B.F. : $R_i \sim 50 \Omega$.

R_0 permettra de visualiser i .

Par rapport aux calculs précédents, on a donc : $R_g = R_0 + R_i$.

1^{re} manipulation : On fixe $R_0 = 2\,000 \Omega$ et $R = 1\,500 \Omega$.

On est donc dans le cas où $R_g > R$.

On observe à l'oscilloscope en XY, — $v_s = R_0 i$ et v ; la caractéristique observée est en accord avec la caractéristique théorique et des mesures peuvent confirmer cet accord.

A l'aide d'un second oscilloscope, on peut également observer v_s dont la forme indique le mode de fonctionnement de l'A.O. : saturation ou régime linéaire.

2^e manipulation : On fixe $R_0 = 2\,000 \Omega$ et on augmente progressivement R . On observera qu'à partir de valeurs de R supérieures à R_g , le spot décrit de plus en plus rapidement la partie de la caractéristique correspondant au régime linéaire : l'effet de résistance négative tend à disparaître.

Remarque importante.

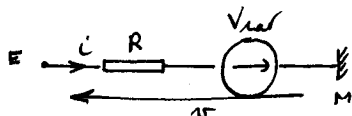
Il ne faut pas donner à R_0 et R des valeurs trop faibles car alors la limitation du courant de sortie de l'A.O. apparaît ($|j| < 20 \text{ mA}$).

II. Caractéristique $v = f(i)$ du montage 2.

1. Nous donnons les résultats essentiels, sans calculs, dans le cas où $R_g < R$.

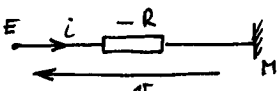
$$\text{si } e_G < -V_{sat} \left(\frac{R - R_g}{2R} \right) : v_s = -V_{sat} ; v = R_i - V_{sat}.$$

$$i < \frac{V_{sat}}{2R} \text{ et } v < -\frac{V_{sat}}{2R} ;$$

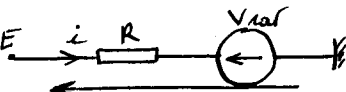


$$-V_{sat} \left(\frac{R - R_g}{2R} \right) < e_G < V_{sat} \left(\frac{R - R_g}{2R} \right) :$$

$$v_s = \frac{2R}{(R - R_g)} e_G ; v = -R_i$$

$$-\frac{V_{sat}}{2R} < i < \frac{V_{sat}}{2R} \quad \text{et} \quad -\frac{V_{sat}}{2} < v < \frac{V_{sat}}{2};$$


$$\text{si } e_G > V_{sat} \left(\frac{R - R_g}{2R} \right) : v_s = +V_{sat}; \quad v = R_i + V_{sat}.$$

$$i > -\frac{V_{sat}}{2} \quad \text{et} \quad v > \frac{V_{sat}}{2};$$


Ces résultats sont résumés sur les fig. 7 [$v_s = g(e_G)$] et 8 [$v = f(i)$].

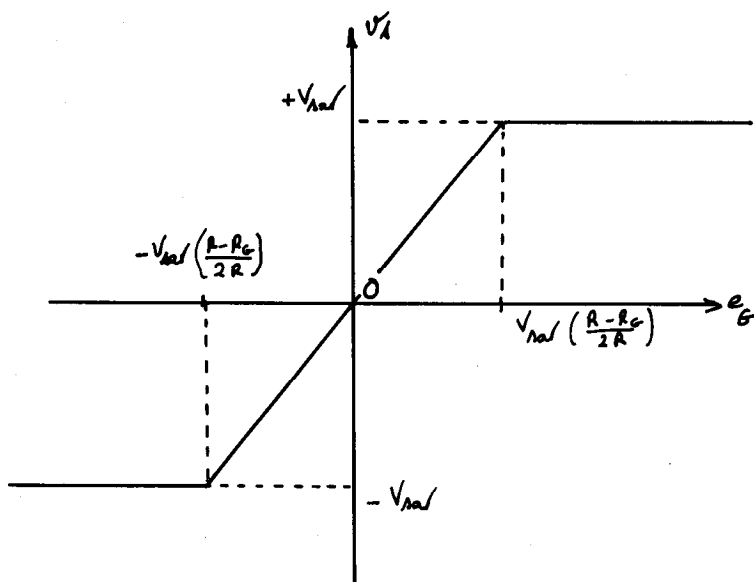


Fig. 7

Les propriétés du montage 2 appellent les commentaires suivants :

a) à une valeur de v correspond une seule valeur de i :

* il n'existe qu'un seul point de repos correspondant à $v = 0 : i = 0$;

* si v doit varier continûment, il en sera de même pour i ;

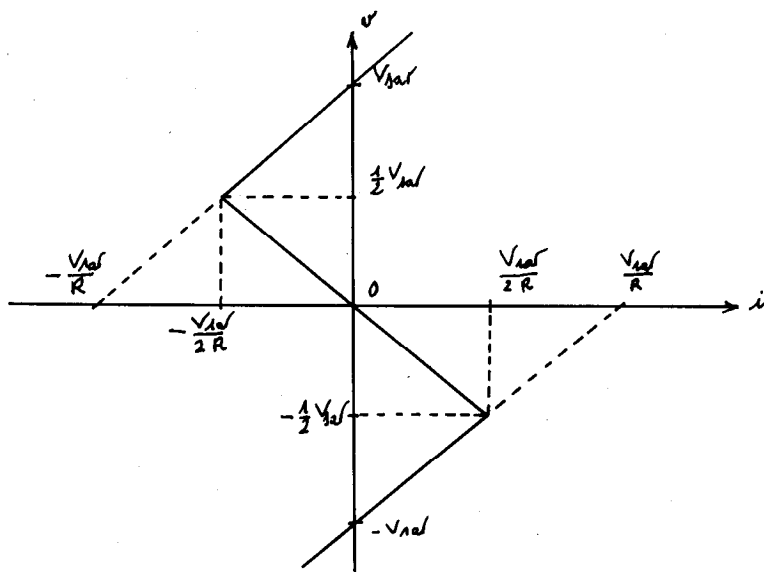


Fig. 8

* la valeur de i étant déterminée à partir de celle de v , le choix de la représentation de Thévenin pour le générateur d'attaque est bien adapté dans ce cas ;

* un générateur de tension idéal ($e_0 = e_G$, $R_g \rightarrow 0$) utilisé comme générateur d'attaque permettrait d'explorer toute la caractéristique ;

b) inversement à une valeur de i correspondent 3 valeurs de v (ou 1 à la limite).

En conclusion.

Pour $R_g < R$ et

$$-V_{sat} \left(\frac{R - R_g}{2R} \right) < e_G < V_{sat} \left(\frac{R - R_g}{2R} \right) \\ \left(-\frac{V_{sat}}{2} < v < \frac{V_{sat}}{2} \right),$$

le montage 2 est stable et simule entre E et M une résistance négative $R_n = -R$.

Remarque.

On pourrait, comme il a été fait pour le montage 1, rechercher les points de fonctionnement à partir de l'intersection entre la caractéristique $v = f(i)$ du montage et celle du générateur. On retrouverait ainsi le critère de stabilité $R_g < R$.

2. Aspect expérimental.

Le montage est analogue au précédent, les bornes + et - de l'A.O. ayant été permutées.

1^{re} manipulation : On fixe $R_0 = 500 \Omega$, $R = 1000 \Omega$. On est dans le cas $R_g < R$. Comme précédemment, on peut observer $v = f(i)$ et v_s .

2^e manipulation : En diminuant la valeur de R , on pourra observer la disparition de l'effet de résistance négative.

III. Comparaison des propriétés des montages 1 et 2.

Le point essentiel est de remarquer que l'on peut passer de la caractéristique $v = f(i)$ propre à un montage à celle de l'autre en permutant les rôles joués par v et i .

La stabilité du montage 1 impose $R_g > R$.

Celle du montage 2 :

$$R_g < R \quad \left(\text{ou} \quad G_g = \frac{1}{R_g} > G = \frac{1}{R} \right).$$

Le montage 1 sera plutôt attaqué par un générateur de courant, le montage 2 plutôt par un générateur de tension.

Ces observations permettent d'affirmer que les deux montages sont duals.

**D) UTILISATION DES PROPRIETES DES MONTAGES
A RESISTANCE NEGATIVE
POUR L'OBTENTION D'OSCILLATIONS QUASI-SINUSOIDALES**

L'idée est d'utiliser l'effet de résistance négative des montages étudiés précédemment pour compenser l'amortissement d'un circuit oscillant.

I. Association d'un circuit R_g , L , C série et du montage 1.**1. Description du montage.**

On associe au circuit R_g , L , C série le montage 1 (on continue à supposer $R_1 = R_2$) dont la caractéristique $v = f(i)$ a été dessinée fig. 3.

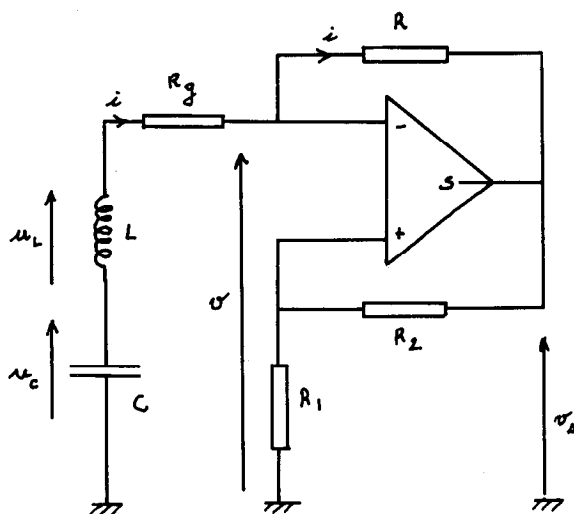


Fig. 9

Pour $-\frac{V_{sat}}{2R} < i < \frac{V_{sat}}{2R}$, l'A.O. est en régime linéaire et $v = -Ri$.

Pour $i > \frac{V_{sat}}{2R}$, l'A.O. est en saturation basse :
 $v = Ri - V_{sat}$.

Pour $i < -\frac{V_{sat}}{2R}$, l'A.O. est en saturation haute :
 $v = Ri + V_{sat}$.

2. Amorçage des oscillations.

L'étude de l'amorçage des oscillations est une étude de stabilité et on pourrait reprendre l'étude du B.I. Il suffit de remplacer dans les formules du B.II.1. R_g par $\underline{Z}_g$. On obtient alors, dans le cas $R_1 = R_2$,

$$\underline{H}_1 = \frac{-2R}{(\underline{Z}_g - R) + \frac{2}{\mu_0} (\underline{Z}_g + R) \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0}\right)}.$$

On s'aperçoit alors que si le terme en $\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0}\right)$ est fon-

damental lorsque $\underline{Z}_g$ est réel (c'est celui qui conduit à l'équation différentielle du B.I.2.); par contre, lorsque $\underline{Z}_g$ est complexe, les termes de type $jL\omega$ vont être prépondérants par rapport à $\frac{2}{\mu_0} (R_g + R) j \frac{\omega}{\omega_0}$ et donc le terme à retenir pour l'étude de la stabilité est $\underline{Z}_g - R$; autrement dit le R_g, L, C série plus la résistance négative simulée.

Supposons qu'à $t = 0$, i soit différent mais voisin de zéro et écrivons l'équation différentielle vérifiée par i :

$$v = u_C + u_L - R_g i \quad \text{avec} \quad i = -C \frac{du_C}{dt} \quad \text{et} \quad u_L = -L \frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{i}{C} - L \frac{d^2 i}{dt^2} - R_g \frac{di}{dt}$$

i étant voisin de zéro, la caractéristique indique que l'A.O. se

trouve en régime linéaire : $v = -Ri \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -R \frac{di}{dt}$.

D'où l'équation différentielle :

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + (R_g - R) \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0.$$

* Pour $(R_g - R) > 0$, on obtiendra un régime amorti et donc pas d'oscillations entretenues.

* La condition $(R_g - R) = 0$ qui, seule, donnerait des oscillations sinusoïdales, ne peut être vérifiée rigoureusement à tout instant. Elle ne correspond donc pas à la réalité.

* Le seul cas intéressant à envisager est donc celui où $(R_g - R) < 0$.

On posera : $\omega_0'^2 = \frac{1}{LC}$; $\frac{R_g - R}{L} = -2\alpha\omega_0'$ avec $\alpha > 0$.

On peut alors écrire :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} - 2\alpha\omega_0' \frac{di}{dt} + \omega_0'^2 i = 0.$$

Pour ne pas être trop éloigné de la condition idéale $(R_g - R) = 0$, on supposera par la suite $\alpha \ll 1$.

L'équation caractéristique $p^2 - 2\alpha\omega_0 p + \omega_0^2 = 0$ conduit à $p_{\pm} = \alpha\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\alpha^2}$ soit $p_{\pm} \sim \alpha\omega_0 \pm j\omega_0$ si $\alpha \ll 1$.

D'où l'expression de i :

$$i = e^{\alpha\omega_0 t} [A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t]$$

les constantes A et B étant déterminées à partir des conditions initiales.

On obtient ainsi des oscillations sinusoïdales dont l'amplitude croît exponentiellement en fonction du temps : c'est le phénomène d'amorçage des oscillations.

Mais ceci suppose un fonctionnement linéaire de l'A.O. et

$$\text{donc } -\frac{V_{sat}}{2R} < i < \frac{V_{sat}}{2R}.$$

Tôt ou tard, i atteindra l'une de ces valeurs limites. Pour la suite du raisonnement, supposons par exemple que i atteigne la

valeur $\frac{V_{sat}}{2R}$ à un instant t_0 . L'allure des variations de i est représentée sur la figure ci-après.

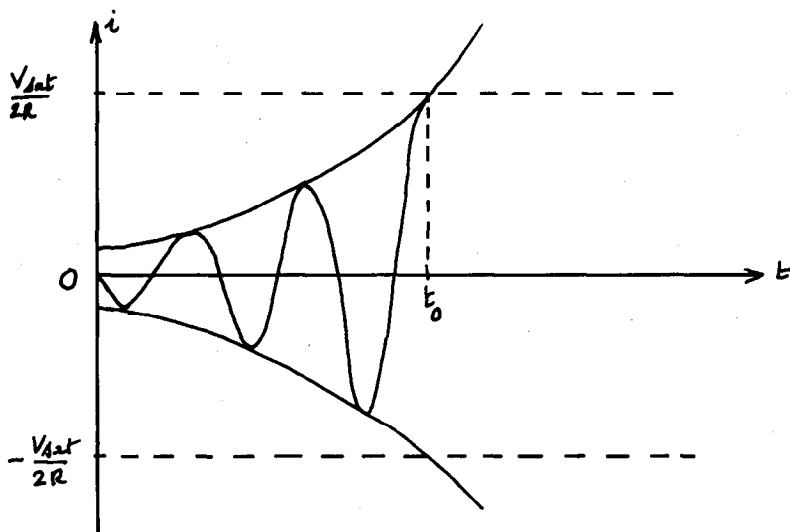


Fig. 10

3. Entretien des oscillations.

A partir de l'instant t_0 , l'A.O. ne fonctionne plus en régime linéaire mais en saturation basse : $v_s = -V_{sat}$

$$\Rightarrow v = Ri - V_{sat} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = R \frac{di}{dt}.$$

On en déduit la nouvelle équation différentielle vérifiée par i :

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + (R_g + R) \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0.$$

Dans tous les cas, cette équation différentielle correspond à un régime amorti tel que tôt ou tard i finisse par tendre vers zéro ; en réalité i va repasser par la valeur $\frac{V_{sat}}{2R}$ en décroissant et l'A.O. va revenir en régime linéaire (soit t'_0 l'instant correspondant).

Pour obtenir l'allure des variations de i durant cet intervalle de temps (t_0, t'_0) , examinons les conditions de continuité imposées par le circuit :

- * la présence de la bobine impose la continuité de i ;
- * la caractéristique $v = f(i)$ impose la continuité de v lorsque i est continue ;
- * la présence de la capacité impose la continuité de u_C ;
- * l'équation $v = u_C + u_L - R_g i$, valable dans tous les cas

où v, u_C, i sont continues impose la continuité de u_L donc de $\frac{di}{dt}$;

- * enfin si $\frac{di}{dt}$ est continue, la caractéristique $v = f(i)$ in-

dique que $\frac{dv}{dt}$ est discontinu.

Ainsi, en particulier aux instants t_0 et t'_0 , i et $\frac{di}{dt}$ doivent être continues.

Pour que les oscillations que l'on va finir par obtenir puissent être assimilées à des oscillations sinusoïdales, il faut que l'inter-

valle de temps $[t_0, t'_0]$ reste petit devant la période $T'_0 = \frac{2\pi}{\omega'_0}$ et que la valeur du maximum obtenu soit voisin de $\frac{V_{sat}}{2R}$.

Ces conditions seront remplies si, comme on l'a supposé précédemment, $\alpha \ll 1$.

La fig. 11 donne l'allure des variations de i sur l'intervalle $[t_0, t'_0]$.

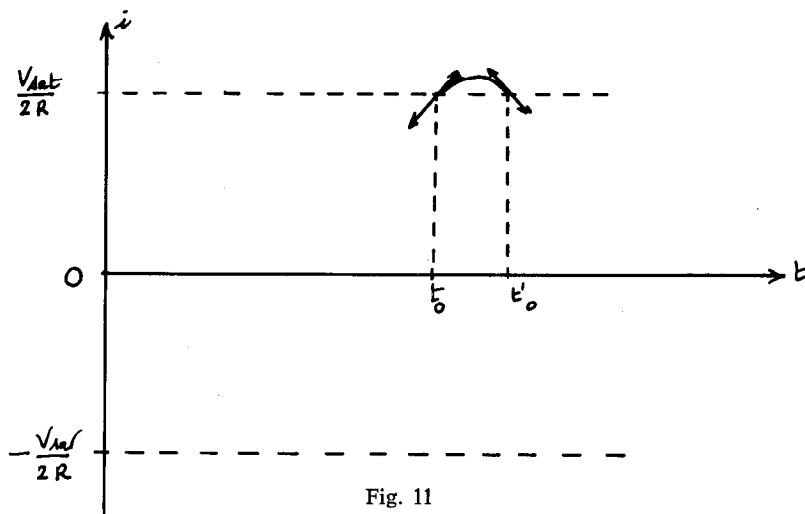


Fig. 11

Pour $t > t'_0$, on revient à un régime linéaire et donc à une solution du type $i = e^{\alpha \omega'_0 t} [A' \cos \omega'_0 t + B' \sin \omega'_0 t]$, A' et B' pouvant être déterminées par continuité de i et $\frac{di}{dt}$ à $t = t'_0$.

Cette fonction, que l'on pourrait représenter pour $t < t'_0$ est passée par un maximum supérieur à $\frac{V_{sat}}{2R}$, et donc du fait de la présence du terme $e^{\alpha \omega'_0 t}$ va passer par un maximum inférieur à $-\frac{V_{sat}}{2R}$, l'intervalle de temps entre ces deux passages étant de l'ordre de $\frac{T'_0}{2}$.

En réalité, dès que $i = -\frac{V_{sat}}{2R}$, le fonctionnement linéaire

cesse, l'A.O. se trouve en saturation haute et on retrouve un mode de fonctionnement analogue à celui observé entre t_0 et t'_0 .

Ainsi, un régime permanent finit par s'établir ; la durée des phases où l'A.O. fonctionne en régime linéaire est de l'ordre

de $\frac{T'_0}{2}$ et, durant celles-ci, i est de la forme :

$$i = e^{\alpha \omega'_0 t} [A \cos \omega'_0 t + B \sin \omega'_0 t].$$

Si, durant ces phases, on ne veut pas que l'influence du terme $e^{\alpha \omega'_0 t}$ soit trop importante, il faut considérer :

$$\alpha \omega'_0 \frac{T'_0}{2} \ll 1$$

car alors $e^{\alpha \omega'_0 t} \sim 1 \quad \forall \quad 0 < t < \frac{T'_0}{2}$. Ceci suppose $\alpha \ll \frac{1}{\pi}$; on retrouve la condition de départ $\alpha \ll 1$.

Sur la fig. 12, on a représenté l'allure des variations de i en fonction du temps.

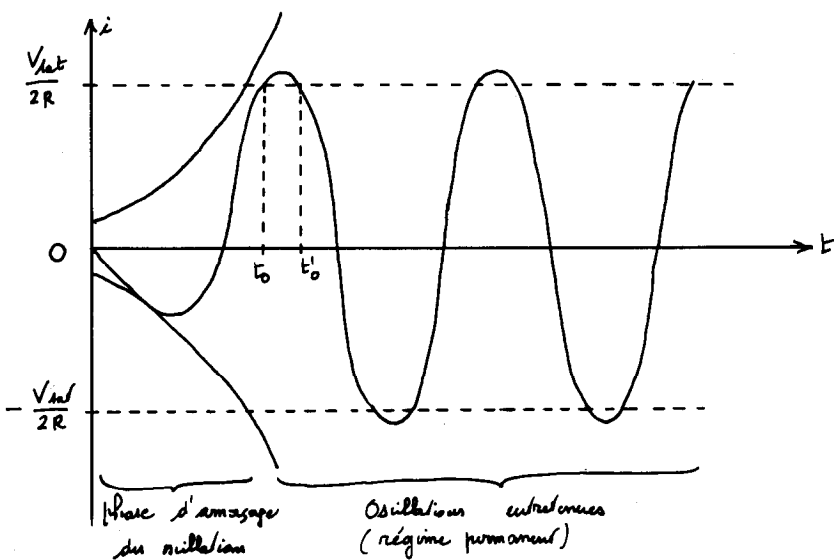


Fig. 12

On peut, à partir de là, passer à la représentation des variations de v en fonction du temps :

$$* \text{ pour } -\frac{V_{sat}}{2R} < i < \frac{V_{sat}}{2R} : \quad v = -Ri,$$

$$* \text{ pour } i > \frac{V_{sat}}{2R} : \quad v = Ri - V_{sat},$$

$$* \text{ pour } i < -\frac{V_{sat}}{2R} : \quad v = Ri + V_{sat}.$$

Il apparaît ainsi que si v est bien continue, $\frac{dv}{dt}$ ne l'est pas.

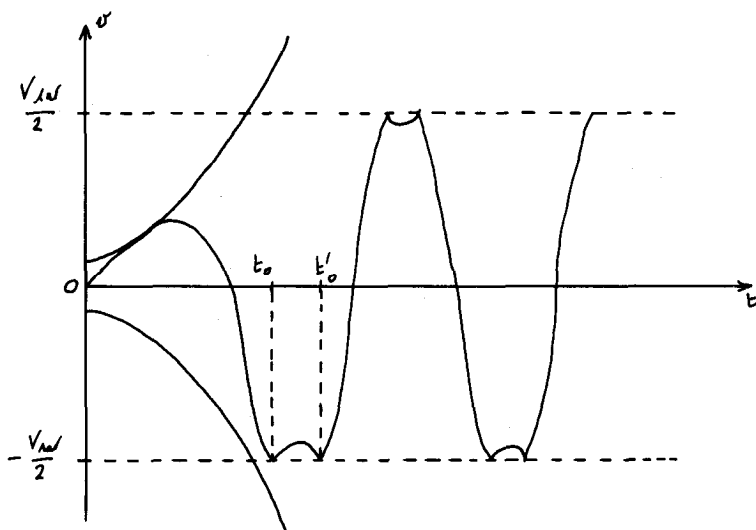


Fig. 13

4. Aspect expérimental.

On peut observer sur l'oscilloscope $u_{Rg} = -R_g i$ et vérifier que, pour R légèrement supérieur à R_g , les oscillations prennent naissance (en utilisant des boîtes A.O.I.P. pour R , la valeur de R à partir de laquelle l'amorçage se fait peut être déterminée à $0,1 \Omega$ près, ce qui laisse le temps d'observer cette phase).

En mesurant leur période T'_0 , on pourra vérifier la relation $LC\omega_0'^2 = 1$.

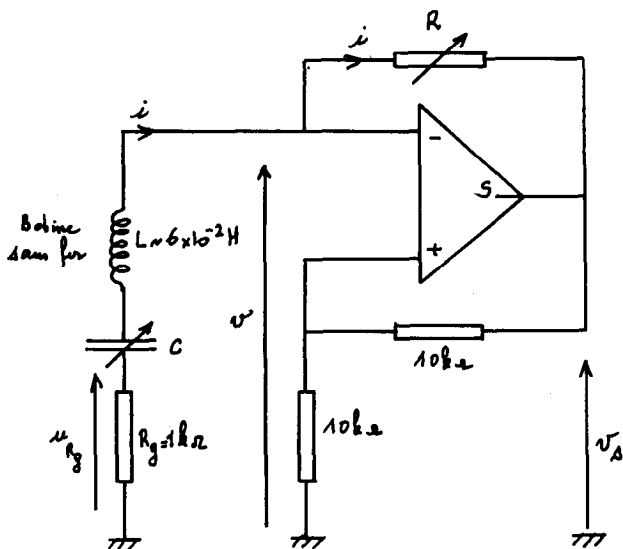


Fig. 14

En augmentant plus que nécessaire la valeur de R , on observera la distorsion du signal (la condition $\alpha \ll 1$ n'est plus respectée).

On peut également observer en XY la caractéristique $v = f(i)$ ou v_s pour déterminer le mode de fonctionnement de l'A.O.

Ce montage fonctionne pour des valeurs de C pouvant varier de quelques μF à environ $10^{-2} \mu\text{F}$ (soit en fréquence d'environ 200 à 3 000 Hz).

Nous avons observé que la valeur minimale de R pour laquelle les oscillations s'amorcent, augmente avec la fréquence de celles-ci (en valeur relative cette augmentation est de l'ordre de 4 % entre 200 Hz et 3 000 Hz). Cette augmentation est probablement due à l'influence de l'effet de peau sur la résistance de la bobine utilisée, celle-ci étant constituée par un fil de diamètre assez important ($\sim 1 \text{ mm}$) (*).

Par ailleurs, on pourra s'étonner de la présence dans le montage d'une résistance R_g de valeur importante, mais R devant être du même ordre que R_g , ceci permet de maintenir le courant de sortie de l'A.O. à une valeur inférieure à j_0 .

5. Remarque.

Si l'analyse de l'amorçage et de la stabilisation de l'amplitude des oscillations se fait assez bien « avec les mains », la détermination des courants d'intégration $A, B, A', B', \dots$ à partir

des conditions de continuité portant sur i et $\frac{d_i}{d_t}$ à $t_0, t'_0 \dots$ semble plutôt ardue. Par contre, une simulation sur ordinateur serait probablement plus efficace en particulier pour étudier l'influence de α .

II. Association d'un circuit R_g, L, C parallèle et du montage 2.

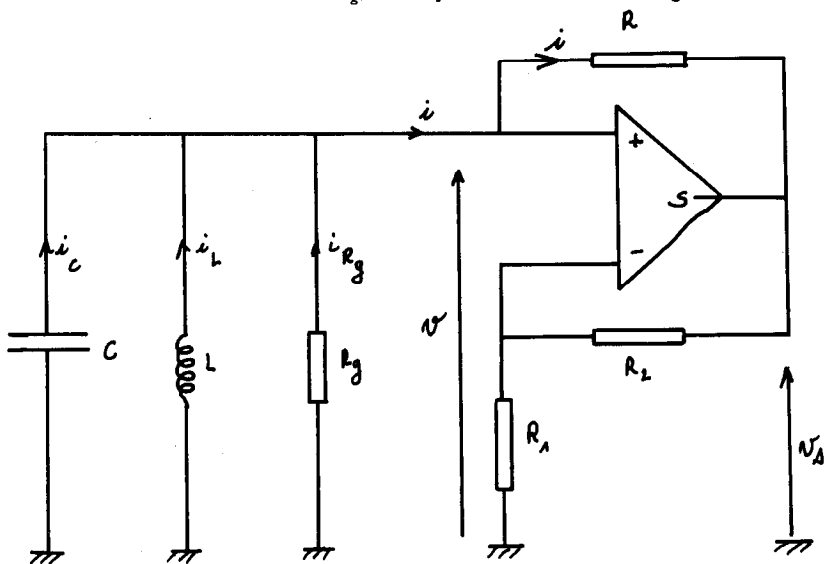
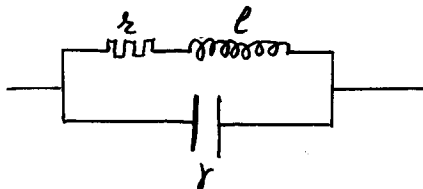


Fig. 15

On associe au circuit R_g, L, C parallèle le montage 2 (qui est dual du montage 1).

(*) *N.D.L.R.* — Si l'on admet que le modèle large bande de la bobine est représenté par le schéma ci-après :



alors l'élément $R(\omega)$ du modèle bande étroite :



varie aux basses fréquences comme $r(1 + 2l\gamma\omega^2)$.

Pour le circuit R_g, L, C parallèle

$$i = i_C + i_L + i_{R_g}$$

$$\text{avec } i_C = -C \frac{dv}{dt}; \quad v = -L \frac{di_L}{dt}; \quad i_{R_g} = -\frac{v}{R_g}.$$

Pour l'A.O. en régime linéaire :

$$i = -\frac{v}{R} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{1}{R} \frac{dv}{dt}.$$

(A $t = 0$, on suppose v différent mais voisin de zéro).

D'où l'équation différentielle vérifiée par v :

$$C \frac{d^2v}{dt^2} + \left(\frac{1}{R_g} - \frac{1}{R} \right) \frac{dv}{dt} + \frac{v}{L} = 0.$$

L'amorçage des oscillations se produira si :

$$\left(\frac{1}{R_g} - \frac{1}{R} \right) < 0 \Rightarrow R_g > R.$$

On peut remarquer que l'ensemble des circuits étudiés (série + montage 1, parallèle + montage 2) sont duals : il est donc inutile de poursuivre. Il suffit, dans l'étude précédente, d'inverser les rôles joués par v et i pour obtenir les résultats concernant cette association.

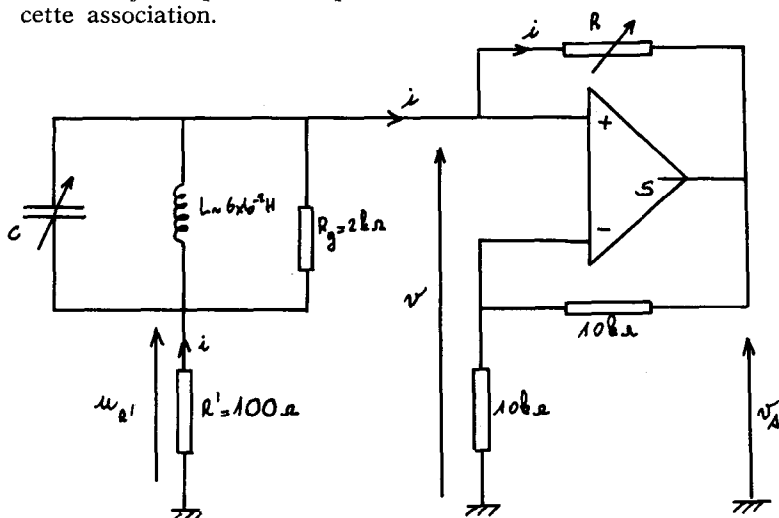


Fig. 16

La résistance R' permet de visualiser $u_{R'} = -R'i$ et donc une grandeur proportionnelle à i . Pour le reste, on pourra effectuer les mêmes observations que précédemment.

III. Choix des associations.

On vient de montrer que l'association circuit série + montage 1 (ou circuit parallèle + montage 2) conduit, dans certaines conditions, à des oscillations.

On peut alors se poser la question suivante : que se passe-t-il si l'on associe le circuit série et le montage 2 (ou le circuit parallèle et le montage 1) ? L'expérience montre que dans les deux cas l'A.O. est en saturation et y reste : il n'y a plus d'oscillation.

Analysons le premier cas possible : association du circuit série et du montage 2 (l'analyse du second cas pourra être faite par dualité).

La présence de la bobine dans le circuit série impose de choisir $i = 0$ comme condition initiale, or en se reportant aux caractéristiques des montages 1 et 2 on peut faire les constatations suivantes :

* $i = 0$ impose $v = 0$ pour le montage 1 d'où l'étude menée précédemment ;

* $i = 0$ n'impose pas $v = 0$ pour le montage 2 mais permet également $v = V_{sat}$ ou $v = -V_{sat}$. La condition $i = 0$ peut être obtenue en insérant en série avec R_g un interrupteur ouvert, ce qui revient à considérer dans un premier temps que $R_g \rightarrow \infty$.

En revenant aux coefficients β' et β'' du montage 2 (B.II.2) :

$$\beta' = \frac{R_g}{R_g + R} \sim 1; \quad \beta'' = \frac{R_1}{R_1 + R_2} < 1 \dots$$

$$\dots \forall R_1 \text{ et } R_2 \left(= \frac{1}{2} \text{ si } R_1 = R_2 \right).$$

On a donc $\beta' > \beta''$: la réaction positive l'emporte sur la réaction négative. On observera donc $v = V_{sat}$ ou $v = -V_{sat}$ le type de saturation obtenue (haute ou basse) dépendant du signe des grandeurs de décalage propres à l'A.O. (tension et courants).

La fermeture de l'interrupteur ne changera rien à la situation : on conservera $i = 0$ et $v = V_{sat}$ ou $v = -V_{sat}$. Dans ce cas, la stabilité du système interdit l'amorçage des oscillations.

La condition, résistance totale du circuit $(R_g + R) < 0$, est donc insuffisante pour l'amorçage des oscillations ; il faut de

plus qu'il n'existe pas dans la zone d'amortissement de la caractéristique (nécessaire à la stabilisation des oscillations) de possibilité d'état de repos stable. C'est pourquoi, si l'association série montage 1 peut donner des oscillations, l'association série montage 2 n'en donne pas.

E) COMPLEMENT : INFLUENCE DE LA LIMITATION DU COURANT DE SORTIE DE L'A.O.

(d'après des indications de M. Moreau)

Nous avons signalé en cours de route que les valeurs des résistances utilisées dans les montages permettaient de maintenir le courant de sortie j de l'A.O. en dessous de sa valeur limite ($|j| \leq j_0$ avec $j_0 \sim 20$ mA).

Ceci conduit à une situation un peu paradoxale : on introduit un amortissement supplémentaire dans un dispositif où l'on souhaite justement se débarrasser de tout amortissement.

On peut éviter cette situation en procédant de la façon suivante (fig. 17) : on choisit la valeur de R_0 de telle façon que j ne

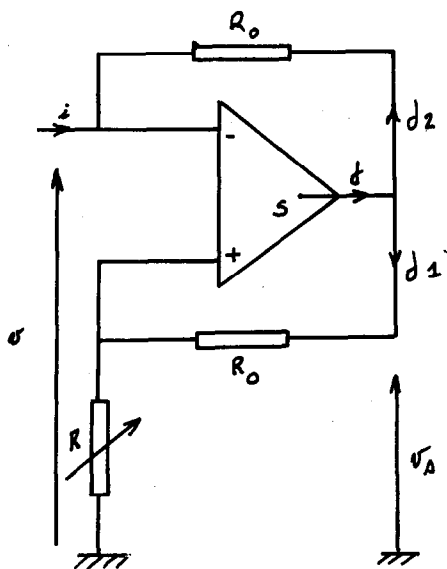


Fig. 17

puisse atteindre j_0 . Les valeurs de j_1 et j_2 étant toujours inférieures à $\frac{V_{sat}}{R_0}$, j sera toujours inférieur à $\frac{2 V_{sat}}{R_0}$.

On choisit alors R_0 telle que :

$$\frac{2 V_{sat}}{R_0} < j_0 \Rightarrow R_0 > \frac{2 V_{sat}}{j_0}.$$

Avec $j_0 \sim 20$ mA et $V_{sat} \sim 14$ V $\Rightarrow R_0 > 1,4$ k Ω . On pourra choisir : $R_0 = 1,5$ k Ω ou 2,2 k Ω .

La caractéristique du montage 1 devient celle représentée sur la fig. ci-après.

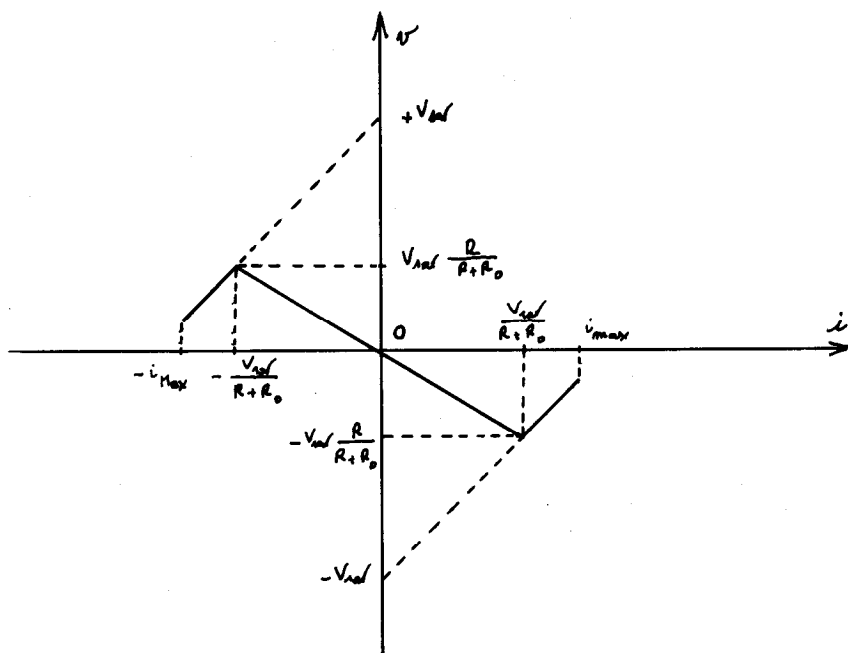


Fig. 18

L'effet de résistance négative est conservé et on a toujours $R_n = -R$. La condition de stabilité est également inchangée : $\beta'' > \beta' \Rightarrow R_g > R$.

L'amplitude des oscillations sinusoïdales obtenues par asso-

ciation avec le circuit série sera égale à $\frac{V_{sat}}{R + R_0}$ au lieu de $\frac{V_{sat}}{2R}$.

On pourra bien entendu procéder de la même façon pour le montage 2.

F) CONCLUSION

Nous souhaitons remercier Monsieur MOREAU pour les conseils qu'il nous a donnés et qui nous ont permis de mener à son terme la rédaction de cet article.
