

Le calcul des incertitudes

par H. GIÉ et R. MOREAU.

Après avoir constitué pendant des décennies dans notre Enseignement secondaire un « morceau de choix » quasi incontournable, le calcul des incertitudes subit actuellement une sorte de traversée du désert et l'on brûle ce que l'on a adoré la veille. Le présent article se propose de présenter une étude de fond du sujet susceptible de servir de référence pour ensuite adopter une démarche pédagogique appropriée selon les différents niveaux d'enseignement.

Il est vrai que notre vieux calcul d'incertitudes, quelque peu sacralisé, était devenu une sorte de rite dont on négligeait de donner toute interprétation sur le fond. Le « dogme » des encadrements conduisait parfois à des invraisemblances d'où des critiques fondées. Egalement, la distinction entre erreurs aléatoires et erreurs systématiques, bien que soulignée, était mal intégrée au niveau du calcul. Enfin, la discrétion était de mise quant à l'estimation des diverses erreurs évoquées. En définitive, on pratiquait un mode de calcul dont le soubassement était loin d'être clarifié. Le culte du calcul évitait d'avoir à réfléchir et à se prononcer sur le fond.

Un tournant s'est amorcé, il y a quelques années, donnant à la théorie probabiliste une place de choix [1]. Mais on risquait, *a contrario*, un engouement injustifié pour le « tout probabiliste ». En effet, il est nécessaire de garder à l'esprit qu'on ne dispose, en général, que d'un nombre limité de résultats de mesures, et qu'en outre, les lois statistiques supposées gouverner les erreurs de mesures sont, *a priori*, inconnues, du moins dans un grand nombre de cas. Il importe donc d'utiliser un outil d'évaluation s'accommodant autant que possible de cette ignorance.

Le souhait de chacun serait de disposer d'une technique de traitement unique s'adaptant à la diversité des situations. Récemment, divers auteurs, dont MÜLLER particulièrement [2], ont montré que la loi classique dite de « propagation des erreurs »

fournissait un formalisme d'utilisation très riche permettant de traiter une grande variété de cas. En particulier, on est conduit à clarifier la distinction faite entre erreurs aléatoires et erreurs systématiques.

Dans ce cadre, nous allons développer la technique de calcul qui se fonde sur la loi de propagation des erreurs puis l'illustrer par divers exemples se référant à des cas usuellement rencontrés lors de séances de manipulations. Nous insisterons, en particulier, sur la recherche des meilleurs estimateurs des valeurs des grandeurs mesurées et de leurs « incertitudes ».

I. VOCABULAIRE ET NOTATIONS.

Le vocabulaire utilisé est celui du calcul des probabilités.

* Nous distinguerons la variable aléatoire (v. a.) noté x qui représente les mesures expérimentales d'une grandeur physique G et une valeur particulière, notée \hat{x} , que peut prendre x lors d'un mesurage particulier.

* L'espérance mathématique $E(x)$ de la v. a. x sera notée X . Si $X = 0$, la v. a. x est dite centrée.

La différence $\Delta x = x - X$ sera appelée *écart*. L'écart traduit l'existence des *erreurs aléatoires* de mesure. Noter que X est *a priori* inconnue. Par définition même, $E(\Delta x) = 0$; la v. a. Δx est centrée.

* La variance σ_x^2 de x est définie par $\sigma_x^2 = E(\Delta x^2)$. On note que x et Δx ont même variance.

σ_x définit l'*écart-type* de x . C'est une mesure de l'*incertitude* sur x , d'où l'importance de l'évaluation de σ_x .

La *covariance* des deux v. a. x_i et x_j est définie par $\sigma_{x_i x_j} = E(\Delta x_i \cdot \Delta x_j)$ qu'on notera plus simplement σ_{ij} , les variances correspondantes étant notées σ_i^2 et σ_j^2 .

II. LOI DE PROPAGATION DES ERREURS BASE DU CALCUL DES INCERTITUDES.

II.1. Formule de propagation des erreurs.

Nous considérons une fonction $x = F(x_1, x_2 \dots x_n)$ des n v. a. x_1, x_2, \dots, x_n qui représentent les mesures des grandeurs physiques G_1, G_2, \dots, G_n . Les erreurs de mesures sont caractérisées par les écarts inconnus $\Delta x_1 = x_1 - X_1, \Delta x_2 = x_2 - X_2, \dots, \Delta x_n = x_n - X_n$.

Ces écarts, que nous supposons petits ($|\Delta x_i| \ll |X_i|$), entraînent pour x un écart Δx , soit *au second ordre près* :

$$\Delta x = \sum_{i=1}^n f_i \Delta x_i \quad \text{avec} \quad f_i = \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_{x_i = X_i} \quad (1)$$

Les écarts Δx_i sont tels que $E(\Delta x_i) = 0$ (v. a. centrées), de sorte que :

$$E(\Delta x) = \sum_{i=1}^n f_i E(\Delta x_i) = 0$$

Δx est aussi une v. a. centrée.

La variance σ_x^2 a pour valeur :

$$\sigma_x^2 = E(\Delta x^2)$$

avec :

$$\Delta x^2 = \sum_{i=1}^n (f_i \Delta x_i)^2 + \sum_{i=1}^n f_i \Delta x_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_j \Delta x_j \quad (2)$$

Posant :

$$\sigma_i^2 = E(\Delta x_i)^2 \quad \text{et} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} = E(\Delta x_i \Delta x_j)$$

il vient, en utilisant (2) :

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^n (f_i \sigma_i)^2 + 2 \sum_{\substack{i, j > i \\ 1}}^n f_i f_j \sigma_{ij} \quad (3)$$

La relation (3) exprime la loi dite de « propagation des erreurs » en ce sens qu'elle indique comment les erreurs Δx_j se répercutent, se *propagent*, sur la variable x . Il importe aussi de se rappeler que (3) néglige les termes d'ordre supérieur à 1 dans Δx .

On définit le *coefficient de corrélation* ρ_{ij} des variables aléatoires x_i et x_j par :

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \quad (4)$$

On montre que :

$$-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$$

ρ_{ij} indique la plus ou moins grande corrélation des v. a. x_i et x_j entre elles. Toutefois, l'interprétation n'est simple que si x_i et x_j obéissent à des lois de probabilité normales (ou de Gauss).

Dans ce cas, $|\varrho_{ij}| = 1$ traduit une dépendance fonctionnelle linéaire entre x_i et x_j , donc une totale corrélation. A l'opposé, $\varrho_{ij} = 0$ correspond à des v. a. x_i et x_j indépendantes entre elles.

Dans le cas de deux variables, (3) donne :

$$\sigma_x^2 = f_1^2 \sigma_1^2 + f_2^2 \sigma_2^2 + 2 f_1 f_2 \sigma_{12} \quad (5)$$

avec les cas particuliers :

$$\sigma_x^2 = f_1^2 \sigma_1^2 + f_2^2 \sigma_2^2 \quad \text{si } \varrho_{12} = 0 \quad (6)$$

et :

$$\sigma_x^2 = (f_1 \sigma_1 \pm f_2 \sigma_2)^2 \quad \text{si } |\varrho_{12}| = 1. \quad (7)$$

Remarque.

La relation (6), dite *d'addition quadratique* est à rapprocher de l'addition des intensités en Optique, soit $I = I_1 + I_2$ pour des signaux lumineux incohérents, c'est-à-dire non corrélés.

Au contraire, la relation (7) est de type « addition des amplitudes » à rapprocher, en Optique, du principe des interférences concernant les signaux totalement cohérents.

Cette remarque se généralise facilement à un nombre quelconque de variables x_i .

On notera fondamentalement que le calcul des σ_i^2 et des σ_{ij} suppose connues les lois de probabilités qui gouvernent les v. a. x_i . Les écarts Δx_i caractérisent ici les imperfections des mesures et il n'y a aucune raison, en général, pour connaître, *a priori*, ces lois de probabilités. Il faudra donc substituer, à la place des σ_i^2 et des σ_{ij} qui restent inconnus, des estimateurs fiables de ces quantités. Nous noterons respectivement \hat{S}_i^2 (à la place de σ_i^2) et \hat{S}_{ij} (à la place de σ_{ij}) ces estimateurs.

La recherche de tels estimateurs constitue, en fait, un travail essentiel dans ce qu'il est convenu d'appeler le « calcul d'incertitudes ».

On est ainsi conduit à calculer un estimateur \hat{S}_x^2 de σ_x^2 qui évalue l'incertitude sur x .

La relation (3) se transpose ainsi en :

$$\hat{S}_x^2 = \sum_{i=1}^n (f_i \hat{S}_i)^2 + 2 \sum_{\substack{i, j > i \\ 1}}^n f_i f_j \hat{S}_{ij} \quad (8)$$

relation qui servira à la pratique du calcul d'incertitudes.

II.2. Cas particuliers.

A titre d'illustration, nous allons examiner des cas particuliers importants d'application de (8).

1) x est fonction affine des x_i , soit :

$$x = \sum_{i=1}^n f_i x_i + f_0$$

où f_i et f_0 sont des constantes.

On note que les coefficients f_i ($i \neq 0$) sont bien ceux définis précédemment par (1). Les relations (3) ou (8) s'appliquent donc directement.

Un cas usuel est celui d'une somme :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i \quad (f_i = 1)$$

d'où :

$$\hat{S}_x^2 = \sum_{i=1}^n \hat{S}_i^2 + 2 \sum_{\substack{i, j > i \\ 1}}^n \hat{S}_{ij}. \quad (9)$$

Si les \hat{S}_{ij} sont nuls, on obtient la relation d'addition quadratique :

$$\hat{S}_x^2 = \sum_{i=1}^n \hat{S}_i^2 \quad (10)$$

qui est d'un usage fréquent mais dont il importe de garder à l'esprit les conditions d'application.

On notera aussi que le cas linéaire ne suppose pas nécessairement l'hypothèse $|\Delta x_i| \ll X_i$.

2) x est un produit de la forme :

$$x = \prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i}$$

où les λ_i sont des exposants constants.

Posant : $y = \ln x$ et $y_i = \ln x_i$, il vient :

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \lambda_i \Delta y_i$$

avec $\Delta y = \frac{\Delta x}{X}$ et $\Delta y_i = \frac{\Delta x_i}{X_i}$, en supposant que $|\Delta x_i| \ll |X_i|$.

On est ainsi ramené au cas 1) précédent avec $f_i = \lambda_i$, à condition de considérer les *écarts relatifs* Δy et Δy_i .

Dans le cas usuel du produit simple :

$$x = \prod_{i=1}^n x_i$$

on obtient :

$$\hat{S}_y^2 = \sum_{i=1}^n \hat{S}_{y_i}^2 + 2 \sum_{\substack{i, j > i \\ 1}}^n \hat{S}_{y_i y_j} \quad (11)$$

avec :

$$\hat{S}_y = \frac{\hat{S}_x}{X}, \quad \hat{S}_{y_i} = \frac{\hat{S}_{x_i}}{X_i}, \quad \hat{S}_{y_i y_j} = \frac{\hat{S}_{x_i x_j}}{X_i X_j}$$

où les X_i ainsi que X qui figurent aux dénominateurs sont les valeurs centrales ou « valeurs vraies ».

Si les $\hat{S}_{x_i x_j}$ sont nuls :

$$\hat{S}_y^2 = \sum_{i=1}^n \hat{S}_{y_i}^2$$

qui exprime l'addition quadratique des écarts relatifs.

Dans les cas particuliers du produit $x = x_1 x_2$ ou du quotient $x = \frac{x_1}{x_2}$,

$$\frac{\hat{S}_x^2}{X^2} = \frac{\hat{S}_{x_1}^2}{X_1^2} + \frac{\hat{S}_{x_2}^2}{X_2^2} \pm 2 \frac{\hat{S}_{x_1 x_2}}{X_1 X_2} \quad (12)$$

Les signes + et - correspondent respectivement au produit et au quotient.

Si $|\rho_{12}| = 1$: $\hat{S}_{x_1 x_2} = \pm \hat{S}_{x_1} \hat{S}_{x_2}$ de sorte que dans ce cas :

$$\frac{\hat{S}_x^2}{X^2} = \left(\frac{\hat{S}_{x_1}}{X_1} \pm \frac{\hat{S}_{x_2}}{X_2} \right)^2 \quad (13)$$

type de relation qui évoque le « vieux » calcul des incertitudes.

Si $e_{12} = 0$:

$$\frac{\hat{S}_x^2}{X^2} = \frac{\hat{S}_{x_1}^2}{X_1^2} + \frac{\hat{S}_{x_2}^2}{X_2^2} \quad (14)$$

II.3. Notation matricielle.

Il est parfois commode d'écrire la loi de propagation des erreurs (3) ou (8) sous une forme plus compacte grâce au formalisme matriciel.

On introduit ainsi la *matrice des variances* :

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \dots \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est symétrique.

On introduira de même la matrice (\hat{S}) des estimateurs en remplaçant les σ_i^2 et les σ_{ij} par leurs estimateurs respectifs \hat{S}_i^2 et \hat{S}_{ij} .

La relation (3) s'écrit ainsi :

$$\sigma_x^2 = (f)(\sigma)(f)^t \quad (15)$$

et de même (8) :

$$\hat{S}_x^2 = (f)(\hat{S})(f)^t \quad (16)$$

où (f) est la matrice ligne construite avec les coefficients f_i et (f)^t la matrice colonne transposée de (f).

L'application pratique de la loi de propagation des erreurs (8) ou des relations particulières qui en découlent se ramène donc, comme nous l'avons souligné, au choix d'estimateurs. Cette recherche constitue un pôle important du calcul d'incertitudes. La démarche proposée a l'avantage de fournir un mode de traitement assez général et utilisable dans des situations très variées. Elle met l'accent, en particulier, sur l'incidence des corrélations.

III. ERREURS ALEATOIRES ET ERREURS SYSTEMATIQUES.

Rappelons tout d'abord que par erreur systématique, on entend l'intervention d'une même cause perturbant un ensemble

de mesures. On peut évoquer, par exemple, l'étalonnage défec-
tueux d'un même appareil de mesure, l'intervention en cours
d'expérience d'une variation d'un paramètre physique tel que la
température, un même défaut de réglage, etc.

Nous supposons que l'effet de cette cause systématique d'er-
reur est, *a priori*, *inconnu*. Nous excluons donc ici les cas
d'erreurs parfaitement calculables et dont on pourrait tenir
compte si la précision des mesures l'exigeait. Ainsi, pour citer un
exemple banal, dans une mesure de résistance « longue dériva-
tion » ou « courte dérivation », on peut toujours, en principe,
prendre en compte l'erreur introduite par la présence de l'ampère-
mètre ou du voltmètre.

Pour mieux cerner la question, nous allons considérer un
exemple simple mais tout de même d'application assez générale
et bien propre à analyser la question de la distinction faite entre
erreurs aléatoires et erreurs systématiques.

Supposons qu'on soupçonne un défaut d'étalonnage d'un appa-
reil de mesure. Les mesures x_i sont ainsi affectées, *a priori*, d'une
même cause d'erreur se traduisant par un même décalage a
sur chacune d'elles.

Pour tenir compte de ce décalage, on doit plutôt considérer
les v. a. :

$$z_i = x_i + a$$

conduisant à :

$$z = f(x_1 + a, x_2 + a, \dots, x_n + a) = f(z_1, z_2, \dots, z_n)$$

au lieu de :

$$x = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

d'où l'écart, si a est petit devant les x_i :

$$z - x = \left(\sum_{i=1}^n f_i \right) a$$

au second ordre près.

On peut généralement, considérer a (inconnu) comme v. a.
centrée sur $A = E(a)$ et d'écart-type σ_a .

L'erreur systématique sur x est évaluée par :

$$E(z - x) = \left(\sum_{i=1}^n f_i \right) A.$$

On peut procéder sur la variable z à une analyse de variance
pour évaluer l'écart-type \hat{S}_z qui permet d'estimer l'incertitude
sur z .

On notera que les v. a. z_i sont corrélées par a , corrélation qui s'ajoute aux éventuelles corrélations entre les x_i . Nous supposerons toutefois une absence de corrélation entre les x_i et a conduisant à admettre que :

$$E(\Delta x_i \Delta a) = 0 \quad \text{avec} \quad \Delta a = a - A.$$

Dans ces conditions :

$$E(\Delta z_i^2) = E(\Delta x_i^2) + E(\Delta a^2)$$

soit :

$$\sigma_{z_i^2} = \sigma_{x_i^2} + \sigma_a^2$$

ou, en remplaçant par des estimateurs :

$$\hat{S}_{z_i^2} = \hat{S}_{x_i^2} + \hat{S}_a^2.$$

De même :

$$\hat{S}_{z_i z_j} = \hat{S}_{x_i x_j} + \hat{S}_a^2.$$

La loi (8) de propagation des erreurs donne ainsi :

$$\hat{S}_z^2 = \sum_{i=1}^n f_i^2 (\hat{S}_{x_i^2} + \hat{S}_a^2) + 2 \sum_{\substack{i, j > i \\ 1}}^n f_i f_j (\hat{S}_{x_i x_j} + \hat{S}_a^2)$$

soit en regroupant les termes relatifs aux x_i d'une part et à a d'autre part :

$$\boxed{\hat{S}_z^2 = \hat{S}_x^2 + \left(\sum_{i=1}^n f_i\right)^2 \hat{S}_a^2} \quad (17)$$

relation où apparaît une double contribution :

* \hat{S}_x^2 qui correspond aux erreurs aléatoires sur les mesures x_i ,

* $\left(\sum_{i=1}^n f_i\right)^2 \hat{S}_a^2$ qui correspond à l'erreur systématique a . Le

facteur $\left(\sum_{i=1}^n f_i\right)^2$ est la marque d'un effet de corrélation.

Donnons quelques exemples d'application de (17).

1) Utilisation de la moyenne.

Nous empruntons cet exemple à MÜLLER [2]. Soit n mesures effectives $\hat{x}^{(i)}$ d'une même grandeur G . La moyenne $\bar{\hat{x}}$ de ces n mesures est définie par :

$$\hat{\bar{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{x}^{(i)}.$$

On peut associer à $\hat{\bar{x}}$ et à $\hat{x}^{(i)}$ les v. a. \bar{x} et $x^{(i)}$ telles que :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x^{(i)}. \quad (18)$$

Considérons d'abord le cas où il n'y a pas d'erreurs systématiques. La relation (10) appliquée à (18) donne :

$$\hat{S}_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \hat{S}_{x_i}^2 \quad f_i = \frac{1}{n}$$

les covariances $\hat{S}_{x_i x_j}$ étant supposées ici nulles.

En supposant que les v. a. $x^{(i)}$ ont une même variance estimée \hat{S}^2 :

$$\hat{S}_{\bar{x}}^2 = \frac{\hat{S}^2}{n}$$

soit :

$$\hat{S}_{\bar{x}} = \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}. \quad (19)$$

La relation (19) traduit un résultat très classique concernant l'utilisation de la moyenne dans le cas des seules erreurs aléatoires. L'incertitude $\hat{S}_{\bar{x}}$ sur cette moyenne est réduite par rapport à l'incertitude \hat{S} sur une seule mesure par le facteur $\frac{1}{\sqrt{n}}$, d'où l'intérêt d'effectuer la moyenne d'un grand nombre de mesures indépendantes.

Examinons maintenant l'influence sur la moyenne d'une erreur systématique décrite par une même v. a. a correspondant à un même décalage sur les mesures $x^{(i)}$.

Nous introduisons les v. a. $z^{(i)}$ telles que :

$$z^{(i)} = x^{(i)} + a$$

et
$$\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z^{(i)} = \bar{x} + a.$$

On en déduit :

$$E(\bar{z} - \bar{x}) = E(a) = A$$

qui évalue l'erreur systématique.

Procédons au calcul de la variance sur la v. a. \bar{z} .

Supposant valables les conditions de validité de (17), on obtient :

$$\hat{S}_{\bar{z}}^2 = \hat{S}_{\bar{x}}^2 + \hat{S}_a^2$$

(car $f_i = \frac{1}{n}$ et $\sum_{i=1}^n f_i = 1$), soit encore :

$$\hat{S}_{\bar{z}}^2 = \frac{\hat{S}^2}{n} + \hat{S}_a^2 \quad (20)$$

où \hat{S}^2 se rapporte à chaque variable de $x^{(i)}$.

La relation (20) fait apparaître le terme \hat{S}_a^2 correspondant à l'erreur systématique et indépendant de n . En augmentant n ,

on tend à annuler la contribution $\frac{\hat{S}^2}{n}$ correspondant aux erreurs

aléatoires et $\hat{S}_z \rightarrow \hat{S}_a$ incertitude attachée à l'erreur systématique, incontournable à l'évidence, par la seule répétition des mesures ! La distinction faite classiquement entre les deux types d'erreurs apparaît bien ici.

Remarque.

On peut obtenir directement (20) en considérant \bar{z} comme fonction des $n + 1$ variables indépendantes $x^{(i)}$ et a . La relation (20) traduit alors simplement l'addition quadratique correspondant à des erreurs non corrélées.

2) Considérons maintenant l'exemple (oh combien classique !) de la mesure d'un indice de réfraction par la méthode du « minimum de déviation ». Si A désigne l'angle du prisme et D l'angle de déviation minimale, l'indice n du verre est donné par :

$$n = \frac{\sin [(A + D)/2]}{\sin A/2}$$

Faisons l'hypothèse d'un éventuel décalage a (dû, par exemple, à une erreur de réglage de la plate-forme du goniomètre). Ainsi, il faut considérer $A = A' + a$ et $D = D' + a$.

On a :

$$f_A = \frac{\partial n}{\partial A} = -\frac{1}{2} \frac{\sin D/2}{\sin^2 A/2} \quad \text{et}$$

$$f_D = \frac{\partial n}{\partial D} = \frac{1}{2} \frac{\cos [(A + D)/2]}{\sin A/2}$$

d'où une erreur systématique évaluée par :

$$\left(\sum_{i=1}^n f_i \right) E(a) = (f_A + f_D) E(a).$$

Prenant $A = 60^\circ$ et $n \approx 1,50$, $f_A = -0,638$ et $f_D = 0,661$

d'où :

$$(f_A + f_D) E(a) \approx 2 \cdot 10^{-2} E(a). \quad (21. a)$$

Calculons la variance. Soient \hat{S}_a^2 , \hat{S}_A^2 et \hat{S}_D^2 les variances estimées correspondant respectivement à a , A' et D' . Nous supposerons que :

$$\hat{S}_A^2 = \hat{S}_D^2 = \hat{S}^2$$

et en outre que $\hat{S}_{A'D'} = 0$.

Avec les données numériques précédentes :

$$f_A^2 + f_D^2 = 0,844 \quad \text{et} \quad (f_A + f_D)^2 = 5,7 \cdot 10^{-4}.$$

L'application de la relation (17) donne :

$$\hat{S}_n^2 = 0,844 \hat{S}^2 + 5,7 \cdot 10^{-4} \hat{S}_a^2. \quad (21. b)$$

Si \hat{S} et \hat{S}_a sont du même ordre de grandeur, le terme en \hat{S}_a^2 est pratiquement négligeable, de sorte que :

$$\hat{S}_n \approx 0,92 \hat{S}. \quad (21. c)$$

Comparant à (21. a), on note qu'il faudrait que $|E(a)|$ soit au moins 10 fois plus grand que \hat{S} pour que l'erreur systématique $E(a)$ se fasse sentir.

Dans la pratique, on pourra donc considérer que l'erreur systématique est négligeable et que \hat{S}_n est donné par (21. c).

On comparera au résultat « classique » :

$$\Delta n \approx n \times \frac{1}{2} \cotg \frac{A}{2} \quad \varepsilon \approx 1,3 \varepsilon$$

où ε évaluit l'« incertitude » sur A et D .

Comme nous l'avons souligné, on ne connaît pas, *a priori*, l'erreur systématique que l'on commet sur une mesure et qui est introduite par un défaut d'étalonnage, par la variation intempesive d'un paramètre physique... Sinon, on procéderait à la correction nécessaire.

Ce qui permet de mettre en évidence une (ou plusieurs) erreurs systématiques, c'est la comparaison de la mesure finale d'une grandeur, effectuée avec l'appareillage dont on dispose, la méthode qu'on veut tester... avec une mesure antérieure de la même grandeur, effectuée, par exemple, dans un laboratoire de métrologie, ou avec une valeur théorique connue de cette même grandeur.

C'est ainsi qu'on étalonnera un spectromètre, un capacimètre, un ohmmètre... ou qu'on comparera la valeur trouvée de l'accélération de la pesanteur en un lieu, ou celle de l'intensité du champ magnétique terrestre ou encore la valeur du coefficient de variation de pression d'un gaz à volume constant... à des valeurs connues à l'avance avec une excellente précision.

En général, on ne trouve pas la même valeur que celle que l'on considère comme la mesure de référence.

Si l'on connaît l'écart-type \hat{S}_R de celle-ci et si l'on a estimé l'écart-type \hat{S}_p de sa propre mesure, il arrive que la différence $X_p - X_R$ entre la valeur personnelle et la mesure de référence soit supérieure à $\hat{S}_R + \hat{S}_p$.

En l'absence de toute erreur systématique, cette différence doit tout simplement être attribuée au hasard.

Mais, compte tenu de la forme des lois statistiques affectant X_R et X_p (lois connues ou supposées), de la manière dont ont été évalués \hat{S}_R et \hat{S}_p (et notamment du nombre de mesures *indépendantes* (*) qui ont permis de les estimer), les lois du Khi-deux de PEARSON, de STUDENT-FISHER, de FISHER-SNEDECOR... selon le cas, permettent d'évaluer la probabilité pour qu'une telle différence ne soit pas imputable qu'au hasard... Si, par exemple, en supposant que les lois suivies par X_R et X_p sont gaussiennes, une application judicieuse de la loi de STUDENT permet d'affirmer que la différence $\hat{X}_p - \hat{X}_R$ obtenue n'est susceptible d'être due au hasard qu'avec une probabilité inférieure

(*) Voir à ce sujet l'analyse faite aux paragraphes VII.3 et VII.4, montrant qu'on ne gagne pas en précision en prenant en compte des mesures non indépendantes.

à 10^{-3} , il y a alors tout lieu de considérer que c'est l'existence d'une erreur systématique qui est cause de la différence. Il reste à déterminer la ou les causes de cette erreur systématique [3].

La répétition des mesures indépendantes permet, en général, par comparaison de la valeur finale estimée à une valeur connue, de mettre en évidence de telles erreurs systématiques.

Cette répétition est donc utile puisqu'elle permet, en utilisant la moyenne, de diminuer l'écart-type de l'estimateur final (en gros comme $\frac{1}{\sqrt{n}}$), mais elle a évidemment comme limite

les erreurs systématiques qu'elle permet parfois de dépister.

IV. INTERET ET LIMITES DE LA FORMULE DE PROPAGATION DES ERREURS.

La formule de propagation des erreurs permet, dans de nombreux cas, de mener à bien une réflexion portant sur les incertitudes. Il en est ainsi lorsque l'on cherche à estimer la valeur exacte X d'une grandeur G en ayant procédé aux mesurages préalables de n grandeurs primaires de valeurs exactes mais inconnues) X_i . Si l'on connaît les variances des mesures expérimentales x_i , cette formule permet d'en déduire l'écart-type σ_x de la variable aléatoire $x = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Comme cela a été souligné précédemment, un des problèmes essentiels consiste à estimer correctement les X_i et les variances (et covariances) des x_i mais de plus, on n'est jamais tout à fait certain de connaître la bonne expression $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Il est toujours possible, en effet, d'avoir négligé indûment des variables intervenant dans le mesurage de G . C'est pourquoi, on a intérêt, si on le peut, à recommencer l'opération de mesurage à partir d'autres valeurs indépendantes ($\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n$), de manière à constituer un échantillon de k valeurs de la variable aléatoire $x = F(x_1, \dots, x_n)$, et à contrôler, par un test, la validité des hypothèses portant sur la matrice (σ) et sur la fonction F elle-même.

Soient deux méthodes différentes de mesurage d'une même grandeur G , construites à partir de deux ensembles (x_1, x_2, \dots, x_n) et (x'_1, \dots, x'_n) de mesures primaires. Il arrive souvent que, sans connaître exactement les matrices (σ) et (σ') des variances des deux ensembles de départ, on puisse du moins les comparer ou même construire l'une à partir de l'autre.

Dans ce cas, la connaissance des fonctions $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $F'(X'_1, X'_2, \dots, X'_n)$ conduisant toutes deux, théoriquement, à X ,

permet par application réitérée de la formule de propagation des erreurs, de comparer *a priori*, les précisions des deux méthodes. Il n'est quand même pas mauvais, là encore, de vérifier expérimentalement que les dispersions des résultats autour de valeurs moyennes sont bien telles que le prévoit la théorie.

Nous montrerons plus loin, également, que la formule de propagation des erreurs permet d'aborder le problème de la recherche d'un estimateur unique et définitif de la valeur exacte X , inconnue, d'une grandeur G dont on possède déjà plusieurs mesures ou estimations primaires $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n$.

Toutes les valeurs aléatoires x_1, x_2, \dots, x_n correspondant à ces mesures ont, *a priori*, la même espérance mathématique X , mais leurs variances peuvent différer, elles peuvent être indépendantes ou corrélées, et la recherche d'un estimateur final, correspondant à une variable aléatoire de variance minimale, est un problème intéressant dont la solution est parfois étonnante.

Il ne faut cependant pas perdre de vue que le champ d'application de la formule de propagation des erreurs est limité aux calculs de variances. Cette formule tire sa généralité du fait que ces calculs sont indépendants des formes des lois de probabilité auxquelles obéissent les variables aléatoires x_i . Mais la limitation de ce champ ne permet pas de répondre à tous les problèmes posés par l'existence d'erreurs, et, notamment, à ceux qui impliquent une décision.

Remarquons que lorsque les X_i et la matrice (σ) relative aux variables aléatoires (x_1, x_2, \dots, x_n) ont été estimés à partir d'échantillons d'effectifs faibles, l'application de la formule:

$$\hat{x} = F(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$$

et de la formule de propagation des erreurs conduisent à des estimations de X et de σ_x qui sont moins précises que celles que l'on pourrait tirer d'échantillons d'effectifs plus élevés.

Certes, l'information que l'on peut tirer du couple de résultats $\hat{x}, \hat{\Sigma}_x$ est incomparablement plus riche que celle constituée par la seule estimation \hat{x} de X , mais elle peut n'être pas suffisante pour juger d'une méthode, comparer significativement des mesures, rejeter comme aberrantes certaines d'entre elles, etc.

Pour aller plus loin, il faut connaître la loi de probabilité de la variable aléatoire $x = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et, partant, celles des x_i . Mais même dans le cas où l'on a de bonnes raisons de faire une hypothèse sur la loi suivie par x , tel intervalle construit à

partir de \hat{x} et de \hat{S}_x ($\hat{x} \pm 2 \hat{S}_x$ par exemple) contient avec plus ou moins de vraisemblance la vraie valeur cherchée X selon que \hat{x} et \hat{S}_x ont été obtenus avec plus ou moins de précision.

Nous dirons également un mot de ce problème essentiel mais qui devient très difficile à aborder lorsque l'on ne dispose que d'une estimation de X alors qu'il peut être aisément traité si l'on détient plusieurs mesures [3].

V. LA RECHERCHE DES ESTIMATEURS.

V.1. Considérations générales.

Il s'agit d'estimer les valeurs X_i inconnues, des grandeurs G_i , ainsi que les variances σ_i^2 des variables aléatoires x_i qui constituent les mesures expérimentales de ces grandeurs, et les covariances σ_{ij} des différents couples x_i, x_j .

L'estimation d'une valeur X_i ne peut que résulter d'un ou plusieurs mesurages de G . Si l'on ne dispose que d'une mesure \hat{x}_i , c'est celle-là qu'on prend comme estimateur de X_i , et pour estimer la variance σ^2 de x_i , ou la covariance de x_i et des autres variables aléatoires $x_j, j \neq i$, on fait appel soit à des sources de renseignement extérieures, comme les notices de constructeurs, soit à des considérations théoriques, ou encore à des informations tirées d'expériences passées.

C'est évidemment ce dernier cas qui permet de disposer des informations les plus fiables sur la matrice (σ).

Une mesure isolée, effectuée par un opérateur ne possédant aucune information sur l'appareil qu'il utilise ne peut évidemment pas permettre d'estimer σ_{x_i} , encore moins la covariance de x_i avec telle autre variable x_j . En revanche, la longue pratique d'un appareil permet à un expérimentateur, dans son laboratoire, d'estimer l'écart-type de la dispersion des mesures effectuées avec cet appareil. Entre ces deux situations extrêmes, on peut, en consultant la notice d'un appareil, avoir une idée de la dispersion des mesures qu'il permet d'obtenir.

En Electricité, par exemple, l'indication de la *classe*, pour les appareils à aiguille, celle de l'« erreur maximale », variable selon le calibre et le type de grandeur mesurée, pour les appareils électroniques à affichage numérique, constituent des indications précieuses.

Il ne faut, bien entendu, pas prendre à la lettre les indications des constructeurs, mais celles-ci donnent un bon ordre de grandeur.

Donnons à ce propos un seul exemple : Le laboratoire d'Electronique d'un Lycée technique, section de T.S. Electronique, possède 12 multimètres électroniques, à microprocesseurs et calibrage automatique, de grande qualité. Pour une mesure de tension continue, sur le calibre 20 V, l'erreur maximale, annoncée par le constructeur, est définie par la somme des deux contributions : 0,03 % de lecture ; 0,01 % du calibre.

Les douze appareils ont été branchés en parallèle sur une alimentation stabilisée très bien régulée. Les indications, en volts, rangées par ordre croissant, de ces douze appareils, ont été les suivantes :

10,084 ; 10,090 ; 10,092 ; 10,093 ; 10,093 ; 10,093 ; 10,094 ; 10,094 ;
10,094 ; 10,095 ; 10,096 ; 10,098.

La tension mesurée étant voisine de 10 V, l'erreur maximale annoncée par le constructeur est donc égale à 5 mV, et on constate que 14 mV séparent les deux mesures extrêmes : comme c'est souvent le cas dans les lycées, l'étendue des mesures d'une même grandeur, est supérieure à deux fois l'erreur maximale théorique.

En supposant l'échantillon de mesures ci-dessus, tiré d'une population normale, on démontre que l'on peut considérer avec un risque d'erreur voisin de 5 %, que la première mesure est aberrante. Mais les tests, qu'ils soient de DIXON ou de l'écart à la moyenne, n'amènent pas à considérer cette même valeur comme aberrante au seuil de 1 % [3].

Si on ôte cette mesure de l'échantillon considéré — et si l'on rejette par conséquent l'appareil correspondant de la collection, tant qu'il n'aura pas été réétalonné — on trouve que la moyenne des mesures est 10,0938 V, et on peut estimer l'écart-type de la variable aléatoire x correspondante à 2,1 mV.

L'erreur maximale annoncée par le constructeur apparaît alors égale à environ 2,5 fois l'écart-type, et cette situation caractérise assez bien ce que l'on trouve dans les lycées lorsque le matériel utilisé est assez récent. En l'absence d'informations tirées de l'expérience et de l'analyse statistique, la seule manière de procéder consiste à effectuer des échantillonnages : pour estimer l'écart-type de la mesure expérimentale d'une longueur de l'ordre du mètre, à l'aide d'une règle, par exemple, il faudrait que plusieurs opérateurs différents, utilisant des règles du même type, graduées de la même manière, procèdent au même mesurage.

Pour estimer la variance de la mesure expérimentale du diamètre d'une bille d'acier, à l'aide d'un palmer, le mieux consisterait certainement à effectuer plusieurs mesurages, par des personnes différentes, utilisant des palmers comparables, mais différents.

Pour avoir une estimation de l'erreur typique affectant la mesure d'une capacité par une méthode donnée, mettant en œuvre, par exemple, un pont industriel, il serait bon de pouvoir recommencer l'opération plusieurs fois, à différents moments de la journée, essayer plusieurs ponts du même type, etc.

V.2. Estimation de l'espérance mathématique X_i d'une variable aléatoire x_i .

Plusieurs mesurages, indépendants, de la même valeur X_i , ont donné les résultats $\hat{x}_i^{(1)}, \hat{x}_i^{(2)}, \dots, \hat{x}_i^{(p)}, \dots, \hat{x}_i^{(k)}$. Il revient au même de considérer que les $\hat{x}_i^{(p)}$ sont les valeurs prises par la même variable aléatoire x_i au cours de k tirages successifs, ou de supposer que chacune des valeurs $x_i^{(p)}$ est prise par une variable aléatoire indépendante $x_i^{(p)}$. Les k variables aléatoires $x_i^{(p)}$ ont alors même loi de probabilité.

Toutes les corrections qui semblent nécessaires pour que les espérances mathématiques $E(x_i^{(p)})$ soient toutes égales à X_i , ont été effectuées. Les propriétés de l'espérance montrent

alors que la variable aléatoire $\bar{x}_i = \frac{1}{k} \sum_{p=1}^k x_i^{(p)}$ a également pour espérance $X_i = E(x_i)$.

Pour cette raison, on dit que l'estimateur $\bar{\hat{x}}_i = \frac{1}{k} \sum_{p=1}^k \hat{x}_i^{(p)}$ est sans *biais* (la variable aléatoire correspondante a pour espérance mathématique la valeur X_i que l'on cherche à estimer).

Cet estimateur est, par ailleurs, « efficace ».

On dit qu'un estimateur est efficace lorsque la variance de la variable aléatoire correspondante est faible.

Considérons, en effet, une variable aléatoire ξ obtenue par combinaison linéaire des k variables aléatoires *indépendantes* $x^{(p)}$ de même loi de probabilité (et dont en particulier l'espérance mathématique commune est X et l'écart-type σ).

On désire que l'espérance mathématique de ζ soit égale-
ment X_i . Puisque $\zeta = \sum_{p=1}^k \alpha_p x^{(p)}$, les propriétés de l'espérance im-
posent pour cela que soit vérifiée la condition $R = \sum_{p=1}^k \alpha_p = 1$.

Le théorème de propagation des erreurs (formule 3) nous
donne pour variance de ζ : $\sigma_{\zeta}^2 = (\sum_{p=1}^k \alpha_p^2) \sigma^2$.

Si nous voulons déterminer un jeu de coefficients α_p qui
conduisent à une variance σ^2 minimale, il nous faut, compte tenu
de la contrainte $R = 1$, écrire, selon la méthode du multiplica-
teur de Lagrange, que chacune des dérivées partielles par rap-
port aux α_p de l'expression $\sigma_{\zeta}^2 + \lambda R$ est nulle, soit :

$$\frac{\partial (\sigma_{\zeta}^2 + \lambda R)}{\partial \alpha_p} = 2 \alpha_p \sigma^2 + \lambda = 0.$$

Tous les α_p doivent donc être égaux à $\frac{1}{k}$.

Nous venons donc de démontrer que de tous les estimateurs
de X conçus comme combinaisons linéaires de k résultats $x^{(p)}$

indépendants et de même « poids », la moyenne $\bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{p=1}^k x^{(p)}$

est l'estimateur le plus efficace en ce sens que la variance de la
variable aléatoire correspondante est la plus faible (elle vaut
 $\frac{\sigma^2}{k}$).

Il peut arriver aussi qu'on ait à estimer X à partir de valeurs
prises par des variables aléatoires indépendantes, ayant même
espérance mathématique X , mais des écarts-types différents :
 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p \dots, \sigma_k \dots$. De toutes les combinaisons linéaires des $x^{(p)}$ ayant
même espérance mathématique X , la moyenne pondérée par les

coefficients $\frac{1}{\sigma_p^2}$ est alors celle dont la variance est la plus faible.

Montrons-le : Soit $R = \sum_{p=1}^k \alpha_p$, on doit avoir $R = 1$ pour que

$$E(\zeta) = X \quad \text{avec} \quad \zeta = \sum_{p=1}^k \alpha_p x^{(p)}.$$

Le théorème de propagation des erreurs entraîne :

$$\sigma_{\zeta}^2 = \sum_{p=1}^k \alpha_p^2 \sigma_p^2.$$

Pour que σ_{ζ}^2 soit minimale, on doit écrire, comme précédemment, pour chaque coefficient α_p :

$$\frac{\partial (\sigma_{\zeta}^2 + \lambda R)}{\partial \alpha_p} = 2 \alpha_p \sigma_p^2 + \lambda = 0.$$

$$\text{On en déduit la forme commune des } \alpha_p : \alpha_p = \frac{1}{\sigma_p^2} \cdot \frac{1}{\sum_{p=1}^k \frac{1}{\sigma_p^2}}.$$

Ainsi, lorsque les « incertitudes » de plusieurs estimateurs $\hat{x}^{(1)}, \dots, \hat{x}^{(p)}, \dots, \hat{x}^{(k)}$ d'une même valeur X sont égales, respectivement à $\sigma_1, \dots, \sigma_p, \dots, \sigma_k$, le meilleur estimateur (le plus efficace) que l'on puisse construire à partir des $\hat{x}^{(p)}$ est :

$$\hat{x} = \frac{\sum_{p=1}^k \frac{\hat{x}^{(p)}}{\sigma_p^2}}{\sum_{p=1}^k \frac{1}{\sigma_p^2}}. \quad (22)$$

V.3. Estimation de la variance σ_x d'une variable aléatoire x .

Rappelons, car cela va nous être utile, que la v. a. $\Delta x = x - X$, qui se déduit de x par simple décalage, a également pour variance σ_x^2 . Soient, comme précédemment, k v. a. $x^{(p)}$, indépendantes, de même loi de probabilité, telles que :

$$E(x^{(p)}) = X \quad \text{et} \quad E(x^{(p)} - X)^2 = \sigma_x^2.$$

$$\text{Considérons la v. a. } \xi = \frac{1}{k} \sum_{p=1}^k (x^{(p)} - X)^2.$$

Son espérance mathématique est évidemment σ_x^2 .

Supposons que l'on dispose de k valeurs $\hat{x}^{(p)}$, de même poids statistique, estimant chacune la valeur cherchée X . La quantité $S'_x{}^2$, telle que :

$$S'_x{}^2 = \frac{1}{k} \sum_{p=1}^k (\hat{x}^{(p)} - X)^2$$

serait un bon estimateur de σ_x^2 si l'on connaissait X , mais X ne peut qu'être estimée par $\bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{p=1}^k \hat{x}^{(p)}$ et cela complique donc un peu le problème.

Nous allons montrer qu'un estimateur sans biais de σ_x^2 est \hat{S}_x^2 , tel que :

$$\hat{S}_x^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{p=1}^k (\hat{x}^{(p)} - \bar{x})^2. \quad (23)$$

Définissons, en effet, successivement, les v. a. $\bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{p=1}^k x^{(p)}$

$$\text{et } \eta = \sum_{p=1}^k (x^{(p)} - \bar{x})^2 = \sum_{p=1}^k x^{(p)2} - k \bar{x}^2.$$

Posons $x^{(p)} = X + \Delta x^{(p)}$ et $\bar{x} = X + \overline{\Delta x}$; on trouve :

$$\eta = \sum_{p=1}^k \Delta x^{(p)2} - k \overline{\Delta x}^2.$$

Or, nous savons que $\overline{\Delta x}$, moyenne de k v. a. d'écart-type commun égal à σ_x , a elle-même pour variance $E(\Delta x^2) = \frac{\sigma_x^2}{k}$.

$$\text{Donc } E(\eta) = (k-1) \sigma_x^2.$$

La v. a. $\frac{\eta}{k-1} = S_x^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{p=1}^k (x^{(p)} - \bar{x})^2$ a bien pour espérance mathématique σ_x^2 .

L'estimateur \hat{S}_x^2 , que l'on peut considérer comme une valeur particulière de S_x^2 est donc un estimateur sans biais de σ_x^2 .

Donnons très rapidement, et sans les démontrer, quelques propriétés relatives à la variance de :

$$S_x^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{p=1}^k (x^{(p)} - \bar{x})^2.$$

Si u_x^4 est le moment centré d'ordre 4, $u^4 = E(x^{(p)} - X)^4$, commun aux v. a. indépendantes $x^{(p)}$, et σ_x^2 leur variance, alors la variance de S_x^2 vaut :

$$\frac{u_x^4}{k} \rightarrow \frac{k-3}{k(k-1)} \sigma_x^4. \quad (24)$$

C'est une quantité généralement assez faible, aussi S_x^2 est-il un bon estimateur (efficace) de la variance des $x^{(p)}$ (ou de la variable aléatoire initiale x).

Lorsque x suit une loi de GAUSS :

$$\left(\mathfrak{F}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}} \right),$$

on trouve :

$$u_x^4 = 3\sigma_x^4. \quad (25)$$

La variance de S_x^2 vaut alors :

$$\frac{2\sigma_x^4}{k-1}. \quad (26)$$

Dans ce dernier cas, d'ailleurs, on montre que la v. a. $\frac{(k-1)S_x^2}{\sigma_x^2}$ suit la loi dite du χ^2 — khi-deux — à $k-1$ degrés de liberté, et que l'espérance mathématique de χ^2 vaut $k-1$ tandis que sa variance vaut $2(k-1)$.

On vérifiera sans peine que ces données sont compatibles avec les résultats énoncés précédemment lorsque x est une v. a. normale.

[$E(S_x^2) = \sigma_x^2$ et formules (24), (25) et (26)].

V.4. Estimation de la covariance σ_{ij} d'un couple de variables aléatoires.

La plupart des fautes que l'on commet dans les calculs d'incertitudes sont dues au fait que l'on considère comme indépendantes des grandeurs qui sont plus ou moins liées.

Donnons un exemple très simple du type de réflexion qui doit être mené. Soit un segment AC de longueur X, contenant un point B. La longueur de AB est X_1 , celle de BC = X_2 .

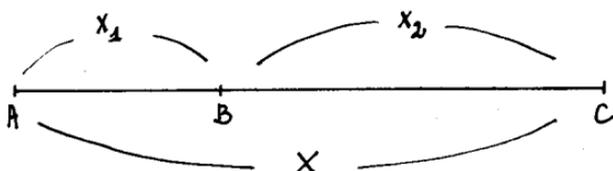


Fig. 1

On a mesuré X_1 , le résultat de ce mesurage est \hat{x}_1 , et deux opérateurs mesurent ensuite X_2 . Ils trouvent respectivement $\hat{x}_2^{(1)}$ et $\hat{x}_2^{(2)}$.

On en déduit deux estimations $\hat{x}^{(1)}$ et $\hat{x}^{(2)}$ de X : $\hat{x}^{(1)} = \hat{x}_1 + \hat{x}_2^{(1)}$ et $\hat{x}^{(2)} = \hat{x}_1 + \hat{x}_2^{(2)}$.

Ces mesures de X ne sont pas indépendantes. Caractérisons leur corrélation : soient x_1 la variable aléatoire correspondant à la mesure unique de X_1 , $x_2^{(1)}$ et $x_2^{(2)}$ les variables aléatoires relatives aux mesures de X_2 par les deux opérateurs, et $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ les variables aléatoires estimant X :

$$x^{(1)} = x_1 + x_2^{(1)}$$

$$x^{(2)} = x_1 + x_2^{(2)}$$

Supposons x_1 , $x_2^{(1)}$ et $x_2^{(2)}$ indépendantes, et telles que $E(x_1) = X_1$; $E(x_2^{(1)}) = E(x_2^{(2)}) = X_2$; $E(x_1 - X_1)^2 = \sigma_1^2$; $E(x_2^{(1)} - X_2)^2 = E(x_2^{(2)} - X_2)^2 = \sigma_2^2$.

Les propriétés de l'espérance entraînent évidemment $E(x^{(1)}) = E(x^{(2)}) = X$. On trouve alors sans peine que :

$$E[(x^{(1)} - X)(x^{(2)} - X)] = \sigma_1^2,$$

résultat attendu, du fait que x_1 figure à la fois dans $x^{(1)}$ et dans $x^{(2)}$.

Les variables $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ ont un coefficient de corrélation $\rho = \sigma_1^2/(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ et les considérer comme indépendantes peut entraîner des fautes d'appréciation.

Les calculs d'incertitudes étant beaucoup plus faciles à mener lorsque les variables x_i intervenant dans la fonction F sont indépendantes, on cherchera bien évidemment autant que possible, à choisir des variables indépendantes. Dans l'exemple précédent, il faudrait que les deux opérateurs mesurent séparément X_1 et constituent chacun un estimateur $\hat{x} = \hat{x}_1 + \hat{x}_2$ de la longueur X .

De même, si deux variables x_1 et x_2 intervenant dans la fonction F sont liées par une relation du type $x_2 = g(y, x_1)$, avec y indépendant de x_1 , il faut faire choix du couple de variables x_1, y à la place du couple x_1, x_2 .

Cependant, même lorsqu'on a fait tout ce que l'on croit possible pour que des variables soient indépendantes, il peut arriver qu'un phénomène négligé, une erreur systématique, etc. entraîne

une corrélation entre elles. On peut alors essayer, pour estimer le coefficient de covariance σ_{ij} d'exploiter les résultats des couples de mesures $(\hat{x}_i^{(p)}, \hat{x}_j^{(p)})$. Puisque, par définition :

$$\sigma_{ij} = E(x_i - X_i)(x_j - X_j),$$

on peut définir un estimateur \hat{S}_{ij} de σ_{ij} à partir de la variable aléatoire S_{ij} telle que :

$$S_{ij} = \frac{1}{k} \sum_{p=1}^k (x_i^{(p)} - \bar{x}_i)(x_j^{(p)} - \bar{x}_j)$$

expression dans laquelle \bar{x}_i et \bar{x}_j sont les moyennes respectives

définies par $\bar{x}_i = \frac{1}{k} \sum_{p=1}^k x_i^{(p)}$ et $\bar{x}_j = \frac{1}{k} \sum_{p=1}^k x_j^{(p)}$.

Cet estimateur n'est pas sans défaut : il est biaisé et sa variance est importante. Cependant, si le nombre k de couples analysés est élevé, ces défauts disparaissent ; or, il faudra souvent analyser beaucoup de couples $(\hat{x}_i^{(p)}, \hat{x}_j^{(p)})$ pour déceler une corrélation entre des variables qu'on aura choisies *a priori* pour leur indépendance supposée.

Dans la branche des Statistiques que constitue l'Analyse de Corrélation, on cherche à estimer, non la covariance σ_{ij} de deux variables x_i et x_j , mais leur coefficient de corrélation :

$$\rho = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}.$$

L'estimateur retenu \hat{r}_{ij} est généralement défini par la variable aléatoire r_{ij} telle que :

$$r_{ij} = \frac{S_{ij}}{S'_i \cdot S'_j}$$

où S_{ij} a la valeur définie précédemment, et :

$$S'_i{}^2 = \frac{1}{k} \sum_{p=1}^k (x_i^{(p)} - \bar{x}_i)^2, \quad S'_j{}^2 = \frac{1}{k} \sum_{p=1}^k (x_j^{(p)} - \bar{x}_j)^2 \quad (27)$$

Cette variable aléatoire peut prendre des valeurs comprises entre -1 et $+1$. On peut calculer sa valeur pour n'importe quel système d'observations à deux dimensions. Toutefois, comme cela a été dit précédemment, ce n'est que lorsque les v. a. x_i et x_j sont normales que le coefficient de corrélation admet une signi-

fication concrète en tant que caractéristique de l'intensité de la liaison entre ces deux variables. Il est en effet possible de construire des exemples pour lesquels, bien que $\rho = 0$, les variables x_i et x_j sont liées par une relation purement fonctionnelle. Inversement, si les lois suivies par x_i et x_j s'écartent fortement de la loi normale, le fait que $|\rho|$ soit proche de 1 n'entraîne pas nécessairement que ces variables présentent un degré de corrélation élevé.

Avant de clore ce paragraphe, nous donnerons, sans les démontrer, quelques résultats relatifs à l'estimateur \hat{r}_{ij} , qui conduit à \hat{S}_{ij} par la relation :

$$\hat{S}_{ij} = \hat{r}_{ij} \hat{S}'_i \cdot \hat{S}'_j.$$

Nous nous limitons au cas où les lois suivies par x_i et x_j sont des lois normales. On prend des échantillons de k couples $x_i^{(p)}, x_j^{(p)}$ et l'on note ρ le coefficient de corrélation entre les v. a. x_i et x_j .

r_{ij} a pour espérance mathématique :

$$E(r_{ij}) = \rho - \frac{(1 - \rho^2)}{2k} \quad (28)$$

r_{ij} est donc un estimateur biaisé, mais dont le biais s'annule lorsque k tend vers l'infini. Si k est élevé, r_{ij} est une v. a. sensiblement normale, et sa variance vaut :

$$\frac{(1 - \rho^2)^2}{k - 1}. \quad (29)$$

Pour donner une idée de la dispersion de r_{ij} dans le cas où l'effectif k est faible, considérons quelques valeurs numériques :

Supposons que l'analyse de 10 couples $(\hat{x}_i^{(p)}, \hat{x}_j^{(p)})$ conduise à l'estimateur $\hat{r}_{ij} = 0,6$. Alors l'intervalle de confiance à 95 % pour ρ serait $(-0,05; +0,89)$. Autrement dit, quand on trouve $\hat{r}_{ij} = 0,6$, dans 5 cas sur cent, la vraie valeur de ρ est extérieure à l'intervalle $(-0,05; +0,89)$. Dans un cas sur cent, elle est extérieure à l'intervalle $(-0,30; +0,93)$.

VI. RECHERCHE D'UN ESTIMATEUR DE X A PARTIR D'ESTIMATEURS CORRELES.

Au paragraphe V.2., nous avons vu comment, à partir d'estimateurs primaires indépendants de la même valeur X, on pouvait constituer un estimateur définitif, \hat{x} de X, en prenant la

moyenne, pondérée par les inverses des variances de ces estimateurs primaires (formule 22).

Dans la pratique, on dispose souvent d'estimateurs non indépendants d'une même valeur X ; il nous faut donc compléter l'étude du paragraphe V.2. en considérant ce cas. Nous traiterons tout d'abord le cas simple de deux estimateurs primaires corrélés, puis nous généraliserons au cas le plus courant où les estimateurs non indépendants sont nombreux.

VI.1. Constitution d'un estimateur à partir de deux estimateurs primaires corrélés.

Soient deux v. a. x_1 et x_2 , corrélées, de même espérance mathématique X , correspondant aux deux estimateurs primaires x_1 et x_2 . Nous poserons : σ_1^2 : variance de x_1 ; σ_2^2 : variance de x_2 ; σ_{12} : covariance de x_1 et x_2 .

Soit ξ une nouvelle v. a., combinaison linéaire de x_1 et x_2 , de même espérance mathématique X que x_1 et x_2 : $\xi = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, avec $R = \alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Cherchons quelles valeurs il faut donner à α_1 et α_2 pour que la variance de ξ , σ_ξ^2 , soit minimale.

$$\sigma_\xi^2 = \alpha_1^2 \sigma_1^2 + 2 \alpha_1 \alpha_2 \sigma_{12} + \alpha_2^2 \sigma_2^2.$$

Utilisons la méthode du multiplicateur de Lagrange :

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\sigma_\xi^2 + \lambda R)}{\partial \alpha_1} &= 2 \alpha_1 \sigma_1^2 + 2 \alpha_2 \sigma_{12} + \lambda = 0 \\ \frac{\partial (\sigma_\xi^2 + \lambda R)}{\partial \alpha_2} &= 2 \alpha_2 \sigma_2^2 + 2 \alpha_1 \sigma_{12} + \lambda = 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 - \sigma_{12}}$$

soit :

$$\alpha_1 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2 \sigma_{12}}, \quad \alpha_2 = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2 \sigma_{12}}.$$

L'estimateur le plus efficace est donc :

$$\hat{x} = \frac{(\sigma_2^2 - \sigma_{12}) \hat{x}_1 + (\sigma_1^2 - \sigma_{12}) \hat{x}_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2 \sigma_{12}}. \quad (30)$$

On retrouve la formule (23) lorsque $\sigma_{12} = 0$.

Remarque.

Il existe une autre théorie, plus générale, pour trouver les « bons » estimateurs. C'est celle dite du « maximum de vraisemblance ». Il n'est pas question d'étudier cette théorie dans le

cadre de cet article, mais on peut, à propos de l'exemple précédent, en illustrer l'idée de base.

On remarque que, si les mesures primaires de X à travers deux valeurs \hat{x}_1 et \hat{x}_2 des variables aléatoires corrélées x_1 et x_2 ont justement donné le couple (\hat{x}_1, \hat{x}_2) , c'est que la probabilité $\mathfrak{F}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ était assez grande. Supposons que x_1 et x_2 soient gaussiennes.

La loi de probabilité suivie par x_1 seule est :

$$\mathfrak{F}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x_1 - X)^2}{2\sigma_1^2}}.$$

La loi de probabilité suivie par le couple (x_1, x_2) , si leur coefficient de corrélation $\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}$ est noté ϱ , est donnée par l'expression :

$$\mathfrak{F}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\varrho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\varrho^2)}\left(\frac{(x_1 - X)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - X)^2}{\sigma_2^2} - \frac{2\varrho(x_1 - X)(x_2 - X)}{\sigma_1\sigma_2}\right)}$$

X est inconnue, on cherche à l'estimer par \hat{x} . $\mathfrak{F}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, obtenue en remplaçant dans l'expression précédente x_1 et x_2 par les valeurs trouvées \hat{x}_1 et \hat{x}_2 , est une fonction de \hat{x} .

L'idée de base de la théorie du maximum de vraisemblance consiste à dire que le meilleur estimateur de X est celui qui rend $\mathfrak{F}_{\hat{x}}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ maximale.

Pour cela, il faut que l'argument de l'exponentielle soit maximal. Posons :

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{1}{2(1-\varrho^2)} \left(\frac{(\hat{x}_1 - \hat{x})^2}{\sigma_1^2} + \frac{(\hat{x}_2 - \hat{x})^2}{\sigma_2^2} - \frac{2\varrho(\hat{x}_1 - \hat{x})(\hat{x}_2 - \hat{x})}{\sigma_1\sigma_2} \right). \\ \frac{1}{4(1-\varrho^2)} \frac{d\chi^2}{d\hat{x}} &= \hat{x} \left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{2}{\sigma_1\sigma_2} \right) - \hat{x}_1 \left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{\varrho}{\sigma_1\sigma_2} \right) \\ &\quad - \hat{x}_2 \left(\frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{\varrho}{\sigma_1\sigma_2} \right). \end{aligned}$$

Le meilleur estimateur de X , au sens du maximum de vraisemblance, est donc la valeur de \hat{x} qui assure $\frac{d\chi^2}{d\hat{x}} = 0$, soit :

$$\hat{x} = \frac{\frac{\hat{x}_1}{\sigma_1^2} \left(1 - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2}\right) + \frac{\hat{x}_2}{\sigma_2^2} \left(1 - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2}\right)}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_1^2 \sigma_2^2}} \quad (31)$$

On vérifiera sans peine que cette valeur est la même que celle qui est donnée par la formule (30), établie en exigeant seulement que la variance de la v.a. correspondant à \hat{x} , indépendamment de la loi suivie par le couple (x_1, x_2) , soit minimale.

Il n'en est pas toujours ainsi, mais il est satisfaisant de constater sur cet exemple, que la méthode générale du maximum de vraisemblance, assortie de l'hypothèse gaussienne, conforte nos simples considérations de variances.

VI.2. Généralisation au cas de plusieurs estimations corrélées d'une même valeur X.

Soient n mesures $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_n$ assorties d'incertitudes $\sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_n$.

On peut considérer que les \hat{x}_i sont les valeurs prises, respectivement, par n variables aléatoires corrélées, de même espérance mathématique X, et de matrice de variances (σ) telle que :

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \dots \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Pour trouver le meilleur estimateur de X, construit à partir de \hat{x}_j , nous pouvons encore utiliser le théorème de propagation des erreurs ou recommencer à mettre en pratique la méthode du maximum de vraisemblance

Première méthode. On cherche \hat{x} sous la forme $\hat{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \hat{x}_i$, avec $R = \sum \alpha_i = 1$ pour conserver $E(x) = X$.

La recherche des α_i consiste à minimiser la variance de la variable aléatoire $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$.

Dans ce cas, les coefficients f_i du paragraphe II.3 sont égaux aux α_i , et, en notant comme alors (α_i) la matrice ligne $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$,

et $(\alpha_i)^t$ la matrice colonne transposée, on trouve, selon la formule (15) :

$$\sigma_x^2 = (\alpha_i)(\sigma)(\alpha_i)^t.$$

Nous noterons encore (I_n) la matrice ligne unitaire composée de n fois l'unité : $(I_n) = 1, \dots, 1_n$ et $(I_n)^t$ la matrice colonne transposée. De la même manière, nous poserons :

$$(x_i) = (x_1, \dots, x_n)$$

et $\left(\frac{\partial \sigma_x^2}{\partial \alpha_i}\right)$ la matrice ligne formée par les dérivées partielles de σ_x^2 par rapport aux α_i .

$$\text{On trouve ainsi : } \left(\frac{\partial \sigma_x^2}{\partial \alpha_i}\right) = 2(\alpha_i) \cdot (\sigma).$$

La méthode de Lagrange, compte tenu de la contrainte $R = 1$, entraîne :

$$2(\alpha_i) \cdot (\sigma) + \lambda(I_n) = 0$$

soit :

$$\boxed{(\alpha_i) \cdot (\sigma) = -\frac{\lambda}{2}(I_n)} \quad (32)$$

Ou encore, si la matrice inverse $(\sigma)^{-1}$ existe :

$$(\alpha_i) = -\frac{\lambda}{2}(I_n) \cdot (\sigma)^{-1}.$$

La contrainte $R = 1$ impose alors au coefficient $-\frac{\lambda}{2}$ d'être égal à $\frac{1}{S}$, où S est la somme de tous les termes de la matrice $(\sigma)^{-1}$:

$$(\alpha_i) = \frac{1}{S}(I_n) \cdot (\sigma)^{-1}.$$

La variable aléatoire, combinaison linéaire des x_i , dont la variance est minimale, $x = (\alpha_i) \cdot (x_i)^t$, vaut donc, puisque, lorsqu'elle existe, $(\sigma)^{-1}$ est symétrique :

$$\boxed{x = \frac{1}{S} \cdot (I_n) \cdot (\sigma)^{-1} \cdot (x_i)^t} \quad (33)$$

On vérifiera que dans le cas de deux variables, où :

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } (\sigma)^{-1} = \frac{1}{1 - \rho^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & -\frac{\rho}{\sigma_1 \sigma_2} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1 \sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{pmatrix}, \text{ on retrouve bien}$$

l'expression de \hat{x} donnée par les formules (30) ou (31).

Deuxième méthode. En supposant les variables $(x_1, x_2 \dots x_n)$ gaussiennes et corrélées, on montre que la probabilité pour obtenir $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots \hat{x}_n)$ est de la forme $k \cdot e^{-\chi^2}$, expression dans laquelle si $(\hat{x} - X)$ est la matrice ligne $(\hat{x}_1 - X, \hat{x}_2 - X, \dots \hat{x}_n - X)$, $\chi^2 = (\hat{x} - X) \cdot (\sigma)^{-1} (\hat{x} - X)^t$.

En écrivant que \hat{x} rend, en estimant X, cette probabilité maximale, on retrouve exactement l'expression donnée par la formule (33).

VII. QUELQUES AUTRES APPLICATIONS DE LA FORMULE DE PROPAGATION DES ERREURS OU DE SES CONSEQUENCES.

Nous traiterons deux exemples où l'on opère de manière à éviter l'utilisation de v.a. corrélées, et deux autres, où au contraire, on en utilise.

VII.1. Mesure de la raison d'une progression arithmétique.

Un enregistrement permet d'obtenir les segments $e_1, e_2, \dots e_{11}$, parcourus par un mobile animé d'un mouvement uniformément accéléré, pendant des durées égales θ . L'accélération est notée a . Les longueurs de ces segments sont, *a priori*, en progression arithmétique de raison $r = a \theta^2$.

Comment procéder rapidement à la mesure de r ?

On peut, par exemple, prendre 5 couples de segments consécutifs indépendants : $e_3 - e_2, e_5 - e_4, \dots e_{11} - e_{10}$.

En admettant que toutes les mesures de longueurs sont des variables aléatoires de même écart-type σ , la mesure d'une dif-

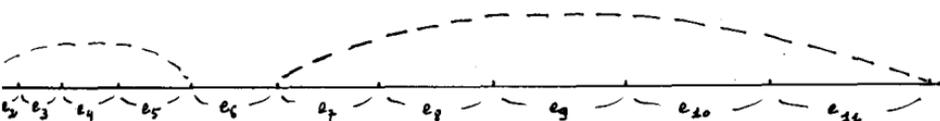


Fig. 2

férence $(e_i - e_{i-1})$ est une v. a. d'espérance mathématique r et d'écart-type $\sigma\sqrt{2}$ (formule (6) avec $f_1 = 1$ et $f_2 = -1$).

Les 5 estimations de r ainsi obtenues ont même poids statistique.

Si on prend la moyenne, on obtient une nouvelle v. a. [formule (19)], \bar{r} , dont l'espérance est r et l'écart-type $\frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.

On peut aussi remarquer que l'expression :

$$[(e_7 + e_8 + e_9 + e_{10} + e_{11}) - (e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5)]$$

est égale, *a priori*, à $30r$. Ainsi, en mesurant deux segments, en calculant leur différence et en divisant la longueur obtenue par 30, on obtient une nouvelle estimation de r . La v. a. correspondante, r_2 , a pour écart-type $\frac{\sigma\sqrt{2}}{30}$; cette manière de procéder est

donc environ 13 fois plus précise que la précédente.

Il existe bien d'autres manières d'estimer r par des estimateurs primaires indépendants. Nous avons choisi ici deux estimateurs simples, de variances très différentes.

Quand on dispose d'estimateurs indépendants d'une même grandeur, on peut songer à en tirer parti pour affiner encore l'estimation [paragraphe V.2. et formule (22)]. En général, l'opération n'apporte pas une grande amélioration car la pondération par l'inverse de la variance privilégie beaucoup l'estimateur le plus précis.

Dans notre cas, en utilisant la formule (22), on trouve :

$$\hat{r} = \frac{900 \hat{r}_2 + 5 \hat{r}_1}{905} \approx \hat{r}_2.$$

Nous pouvons tirer de cet exemple simple une conclusion qui ne sera pas remise en cause par la considération d'estimateurs primaires corrélés.

Il faut toujours chercher à obtenir d'emblée l'estimation la plus précise de la grandeur cherchée. La prise en compte supplémentaire d'estimateurs moins précis n'améliore ensuite que très médiocrement la précision cherchée.

VII.2. Mesure de la constante de torsion d'un fil d'acier.

Soit un appareillage constitué d'un fil de torsion de longueur l , d'un cylindre porteur de 2 tiges (moment d'inertie de l'ensemble par rapport à l'axe J_0), de deux masselottes de masse m , disposées symétriquement sur les tiges, à la distance d de l'axe de rotation.

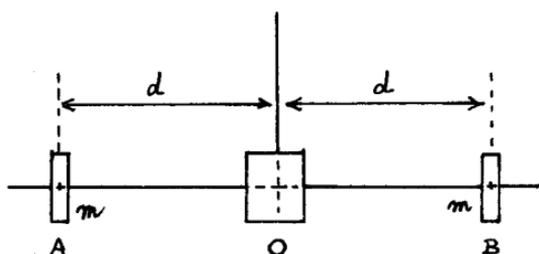


Fig. 3

On veut déterminer $C = \frac{4 \pi^2 (J_0 + 2 m d^2)}{T^2}$ par les mesures

concomitantes de d et de T .

Pour cela, on remarque que pour deux valeurs d_i et d_j de d , on obtient deux valeurs T_i et T_j de la période d'oscillation, telles que :

$$C = 8 \pi^2 m \frac{d_i^2 - d_j^2}{T_i^2 - T_j^2}. \quad (34)$$

En fait, le problème est assez complexe, car, bien que de petites encoches marquent l'emplacement des masselottes, sur les tiges, l'égalité des distances des centres d'inertie des masselottes à l'axe de rotation n'est pas forcément réalisée. En outre, pour pouvoir recommencer l'expérience un grand nombre de fois, dans plusieurs lycées, on a découpé, dans un même fil d'acier, des tronçons de longueurs aussi égales que possible. Mais la fixation de ces fils dans les mandrins qui en bloquent les deux extrémités introduit une variabilité supplémentaire dans la longueur utile du fil considéré, etc.

En comparant un grand nombre de mesures, effectuées par des élèves différents, dans des lycées différents, utilisant tous le même type d'appareil, on constate cependant que l'écart-type

d'une mesure de C dépend fortement du couple de distances (d_i, d_j) considéré.

Négligeons, pour simplifier, les erreurs provenant des mesures de m , de T_i et de T_j (on a mesuré un nombre élevé de périodes), des longueurs de fil de torsion utilisées, etc. pour porter notre attention sur les distances d_i et d_j .

Nous supposerons encore que les deux distances OA et OB sont égales, mais que toute estimation de d_i est une v. a. d'écart-type σ_d .

Calculons, en appliquant nos hypothèses simplificatrices, la variance σ_c^2 de C , ou plutôt, puisqu'on peut considérer C comme le produit de plusieurs termes, la quantité $\frac{\sigma_c^2}{C^2}$ (formules (3) du paragraphe II.1 et (11) du paragraphe II.2).

Les coefficients f_1 relatif à d_i et f_2 relatif à d_j valent respectivement :

$$f_1 = \frac{2 d_i}{d_i^2 - d_j^2} \quad \text{et} \quad f_2 = \frac{-2 d_j}{d_i^2 - d_j^2}$$

[dérivées partielles de $\ln C$, C donnée par (34)].

On trouve ainsi :

$$\frac{\sigma_c^2}{4 C^2} = \frac{d_i^2 + d_j^2}{(d_i^2 - d_j^2)^2} \sigma_d^2. \quad (35)$$

Supposons qu'on ait effectué des mesures pour $d_3 = 3$ cm, $d_4 = 4$ cm, ... $d_{10} = 10$ cm. Le facteur $\frac{(d_i^2 - d_j^2)^2}{d_i^2 + d_j^2}$ est maximal

(environ 76) pour $d_i = 10$ cm et $d_j = 3$ cm. Il est minimal pour $d_i = 4$ cm et $d_j = 3$ cm (environ 2); il vaut encore pratiquement 2 pour $d_i = 10$ cm et $d_j = 9$ cm, mais s'élève à environ 44 pour $d_i = 9$ cm et $d_j = 4$ cm. C'est dire qu'une valeur de C estimée à partir du couple ($d_i = 10$ cm, $d_j = 3$ cm) est beaucoup plus précise que celle qui proviendrait du couple (4 cm, 3 cm) ou du couple (10 cm, 9 cm). Notre calcul simplifié indique que :

$$\frac{\sigma_c(4; 3)}{\sigma_c(10; 3)} = \sqrt{38} = 6,2$$

et qu'une mesure de C provenant du couple (10 cm, 3 cm) devrait avoir, par conséquent un poids 38 fois supérieur à celle qui

proviendrait du couple (4 cm, 3 cm). Les causes de variabilité que nous avons négligées ramènent ce rapport à une valeur proche de 20, mais il est évident que l'on ne peut mettre sur le même plan deux mesures dont les précisions sont aussi différentes.

La bonne attitude consiste :

- 1° à effectuer des mesures sur des couples de distances très différentes (résultat assez intuitif !), comme 10 et 3 cm, à la rigueur 10 et 4 cm ou 9 et 4 cm ;
- 2° à avoir conscience que si l'on utilise le même ensemble de mesures (d_i, T_i) pour estimer C en appliquant deux fois la formule (34) — une fois avec (d_j, T_j), une autre avec (d_k, T_k) — on obtient deux estimations fortement corrélées de C, dont l'exploitation optimale sera délicate.

Nous remarquerons encore que des mesures portant sur le même fil, dont le calage dans les mandrins n'aurait pas été revu, sont certainement un peu corrélées, tout comme des mesures utilisant toutes le même système d'inertie, etc.

Nous reprenons donc notre conclusion du paragraphe précédent : il faut choisir le type de mesurage conduisant à des mesures aussi précises que possible, aussi indépendantes que possible, et pondérer ces mesures comme l'indique la formule (22), ou en prendre la moyenne arithmétique si elles ont toutes le même poids.

VII.3. Mesure des écarts entre plusieurs potentiels d'oxydo-réduction.

Le problème que nous allons traiter dans ce paragraphe est un problème général qui se présente lorsqu'on a collecté de manière naturelle un ensemble de résultats conduisant à plusieurs estimations possibles de la ou des grandeurs cherchées. On peut le rencontrer en mesurage de longueurs, de longueurs d'ondes, etc., mais c'est en classe de Première qu'il semble le plus courant.

Problème.

On a mesuré les tensions à vide de six piles d'oxydoréduction, obtenues en associant deux à deux, à l'aide de ponts salins, quatre demi-piles formées, chacune d'une électrode en métal M plongeant dans une solution molaire d'ions M_{aq}^{n+} . On a trouvé, respectivement, $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_6$. On suppose que toutes les mesures ont la même précision absolue, c'est-à-dire que les variables aléatoires $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_6$ correspondant aux mesures des grandeurs a_1, \dots, a_6 ont le même écart-type σ .

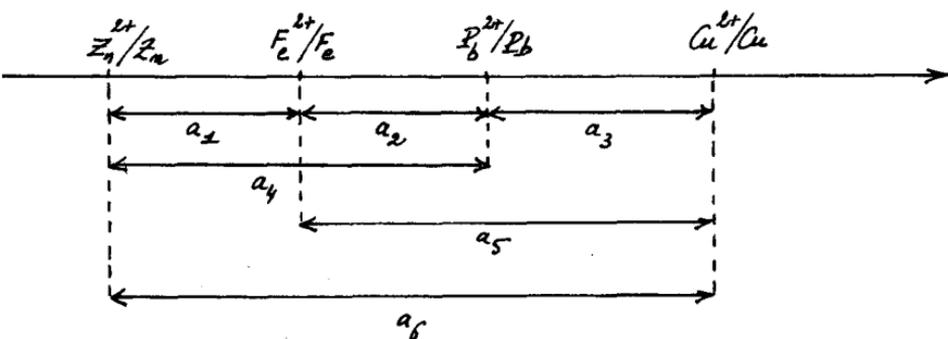


Fig. 4

On cherche, à partir de ces mesures, à estimer a_1, \dots, a_6 , de la manière la plus précise possible.

Intéressons-nous, par exemple, à :

$$X = a_6 = \pi_{Cu^{2+}/Cu} - \pi_{Zn^{2+}/Zn}.$$

Cette grandeur peut être estimée, directement, par les estimateurs :

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= \hat{a}_6 \\ \hat{x}_2 &= \hat{a}_1 + \hat{a}_5 \\ \hat{x}_3 &= \hat{a}_4 + \hat{a}_3 \\ \hat{x}_4 &= \hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 \\ \hat{x}_5 &= \hat{a}_4 + \hat{a}_5 - \hat{a}_2 \\ &\dots \end{aligned}$$

Les trois premiers estimateurs sont totalement indépendants les uns des autres ; \hat{x}_4 est partiellement corrélé à \hat{x}_2 et \hat{x}_3 . Quant à \hat{x}_5 , il peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des précédents ($\hat{x}_5 = \hat{x}_2 + \hat{x}_3 - \hat{x}_4$) et il est ainsi évident que sa prise en compte, pas plus que celle d'autres estimateurs du même type, n'ajoute rien à une combinaison linéaire de $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_4$.

Nous cherchons à estimer définitivement X par une combinaison linéaire de ces 4 estimateurs dont aucun ne peut totalement s'exprimer en fonction des autres. Les variables aléatoires correspondant à $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ et \hat{x}_4 , ont pour variance respectivement,

$$\sigma_{x_1}^2 = \sigma^2; \quad \sigma_{x_2}^2 = 2\sigma^2; \quad \sigma_{x_3}^2 = 2\sigma^2; \quad \sigma_{x_4}^2 = 3\sigma^2.$$

De plus, x_2 , x_3 et x_4 sont corrélées.

La matrice de variance de ces 4 variables aléatoires vaut :

$$(\sigma) = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice inverse, $(\sigma)^{-1}$, est telle que :

$$(\sigma)^{-1} = \frac{1}{8\sigma^2} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

et la somme de ses termes, S, vaut $\frac{2}{\sigma^2}$.

Dans ces conditions, nous avons vu que le meilleur estimateur, \hat{A}_6 , de $X = a_6$, construit à partir de \hat{x}_1 , \hat{x}_2 , \hat{x}_3 et \hat{x}_4 vaut [formule (33)] :

$$\hat{A}_6 = \frac{1}{S} \cdot (I_4) \cdot (\sigma)^{-1} \cdot (\hat{x})^t = \frac{2\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3}{4}.$$

Cet estimateur a pour écart-type $\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$.

Il est tout à fait remarquable que \hat{A}_6 soit construit à partir des seuls estimateurs \hat{x}_1 , \hat{x}_2 et \hat{x}_3 qui soient indépendants les uns des autres. Ces estimateurs sont alors seulement pondérés par l'inverse de leur variance. En revanche, $\hat{x}_4 = \hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3$, estimateur moins précis que les autres et partiellement corrélé à certains d'entre eux, n'intervient pas dans l'estimation finale de a_6 .

De même, si l'on ne disposait pas de la mesure \hat{a}_6 et que l'on cherche à estimer a_6 par une combinaison linéaire de $\hat{x}_2 = \hat{a}_1 + \hat{a}_5$; $\hat{x}_3 = \hat{a}_3 + \hat{a}_4$, et $\hat{x}_4 = \hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3$, on trouverait là encore que le

meilleur estimateur de cette grandeur, $\frac{\hat{x}_2 + \hat{x}_3}{2}$, ne tient pas compte de x_4 .

Revenant à notre exemple, nous voyons que le meilleur estimateur \hat{A}_6 de a_6 vaut finalement :

$$\hat{A}_6 = \frac{2 \hat{a}_6 + (\hat{a}_1 + \hat{a}_5) + (\hat{a}_3 + \hat{a}_4)}{4}.$$

On aurait de la même manière :

$$\hat{A}_5 = \frac{2 \hat{a}_5 + (\hat{a}_2 + \hat{a}_3) + (\hat{a}_6 - \hat{a}_1)}{4};$$

$$\hat{A}_1 = \frac{2 \hat{a}_1 + (\hat{a}_4 - \hat{a}_2) + (\hat{a}_6 - \hat{a}_5)}{4}; \text{ etc.}$$

Nous pouvons constater que ces différents estimateurs sont cohérents entre eux, puisque, par exemple, $\hat{A}_1 = \hat{A}_6 - \hat{A}_5$, tout comme $a_1 = a_6 - a_5$, alors qu'en général, à cause des erreurs de mesures, $\hat{a}_1 \neq \hat{a}_6 - \hat{a}_5$.

Nous avons donc, grâce à une méthode fondée sur l'analyse de variance, montré comment, de 6 mesures $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_6$, d'écart-type σ , non cohérentes entre elles, on peut tirer 6 estimateurs $\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_6$,

cohérents et d'écart-type $\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$.

Remarque.

Lorsqu'on procède à l'étude expérimentale, on constate que la position du couple Fe^{2+}/Fe est décalée vers les potentiels positifs (métaux moins réducteurs que le fer) (*).

Pour toutes les f.é.m. des piles ne comportant pas le couple Fe^{2+}/Fe , il n'y a rien de changé. Pour celles concernant Fe^{2+}/Fe , il faut tenir compte d'une erreur systématique b (figure 5).

(*) Cela est dû à ce que, dans la solution de sulfate de fer, la réduction qui compense l'oxydation du fer de l'électrode ($\text{Fe} \rightarrow \text{Fe}^{2+} + 2 e^-$) n'est pas celle des ions Fe^{2+} , mais plutôt celle de l'eau, favorisée par l'acidité élevée qui y règne.

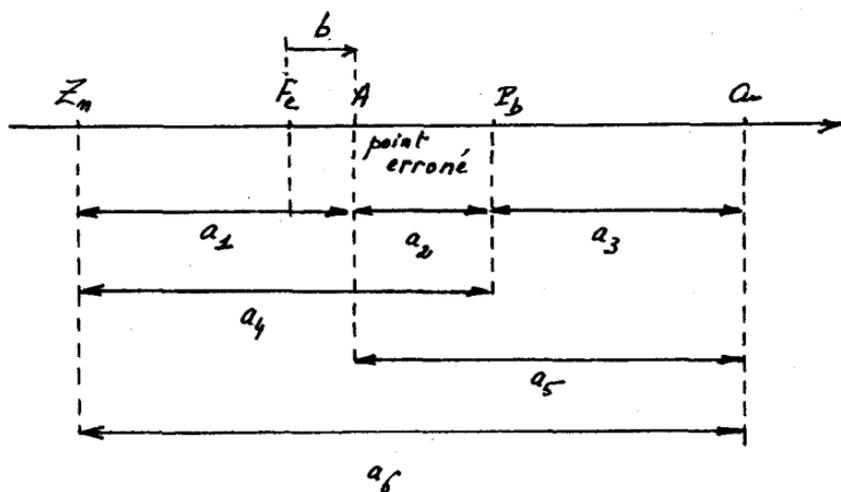


Fig. 5

Considérons, par exemple, la mesure de :

$$a'_1 = \pi_{\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}} - \pi_{\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}}.$$

a'_1 est estimé par :

$$\hat{x}_1 = \hat{a}_1 - b$$

$$\hat{x}_2 = \hat{a}_4 - \hat{a}_2 - b$$

$$\hat{x}_3 = \hat{a}_6 - \hat{a}_5 - b$$

$$\hat{x}_4 = \hat{a}_6 - \hat{a}_3 - \hat{a}_2 - b.$$

Les autres estimateurs n'apportent rien, *a priori*. Pour les x_i , la matrice (σ) a pour expression :

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma_a^2 + \sigma_b^2 & \sigma_b^2 & \sigma_b^2 & \sigma_b^2 \\ \sigma_b^2 & 2\sigma_a^2 + \sigma_b^2 & \sigma_b^2 & \sigma_a^2 + \sigma_b^2 \\ \sigma_b^2 & \sigma_b^2 & 2\sigma_a^2 + \sigma_b^2 & \sigma_a^2 + \sigma_b^2 \\ \sigma_b^2 & \sigma_a^2 + \sigma_b^2 & \sigma_a^2 + \sigma_b^2 & 3\sigma_a^2 + \sigma_b^2 \end{pmatrix}$$

soit :

$$(\sigma) = (\sigma_a) + \sigma_b^2 (U)$$

avec :

$$(\sigma_a) = \sigma_a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (U) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cherchons le meilleur estimateur. Reprenons le raisonnement du paragraphe VI.2.

La relation (32) s'écrit ici :

$$(\alpha_i) \cdot [(\sigma_a) + \sigma_b^2(U)] = -\frac{\lambda}{2}(I_n)$$

soit, compte tenu de la condition $R = \Sigma \alpha_i = 1$:

$$(\alpha_i)(\sigma_a) = \left(-\frac{\lambda}{2} - \sigma_b^2\right)(I_n).$$

Le raisonnement est identique à celui du paragraphe VI.2, $\frac{\lambda}{2}$ étant remplacé par $-\frac{\lambda'}{2} = -\frac{\lambda}{2} - \sigma_b^2$. Le meilleur estimateur est ainsi (33) :

$$(x) = \frac{1}{S_a} (I_n)(\sigma_a)^{-1}(x_i)'$$

indépendant de σ_b , soit, comme précédemment :

$$x = \frac{2x_1 + x_2 + x_3}{4} \text{ d'écart-type } \frac{\sigma_a}{\sqrt{2}}$$

d'où :

$$\hat{a}'_1 = \hat{x} \text{ avec } \hat{x} = \frac{2\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3}{4}.$$

La présence de l'erreur systématique ne change donc pas ici la manière dont on doit procéder pour estimer les différentes f.é.m.

On fait comme s'il n'y avait pas d'erreurs systématiques et on estime au mieux $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ en choisissant les estimateurs primaires indépendants les plus précis, ensuite on fait de son mieux pour estimer b .

$$\begin{aligned} a'_1 &: \text{ vraie valeur cherchée} = a_1 - b \\ a'_2 &: \text{ » } \text{ » } \text{ » } = a_2 + b \\ a'_5 &: \text{ » } \text{ » } \text{ » } = a_5 + b. \end{aligned}$$

Il serait donc faux de considérer a_1, a_2, a_5 comme des v. a. d'écart-type important, sans plus, en ne tenant pas compte du fait qu'il s'agit de v. a. corrélées par la présence de b , alors que a_3, a_4 et a_6 auraient, au contraire, un faible écart-type.

Les raisonnements précédents peuvent être généralisés. Nous laissons au lecteur le soin de montrer qu'en ajoutant, comme le

font souvent les professeurs de Première S, une cinquième demi-pile à l'argent, et en procédant aux 10 mesures $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{10}$ des f.é.m. des piles d'oxydoréduction correspondantes, on obtiendra un ensemble :

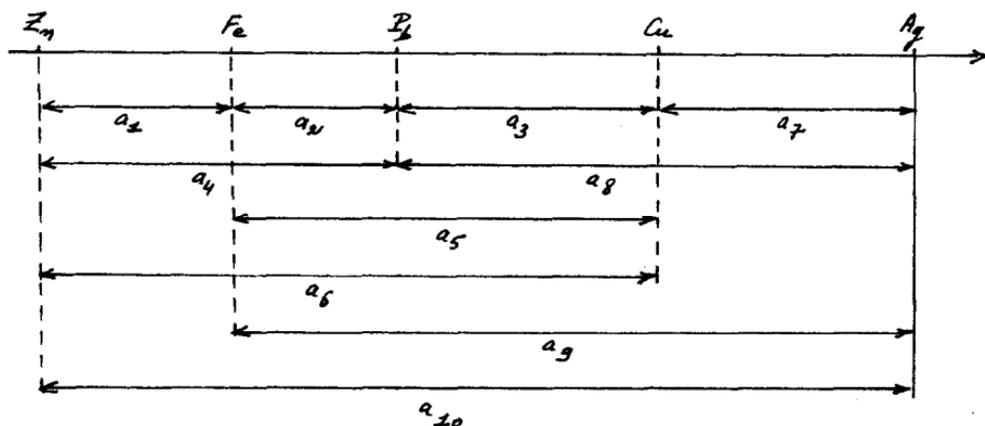


Fig. 6

cohérent et précis d'estimateurs des différences de potentiel cherchées, en ne retenant pour chacune d'elles, que les estimations les plus précises et indépendantes, et en les pondérant par l'inverse de leur variance.

Ainsi, pour estimer :



on doit choisir :

$$\hat{A}_{10} = \frac{2a_{10} + (a_1 + a_9) + (a_4 + a_8) + (a_6 + a_7)}{5}$$

(Le fait d'opérer à partir de solutions non molaires, mais de concentrations molaires identiques, entraîne, du fait de la monovalence de l'argent, un petit décalage supplémentaire du couple Ag^+/Ag par rapport aux autres).

VII.4. Estimation de la valeur d'une résistance R lorsqu'on dispose de plusieurs valeurs simultanées de la tension à ses bornes et de l'intensité qui la parcourt.

Il s'agit d'un problème rencontré moins fréquemment que le précédent mais qui se pose tout de même lorsqu'on désire contrôler un jeu d'appareils (voltmètre et ampèremètre) dont on doute, à l'aide d'un autre jeu plus fiable.

Soit le montage suivant où l'on a disposé en série avec la résistance R à mesurer, deux ampèremètres fournissant les mesures I_1 et I_2 de l'intensité I qui parcourt le circuit :

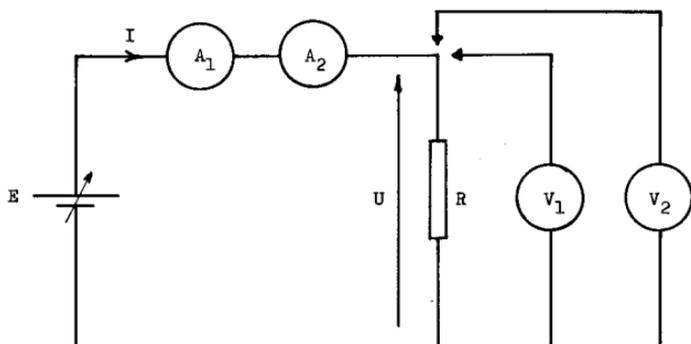


Fig. 7

Deux voltmètres V_1 et V_2 sont successivement branchés aux bornes de R . Nous supposons que les perturbations dont ils sont respectivement la cause sont analysées après coup, et nous ne tenons donc pas compte, ici, des corrections qui seront éventuellement effectuées pour cette courte dérivation.

On dispose donc des mesures $\hat{I}_1 = I + \delta\hat{I}_1$, $\hat{I}_2 = I + \delta\hat{I}_2$, $\hat{U}_1 = U + \delta\hat{U}_1$ et $\hat{U}_2 = U + \delta\hat{U}_2$, et à ces mesures correspondent les variables aléatoires $I_1 = I + \delta I_1, \dots, U_2 = U + \delta U_2$, d'écart-types respectifs :

$$\sigma_{I_1}, \quad \sigma_{I_2}, \quad \sigma_{U_1} \quad \text{et} \quad \sigma_{U_2}.$$

On dispose donc de quatre estimateurs de R :

$$\hat{R}_1 = \frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_1}, \quad \hat{R}_2 = \frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_2}, \quad \hat{R}_3 = \frac{\hat{U}_2}{\hat{I}_1} \quad \text{et} \quad \hat{R}_4 = \frac{\hat{U}_2}{\hat{I}_2}$$

auxquels correspondent les variables aléatoires R_1, R_2, R_3 et R_4 . Ces variables ne sont pas indépendantes : R_1 est corrélée avec R_2 et R_3 , R_2 avec R_1 et R_4 , etc. si bien que seules R_1 et R_4 d'une part, R_2 et R_3 d'autre part, sont indépendantes.

En fait, la matrice des variances de ces 4 variables aléatoires vaut, en désignant par R leur espérance mathématique commune :

$$(\sigma) = R^2 \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{U_1}^2}{U^2} + \frac{\sigma_{I_1}^2}{I^2} & \frac{\sigma_{U_1}^2}{U^2} & \frac{\sigma_{I_1}^2}{I^2} & 0 \\ \frac{\sigma_{U_1}^2}{U^2} & \frac{\sigma_{U_1}^2}{U^2} + \frac{\sigma_{I_2}^2}{I^2} & 0 & \frac{\sigma_{I_2}^2}{I^2} \\ \frac{\sigma_{I_1}^2}{I^2} & 0 & \frac{\sigma_{U_2}^2}{U^2} + \frac{\sigma_{I_1}^2}{I^2} & \frac{\sigma_{U_2}^2}{U^2} \\ 0 & \frac{\sigma_{I_2}^2}{I^2} & \frac{\sigma_{U_2}^2}{U^2} & \frac{\sigma_{U_2}^2}{U^2} + \frac{\sigma_{I_2}^2}{I^2} \end{pmatrix}$$

On se pose le problème de l'élaboration d'un estimateur définitif de R à partir de \hat{R}_1 , \hat{R}_2 , \hat{R}_3 et \hat{R}_4 .

Pour cela on peut reprendre la théorie précédente, mais, malheureusement, la matrice (σ) n'étant pas inversible (les sommes respectives des lignes 1 et 4 d'une part, 2 et 3 de l'autre, sont égales), celle-ci ne peut être reprise intégralement.

Il reste que les coefficients α_1 , α_2 , α_3 , α_4 qui rendent minimale la variance de la variable aléatoire :

$$q = \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \alpha_3 R_3 + \alpha_4 R_4,$$

et qui satisfont par ailleurs à la relation $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$, doivent vérifier la relation (32) établie au paragraphe VI.2.

$$(\alpha_i) \cdot (\sigma) = -\frac{\lambda}{2} (I_4).$$

Remarquons tout d'abord que dans le cas très schématique où les quatre mesures seraient effectuées avec la même précision,

$$\frac{\sigma_{U_1}}{U} = \frac{\sigma_{U_2}}{U} = \frac{\sigma_{I_1}}{I} = \frac{\sigma_{I_2}}{I} = \Delta, \text{ on constate que la solution, } \frac{\sigma_{U_1}}{U} = \frac{\sigma_{U_2}}{U} = \frac{\sigma_{I_1}}{I} = \frac{\sigma_{I_2}}{I} = \Delta, \text{ on constate que la solution,}$$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{1}{4}$ convient parfaitement, mais la variance de q_1 vaut alors :

$$\sigma_{q_1}^2 = \frac{1}{4} (I_4) \cdot (\sigma) \frac{1}{4} (I_4)^t = \frac{1}{16} \times [\text{somme des termes de}$$

$$(\sigma)] = R^2 \Delta^2. \text{ Autrement dit : } \frac{\sigma_{q_1}}{R} = \Delta.$$

Il convient de comparer cette précision à celle que l'on aurait obtenue en prenant seulement la moyenne des deux estimations indépendantes de R (\hat{R}_1 et \hat{R}_4 par exemple).

$$\text{Dans ce cas } q_2 = \frac{R_1 + R_4}{2}; \sigma_2^2 = \frac{1}{4} (\sigma_{R_1}^2 + \sigma_{R_4}^2) = R^2 \cdot \Delta^2.$$

On ne gagne donc absolument rien en remplaçant les deux mesures indépendantes par les 4 mesures corrélées.

Ce résultat, si l'on suppose toujours respectées les égalités $\frac{\sigma_{U_1}}{U_1} = \frac{\sigma_{U_2}}{U_2} = \frac{\sigma_{I_1}}{I_1} = \frac{\sigma_{I_2}}{I_2} = \Delta$, reste valable pour toute combinaison linéaire dont les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et α_4 satisfont à la relation (32) : $(\alpha_i) \cdot (\sigma) = -\frac{\lambda}{2} \cdot (I_4)$.

On peut montrer que les α_i sont de la forme :

$$\alpha_1 = \alpha_4; \alpha_2 = \frac{1}{2} - \alpha_4; \alpha_3 = \frac{1}{2} - \alpha_4 \text{ et } \alpha_4 \text{ quelconque.}$$

Dans tous les cas, la variance de $q_1 = \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \alpha_3 R_3 + \alpha_4 R_4$ vaut $R^2 \cdot \Delta^2$ et est égale à celle de $q_2 = \frac{R_1 + R_4}{2}$.

On peut généraliser ceci, très facilement, au cas où l'on disposerait de n ampèremètres en série, de n voltmètres en parallèle, appareils de même classe dont les calibres seraient utilisés de la même manière :

Le meilleur estimateur de R serait alors tout simplement la moyenne des n estimateurs « primaires » indépendants $R_{ii} = \frac{\hat{U}_i}{\hat{I}_i}$.

Il est d'ailleurs équivalent, dans ce cas, de faire la moyenne $\bar{\hat{U}}$ des \hat{U}_i , puis la moyenne \hat{I} des \hat{I}_i et d'estimer R par $\frac{\bar{\hat{U}}}{\hat{I}}$.

Dans le cas général où les calibres des ampèremètres et ceux des voltmètres ne sont pas utilisés de la même manière,

$\left(\frac{\sigma_I}{I} \neq \frac{\sigma_U}{U} \right)$ et où, de plus, les appareils employés n'ont pas nécessairement la même précision, il faut quelque peu revenir sur les résultats précédents.

Supposons pour fixer les idées, que les mesures soient effectuées avec les « précisions » suivantes :

$$\frac{\sigma_{U_1}}{U} = 0,5 \% ; \quad \frac{\sigma_{I_1}}{I} = 0,5 \% \text{ (appareils numériques)}$$

$$\frac{\sigma_{U_2}}{U} = 1 \% ; \quad \frac{\sigma_{I_2}}{I} = 1,5 \% \text{ (bons appareils à aiguille).}$$

La matrice de variance des 4 estimateurs R_1, \dots, R_4 , définis précédemment, devient :

$$(\sigma) = 2,5 \cdot 10^{-5} R^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 9 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

L'équation (32) : $(\alpha_i) \cdot (\sigma) = -\frac{\lambda}{2} (I_4)$, fournissant les α_i

« optimaux », possède une infinité de solutions équivalentes, entraînant la même variance minimale pour la v. a. $q_1 = \sum_{i=1}^4 \alpha_i R_i$ correspondant à l'estimateur cherché.

$$\begin{aligned} \text{Ces solutions sont de la forme : } \alpha_1 &= 0,7 + \alpha_4 \\ \alpha_2 &= 0,1 - \alpha_4 \\ \alpha_3 &= 0,2 - \alpha_4 \\ \alpha_4 &\text{ quelconque.} \end{aligned}$$

Choisissons $\alpha_4 = 0$ et considérons la v. a. :

$$q_1 = 0,7 R_1 + 0,1 R_2 + 0,2 R_3.$$

La variance, obtenue en utilisant une fois encore les formules (8) ou (15) vaut :

$$\sigma_{q_1}^2 = 2,5 \cdot 10^{-5} R^2 \times 1,7.$$

On a donc :

$$\frac{\sigma_{q_1}}{R} = 0,652 \%.$$

C'est la meilleure précision que l'on puisse tirer des 4 mesures \hat{U}_1 , \hat{U}_2 , \hat{I}_1 et \hat{I}_2 . Il faut comparer ce résultat à celui que l'on obtient en n'utilisant que les deux appareils les plus précis, c'est-à-dire en estimant R par \hat{R}_1 . On trouve alors que la précision est à peine plus faible : $\frac{\sigma_{R_1}}{R} = 0,707 \%$.

On peut encore garder le parti de la simplicité et exploiter seulement les deux estimations non corrélées de R , \hat{R}_1 et \hat{R}_4 . Comme les variances des v. a. R_1 et R_4 sont telles que $\frac{\sigma_{R_1}^2}{\sigma_{R_4}^2} = \frac{2}{13}$, la théorie concrétisée par la formule (22) nous a appris qu'il convenait, dans ce cas, de choisir l'estimateur :

$$\hat{Q}_2 = \frac{13 \hat{R}_1 + 2 \hat{R}_4}{15}.$$

La précision de cet estimateur est telle que $\frac{\sigma_{Q_2}}{R} = 0,658 \%$.

Ainsi, ce dernier exemple complète-t-il ce que nous a appris l'examen des précédents, et qui est, finalement, tout à fait conforme à l'intuition :

a) Disposant d'un premier estimateur précis (ici \hat{R}_1), on ne gagne pas grand-chose à la prise en compte supplémentaire d'un autre estimateur indépendant du premier (ici \hat{R}_4), et moins précis que lui. (Dans notre exemple, la précision est passée de 0,71 % à 0,66 %).

b) Ayant tiré parti convenablement — selon la formule (22) — des différents estimateurs indépendants d'une même grandeur, en commençant par le plus précis, on ne gagne pratiquement rien à leur adjoindre des estimateurs corrélés. Ainsi, dans notre exemple, la précision des 0,658 % concernant \hat{Q}_2 , estimateur relativement simple de R , passe à 0,652 % pour ce qui est de \hat{Q}_1 , estimateur dont le calcul est long et fastidieux.

Dans l'exemple précédent du paragraphe VII.3, concernant la détermination de la f.é.m. d'une pile à partir d'un ensemble de mesures permettant différentes estimations de cette f.é.m., nous

avons vu qu'on ne pouvait que perdre en précision en prenant en compte des estimateurs à la fois moins précis que les « bons » et présentant une corrélation marquée avec eux.

Nous terminons cette discussion par un tableau récapitulatif indiquant les précisions que l'on peut attendre de différentes exploitations des 4 mesures primaires : \hat{U}_1 à 0,5 % ; \hat{I}_1 à 0,5 % ; \hat{U}_2 à 1 % et \hat{I}_2 à 1,5 %. On peut tout d'abord en tirer :

$$\hat{R}_1 = \frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_1} (0,71 \%) ; \quad \hat{R}_2 = \frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_2} (1,58 \%) ; \quad \hat{R}_3 = \frac{\hat{U}_2}{\hat{I}_1} (1,12 \%) ;$$

$$\hat{R}_4 = \frac{\hat{U}_2}{\hat{I}_2} (1,8 \%).$$

On peut ensuite combiner entre eux ces estimateurs de R :

$$* \hat{Q}_2 = \frac{13 \hat{R}_1 + 2 \hat{R}_4}{15}, (0,66 \%), \text{ constitué à partir de } \hat{R}_1,$$

précis, et de \hat{R}_4 indépendant de \hat{R}_1 , est précis et assez simple.

$$* \hat{Q}_3 = \frac{\hat{R}_2 + \hat{R}_3}{3}, (0,91 \%), \text{ est également construit à}$$

partir d'estimateurs indépendants dont les variances sont dans le rapport 2, mais \hat{R}_2 et \hat{R}_3 sont des mesures médiocres de R ; \hat{Q}_3 n'est donc pas un bon estimateur de \hat{R} .

* $\hat{Q}_1 = 0,7 \hat{R}_1 + 0,1 \hat{R}_2 + 0,2 \hat{R}_3$, (0,65 %) constitue le meilleur parti que l'on puisse tirer des mesures initiales. Désirant attirer l'attention du lecteur sur le problème de l'utilisation d'estimateurs primaires corrélés, nous avons été amenés à définir \hat{Q}_1 , dans ce cas particulier, d'une manière que l'on peut juger trop lourde. On peut, en fait, construire, à partir des 4 mesures initiales, une v. a. Q_4 , estimant elle aussi R, et possédant exactement la même variance que Q_1 , mais d'obtention plus « naturelle ».

On peut, en effet, en utilisant de manière réitérée la formule (22), chercher à partir de \hat{U}_1 et de \hat{U}_2 , un estimateur

$\hat{U} = \frac{4 \hat{U}_2 + \hat{U}_2}{5}$ de la tension U , et à partir de \hat{I}_1 et de \hat{I}_2 , un

estimateur $\hat{I} = \frac{9 \hat{I}_1 + \hat{I}_2}{10}$ de l'intensité I . On peut alors mon-

trer (formules 8 et 11) que la variance $\sigma_{Q_4}^2$ de la v. a. :

$$\sigma_{Q_4} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \frac{8 U_1 + 2 U_2}{9 I_1 + I_2}$$

est exactement la même que celle de $Q_1 = 0,7 R_1 + 0,1 R_2 + 0,2 R_3$, soit 0,652 %.

$$* \hat{Q} = \frac{\hat{R}_1 + \hat{R}_2 + \hat{R}_3 + \hat{R}_4}{4}, (0,97 \%), \text{ constitue un mau-}$$

vais estimateur car on a mis sur le même plan de bonnes mesures (\hat{R}_1 et, à la rigueur \hat{R}_3) et de mauvaises (\hat{R}_2 , \hat{R}_4), et l'on n'a pas tenu compte de la corrélation. Il est tout à fait significatif de constater que cette moyenne a des caractéristiques plus

mauvaises que celles de la simple estimation, $R_1 = \hat{U}_1/\hat{I}_1$. Nous pensons ainsi avoir suffisamment insisté sur les considérations de précisions respectives des estimateurs et de leurs corrélations éventuelles.

VIII. AU-DELA DE L'ANALYSE DE VARIANCE, LA CONNAISSANCE DES LOIS DE PROBABILITES EST NECESSAIRE.

La formule de propagation des erreurs et les réflexions que nous avons menées sur l'estimation, sont indépendantes des lois de probabilité des v. a. considérées, et donc très générales. C'est ce qui fait leur intérêt. Lorsque, cependant, nous avons — au paragraphe III — évoqué le problème concret de la mise en évidence d'erreurs systématiques lors de mesurages effectifs, nous avons indiqué la nécessité de recourir à des lois de probabilités connues, tabulées, permettant, dans la mesure où les v. a. initiales x_i possèdent certaines propriétés, de retenir ou de rejeter avec, dans chaque cas, un certain risque d'erreur, telle ou telle hypothèse et donc de prendre telle ou telle décision. De

même, à propos des estimateurs \hat{S}_i et \hat{S}_{ij} , nous avons pu préciser leurs caractéristiques — variance pour \hat{S}_i avec les formules (25) et (26), espérance mathématique et variance pour r_{ij} avec les formules (28) et (29) — dans le cas où les v. a. x_i initiales sont

gaussiennes, ce qui permet de fixer les idées et d'apprécier la fiabilité de ces estimateurs. Il en va de même lorsque, dans la pratique, on est conduit à prendre des décisions diverses au sujet d'une méthode de mesurage, d'un appareil, d'une population d'élèves, etc. à partir des informations fournies par un échantillon. On parle alors de décisions statistiques. Il faut alors prendre en compte les *lois de probabilités* suivies par les v. a. considérées.

VIII.1. Les lois suivies par les v. a. x_i .

Une loi se dégage de toutes les autres, c'est la loi de Gauss, ou loi normale, bien connue, et plusieurs fois évoquée dans ce qui précède. C'est une loi qui est très souvent suivie — au moins approximativement autour de leur espérance mathématique X_i et sur une largeur de plusieurs σ_i , ce qui est suffisant — par

les mesures primaires $\hat{x}_i^{(p)}$ d'une grandeur G_i . Il est nécessaire, pour cela, que les causes d'erreurs soient multiples et qu'aucune de ces causes ne soit prépondérante (Théorème de la limite centrale [4]).

Il existe de nombreux tests pour juger de l'adéquation d'une loi expérimentale à une loi normale par examen d'échantillons [3].

Si les x_i intervenant dans la définition de $x = F(x_1, \dots, x_n)$ sont des v. a. gaussiennes d'écart-types σ_i faibles devant $X_i = E(x_i)$, si leurs contributions à x sont comparables, alors il est vraisemblable que x est aussi une variable gaussienne. Le théorème de la limite centrale permet de montrer que même si les x_i ne sont pas gaussiennes, mais si n est assez élevé, alors la loi suivie par $x = F(x_1, \dots, x_n)$ dans les conditions énoncées pré-

cédemment ($\frac{\sigma_i}{X_i} \ll 1, \dots$), converge vers une loi de Gauss. La loi

de Poisson et la loi binomiale [1] sont également souvent suivies, au moins approximativement, par les v. a. discrètes, prenant des valeurs entières.

VIII.2. La loi du khi-deux ou de Pearson.

C'est la loi suivie par la somme des carrés de n v. a. normales, réduites (c'est-à-dire d'écart-type égal à l'unité) centrées et indépendantes :

$$\chi_n^2 = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2.$$

Elle intervient beaucoup dans les tests d'hypothèses (adéquation de la loi suivie par une v. a. à une loi connue, tests d'indépendance en analyse de variance, en analyse de régression, etc.).

Nous avons vu au paragraphe V.3 que l'étude de l'estimateur S_x^2 se ramène lorsque les x_i sont normales, à celle du χ^2 . A

cette occasion, nous avons noté que l'espérance mathématique du χ_n^2 , $E(\chi_n^2)$, vaut n , et que sa variance $\sigma_{\chi_n^2}$, vaut $2n$.

VIII.3. La loi de Student ou de Student-Fisher.

C'est la probabilité de la quantité :

$$t = \frac{z_0}{\sqrt{\frac{z_1^2 + \dots + z_n^2}{n}}}$$

où $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$ sont indépendantes, normales, centrées, et de même écart-type σ . (Elles peuvent, en particulier, être réduites).

Cette loi est extrêmement utile pour la détermination des intervalles de confiance, qui permettent de déceler la présence d'une erreur systématique, de considérer une mesure comme aberrante, un appareil comme défectueux, etc. L'espérance mathématique de t est nulle, sa variance σ_t^2 vaut $\frac{n}{n-2}$.

VIII.4. La loi de Fisher-Snedecor.

C'est la loi de probabilité suivie par la quantité :

$$F = \frac{\frac{\chi_1^2}{n_1}}{\frac{\chi_2^2}{n_2}}$$

dans laquelle χ_1^2 et χ_2^2 sont des v. a. de Pearson à n_1 et n_2 (respectivement) degrés de libertés.

Elle permet de comparer significativement les variances de deux échantillons et donc de classer des méthodes, de mesurer l'habileté d'une classe dans telle ou telle manipulation, comme les dosages en chimie, etc. [3].

Nous n'entrerons pas dans le détail des applications de ces lois au « calcul des incertitudes », car elles sont multiples et constituent souvent des cas d'espèce. Elles sont très importantes, mais les simples considérations de variance, comme celles qui aboutissent à la loi de propagation des erreurs et à ses applications, indépendantes des lois proprement dites, nous paraissent être des préoccupations premières pour les professeurs, et au fur et à mesure de la progression de leurs études, pour les élèves.

BIBLIOGRAPHIE

-
- [1] *Journée pédagogique de Bordeaux* (octobre 1979). B.U.P. n° 627.
- [2] Jörg W. MÜLLER. — *Les incertitudes de mesure* dans « La Physique ». *Encyclopédie scientifique de l'Univers*. Gauthier-Villars (1981).
- A. ALLISY. — *Les incertitudes des mesures. Applications pratiques*. Bulletin B.N.M. n° 53, juillet 1983.
- [3] R. MOREAU. — *Exploitation d'une série de mesures*. B.U.P. n° 596.
- [4] B.-L. Van der WAERDEN. — *Statistique mathématique*. Dunod 1967.

BIBLIOGRAPHIE COMPLEMENTAIRE

-
- J. BASS. — *Eléments de calcul des probabilités*. Masson 1974.
- P. JAFFARD. — *Initiation aux méthodes de la statistique et du calcul des probabilités*. Masson 1973.
- M.-H. QUENOUILLE. — *Méthodes de calcul statistique rapides*. Dunod 1964.
- C.E.A. — *Statistique appliquée à l'exploitation des mesures* (2 tomes). Masson 1978.
- S. AÏVAZIAN. — *Etude statistique des dépendances*. Editions de Moscou 1970.
- G.W. SNEDECOR et W.G. COCHRAN. — *Méthodes statistiques*. Association de coordination technique agricole. Paris 1971.
- A.F.N.O.R. — *Recueil de normes de la statistique*. Tomes 1 et 2. 1974.
-