

Étude du mouvement de 2 solides reliés par un ressort

par Marc CHAPELET,

11 bis, rue Ernest-Psichari, 78150 Le Chesnay.

En mécanique, l'exploitation d'un enregistrement effectué à l'aide d'une table JEULIN, peut être réalisée à différents niveaux : depuis la classe de seconde jusqu'en D.E.U.G.

PRECAUTIONS A PRENDRE LORS DE L'ENREGISTREMENT.

On étudie le mouvement de deux solides de masses $M_A \simeq 660$ g et $M_B \simeq 990$ g reliés par un ressort à spires non jointives, se déplaçant sur une table parfaitement horizontale ; l'intervalle de temps τ pour les pointés a été choisi égal à 0,040 seconde (fig. 1).

Le ressort de constante de raideur $k = (26 \pm 1)$ N. m⁻¹ (déterminée par allongement sous l'action du poids de diverses masses marquées) ne doit pas présenter de déformation accidentelle. Le plateau de la table JEULIN et le papier carbone ne doivent présenter aucune aspérité, aussi est-il nécessaire de frotter énergiquement le plateau à l'aide d'un chiffon. On chasse facilement la poussière, sans abimer la feuille de carbone en déplaçant sur celle-ci le mobile autoporteur dont la soufflerie est en marche. Les accumulateurs contenus dans les deux mobiles autoporteurs doivent être bien chargés pour minimiser le ralentissement dû aux frottements. Lorsque le ressort n'est ni tendu ni comprimé, la distance entre les centres d'inertie A et B des deux mobiles est $L_0 = 237$ mm. La masse du ressort est négligée dans l'exploitation de l'enregistrement.

ANALYSE DE L'ENREGISTREMENT.

1) Le mouvement du centre d'inertie G du système total.

Cette étude peut être entreprise en classe de seconde. Le système total, constitué du ressort et des deux mobiles, se comporte en première approximation, comme un système isolé (résultante nulle des forces extérieures).

Le mouvement de G doit donc être rectiligne uniforme (le référentiel est évidemment rapporté à la table d'enregistrement).

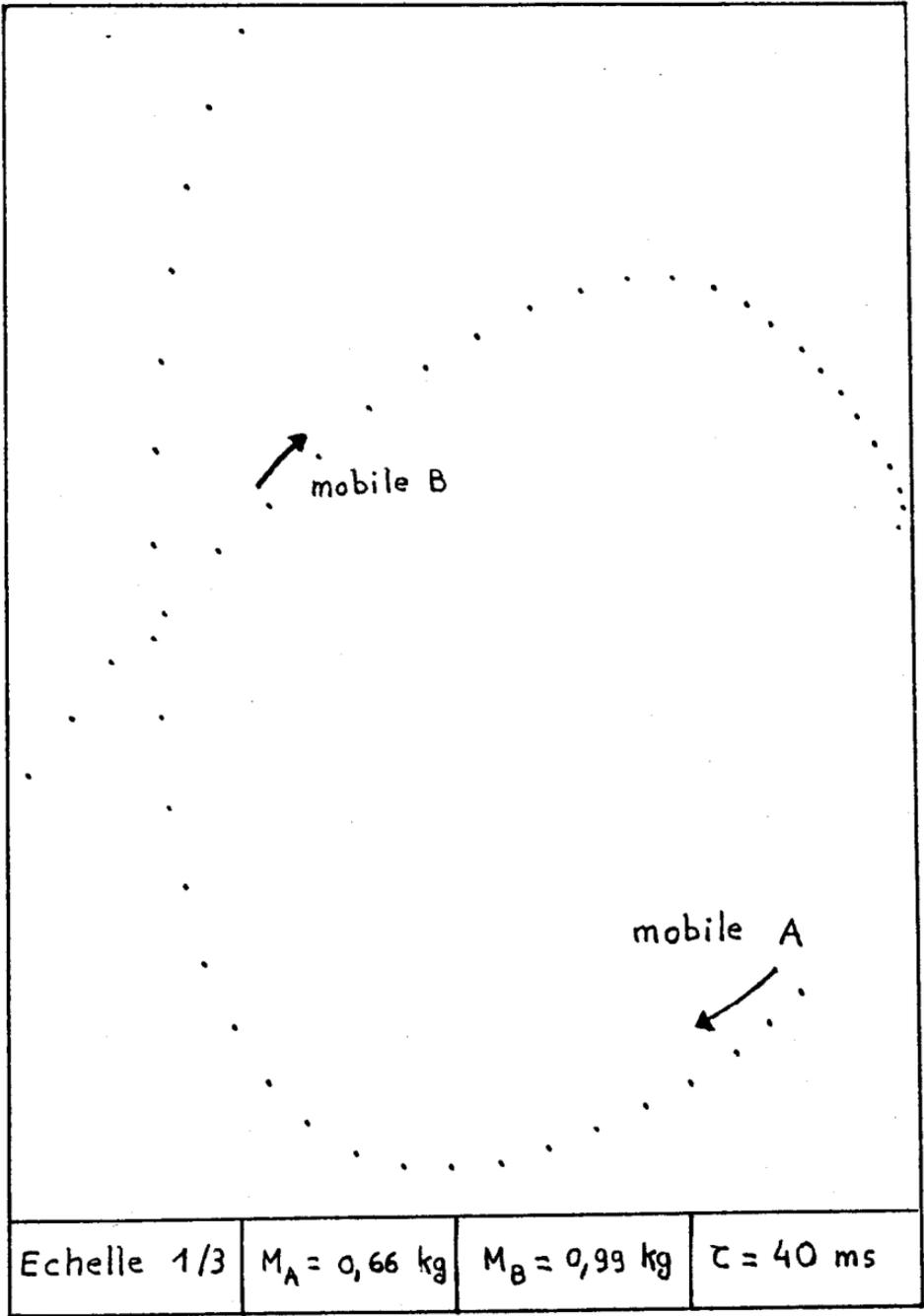


Fig. 1. — Enregistrement du mouvement de deux mobiles reliés par un ressort.

Les coordonnées de G sont données à partir de la relation :

$$\vec{OG} = \frac{M_A \vec{OA} + M_B \vec{OB}}{M_A + M_B}.$$

On en déduit que :

$$\vec{AG} = \frac{M_B \vec{AB}}{M_A + M_B} \quad \text{et} \quad AG = AB \cdot \left(\frac{M_B}{M_A + M_B} \right)$$

numériquement, on a :

$$\frac{M_B}{M_A + M_B} = \frac{990}{660 + 990} = 0,60.$$

Sur la fig. 2 sont reportées les positions successives de G. La trajectoire est rectiligne et le mouvement, au ralentissement près, peut être considéré comme rectiligne uniforme.

Sur l'enregistrement original (à l'échelle 1), les distances $G_n G_{n+2}$ ont des valeurs comprises entre 18 et 16,5 mm ; ce qui conduit à une valeur moyenne de la vitesse V_G de G :

$$V_G \simeq \frac{G_n G_{n+2}}{2\tau} \simeq \frac{1,8}{2 \times 0,04} \simeq \underline{\underline{22 \text{ cm. s}^{-1}}}.$$

2) La quantité de mouvement totale \vec{p} .

La notion de dérivée d'une fonction étant inconnue aux élèves de seconde, la vitesse d'un point est définie comme le rapport de la distance séparant deux positions successives et très voisines de ce point, à l'intervalle de temps τ , ou encore :

$$\vec{V} \text{ au point } A_n = \vec{V}_{A_n} = \frac{\overrightarrow{A_{n-1} A_{n+1}}}{2\tau}$$

à condition que τ soit le plus petit possible.

Ainsi :

$$\vec{V}_{A_{11}} = \frac{\overrightarrow{A_{10} A_{12}}}{2\tau}; \quad \vec{V}_{B_{11}} = \frac{\overrightarrow{B_{10} B_{12}}}{2\tau}; \quad \vec{V}_{G_{11}} = \frac{\overrightarrow{G_{10} G_{12}}}{2\tau}.$$

Les quantités de mouvement s'écrivent donc :

$$\vec{p}_{A_{11}} = M_A \vec{V}_{A_{11}} \quad \vec{p}_{B_{11}} = M_B \vec{V}_{B_{11}}$$

et :

$$\vec{p}_{11} = (M_A + M_B) \vec{V}_{G_{11}}.$$

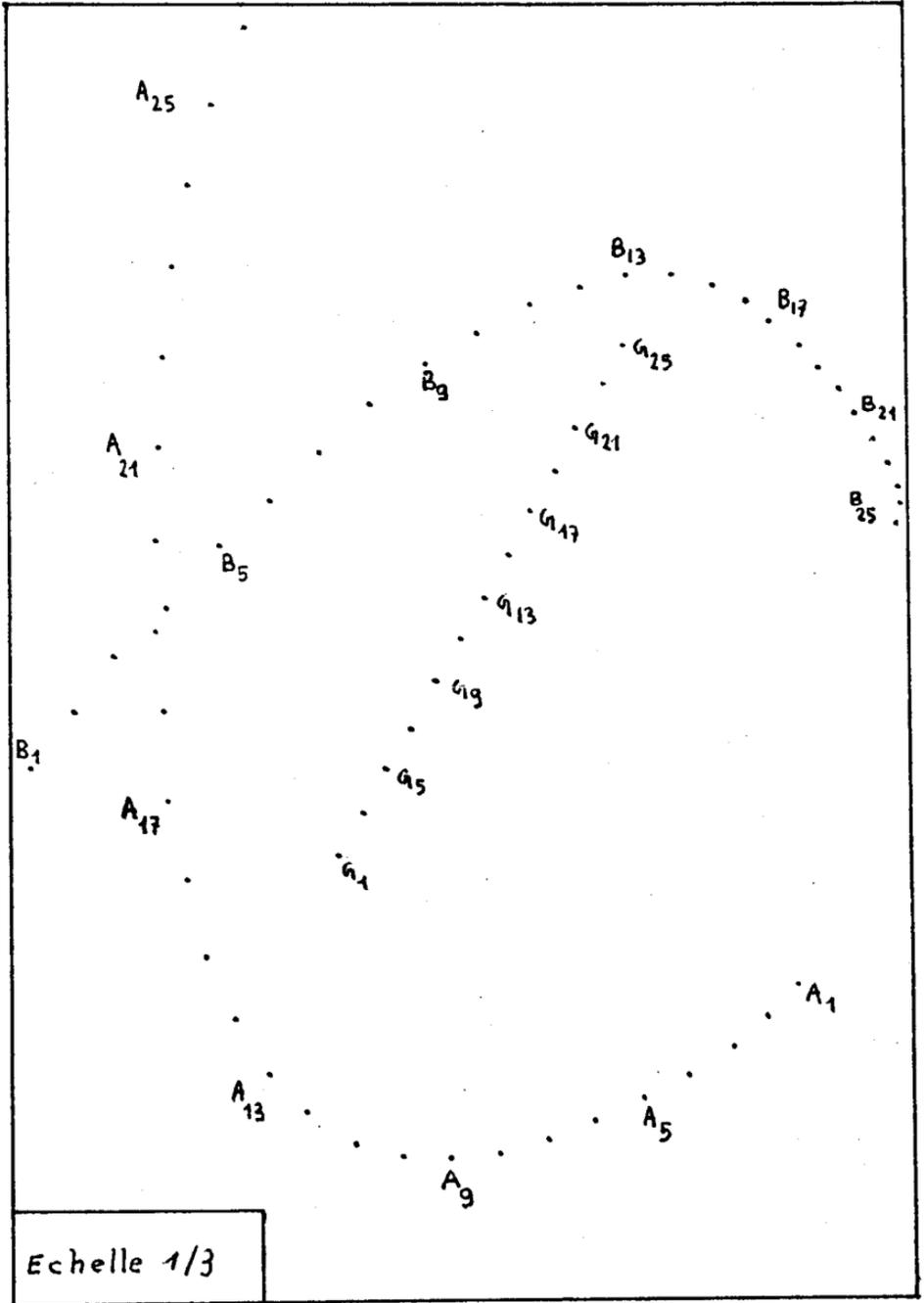


Fig. 2. — Trajectoire du centre d'inertie G du système total.

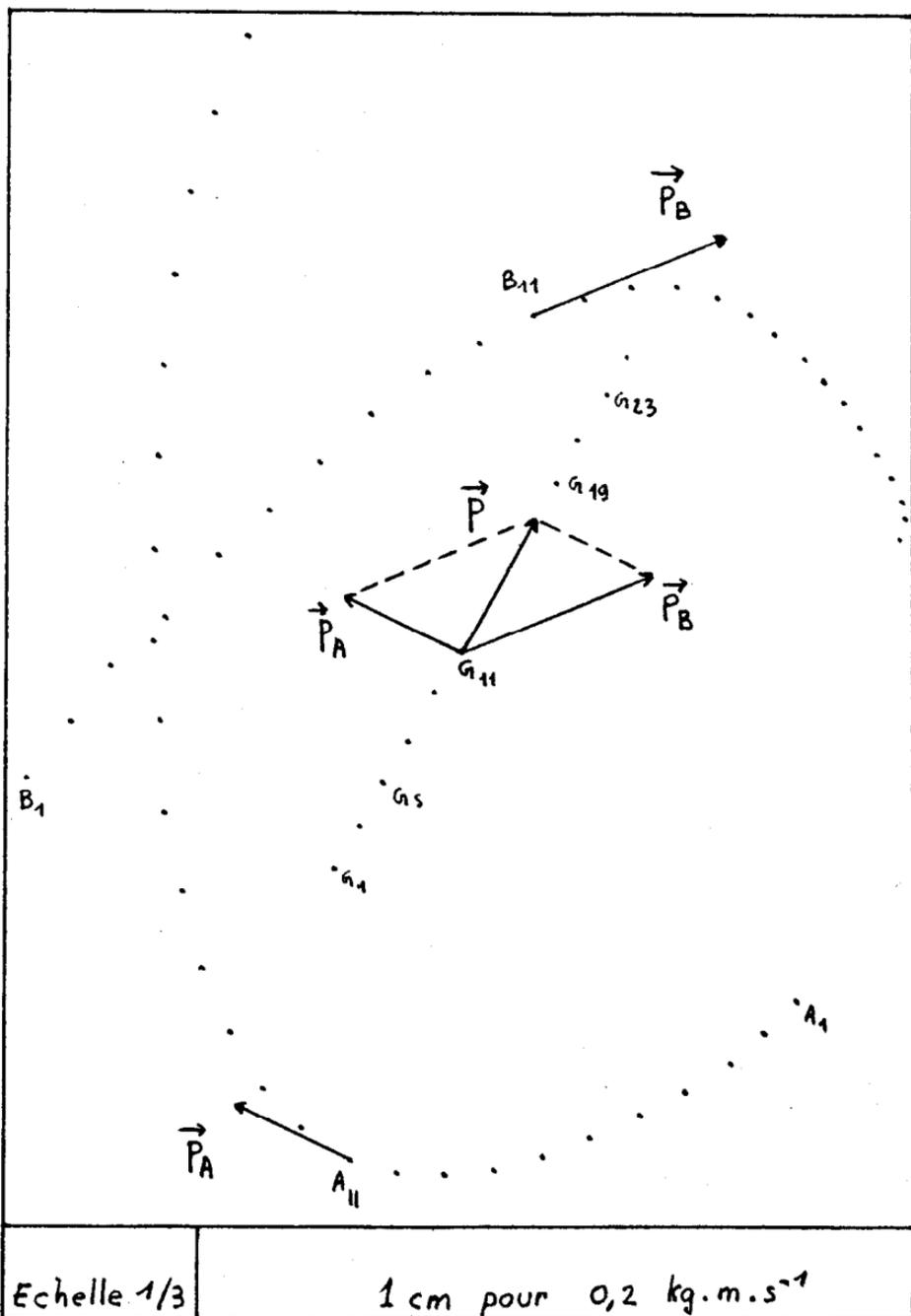


Fig. 3. — Vérification expérimentale par construction vectorielle de la relation : $\vec{p} = \vec{p}_A + \vec{p}_B$.

Après avoir choisi une échelle judicieuse de quantité de mouvement, les élèves vérifient par construction vectorielle, au point G_{11} par exemple, que : $\vec{p} = \vec{p}_A + \vec{p}_B$. Cette relation découle évidemment de la relation barycentrique (fig. 3).

3) Le principe d'interaction. Notions de force (à partir de la classe de seconde).

Lorsque le ressort n'est ni tendu, ni comprimé, chacun des mobiles a tendance à suivre une trajectoire rectiligne. D'après la fig. 1, on constate qu'il n'en est rien, le ressort est toujours tendu, principalement au voisinage des points B_{10} à B_{17} (et A_{10} à A_{17}), il suffira d'observer la courbure des trajectoires de A et de B. En classe de seconde, on vérifie le principe d'interaction, à l'aide de la variation locale de la quantité de mouvement de A et de B, c'est-à-dire on vérifie que $\vec{\Delta p}_A = -\vec{\Delta p}_B$ en deux points de l'enregistrement (ici en A_{11} et B_{11}).

On a :

$$\vec{\Delta p}_{A_{11}} = \vec{p}_{A_{12}} - \vec{p}_{A_{10}} = M_A (\vec{V}_{A_{12}} - \vec{V}_{A_{10}}) = M_A \left(\frac{\vec{A}_{11} \vec{A}_{13}}{2\tau} - \frac{\vec{A}_9 \vec{A}_{11}}{2\tau} \right)$$

$$\vec{\Delta p}_{A_{11}} = \frac{M_A}{2\tau} (\vec{A}_{11} \vec{A}_{13} + \vec{A}_{11} \vec{A}_9) = \left(\frac{M_A}{2\tau} \cdot \vec{A}_{11} \vec{Z}_{11} \right)$$

en posant : $\vec{A}_{11} \vec{Z}_{11} = \vec{A}_{11} \vec{A}_{13} + \vec{A}_{11} \vec{A}_9$.

Se reporter à la construction vectorielle de la fig. 4.

De même :

$$\vec{\Delta p}_{B_{11}} = \frac{M_B}{2\tau} (\vec{B}_{11} \vec{B}_{13} + \vec{B}_{11} \vec{B}_9) = \frac{M_B}{2\tau} \cdot \vec{B}_{11} \vec{Y}_{11}.$$

On constate (fig. 4) que $\vec{A}_{11} \vec{Z}_{11}$ et $\vec{B}_{11} \vec{Y}_{11}$ ont mêmes directions et des sens opposés.

En tenant compte des masses M_A et M_B , on vérifie que $\vec{\Delta p}_{A_{11}}$ et $\vec{\Delta p}_{B_{11}}$ sont des vecteurs opposés :

$$\vec{\Delta p}_{A_{11}} \simeq -\vec{\Delta p}_{B_{11}}.$$

* La relation entre force et taux de variation de la quantité de mouvement étant hors programme en seconde, le paragraphe ci-après et le paragraphe 4 concernent plutôt la classe de terminale.

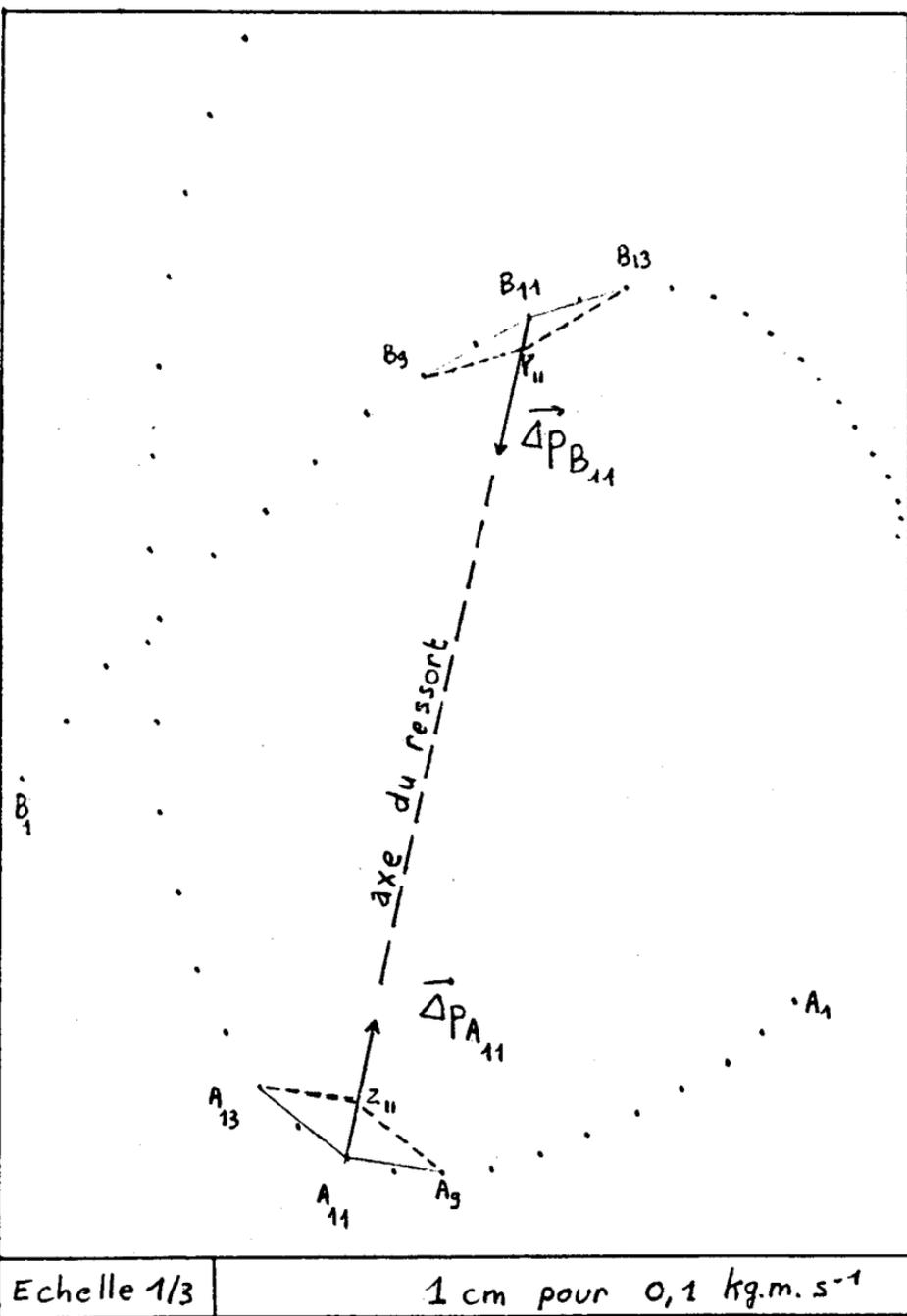


Fig. 4. — Vérification par construction du principe d'interaction :

$$\vec{\Delta p}_A = -\vec{\Delta p}_B \text{ soit : } \vec{F}_A = -\vec{F}_B.$$

La force \vec{F}_{A11} subie par le mobile A exercée par l'intermédiaire du ressort s'écrit :

$$\vec{F}_{A11} = \frac{\vec{p}_{A12} - \vec{p}_{A10}}{t_{12} - t_{10}} = \frac{\Delta \vec{p}_{A11}}{2\tau} = \frac{M_A}{4\tau^2} \cdot \vec{A}_{11} \vec{Z}_{11}$$

(ces égalités ne sont vraies que si τ est infiniment petit).

De même :

$$\vec{F}_{B11} = \frac{M_B}{4\tau^2} \cdot \vec{B}_{11} \vec{Y}_{11}.$$

On a donc vérifié que : $\vec{F}_A \simeq -\vec{F}_B$. Cette relation traduit le principe d'interaction.

4) Variation de l'intensité de la force F_A (ou F_B) en fonction de l'allongement x .

On a : $x = AB - L_0$ avec $L_0 \simeq 237$ mm.

Les valeurs de x figurent dans le tableau en annexe.

La fig. 5 montre l'allure de AZ en fonction de x . Comme

$$AZ = \frac{4\tau^2}{M_A} \cdot F_A, \text{ la fig. 5 représente aussi la variation de } F_A \text{ en}$$

fonction de x ; c'est une droite passant par l'origine, de pente

$\frac{21}{80}$ (sans unité). On est donc conduit à poser $F_A = kx$ avec

$$k = \frac{M_A}{4\tau^2} \cdot \text{pente} \simeq \frac{0,66}{4(0,04)^2} \times \frac{21}{80} \simeq \underline{\underline{27 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}}}.$$

Cette valeur est en excellent accord avec la valeur de k déterminée par allongement dû au poids de diverses masses marquées.

5) L'énergie totale du système (à partir des classes de première et terminale).

La fig. 6 (voir les valeurs numériques en Annexe) montre l'allure de l'énergie E en fonction du temps. E est la somme de

l'énergie cinétique $\frac{1}{2} M_A V_A^2 + \frac{1}{2} M_B V_B^2$ et de l'énergie

potentielle $\frac{1}{2} kx^2$.

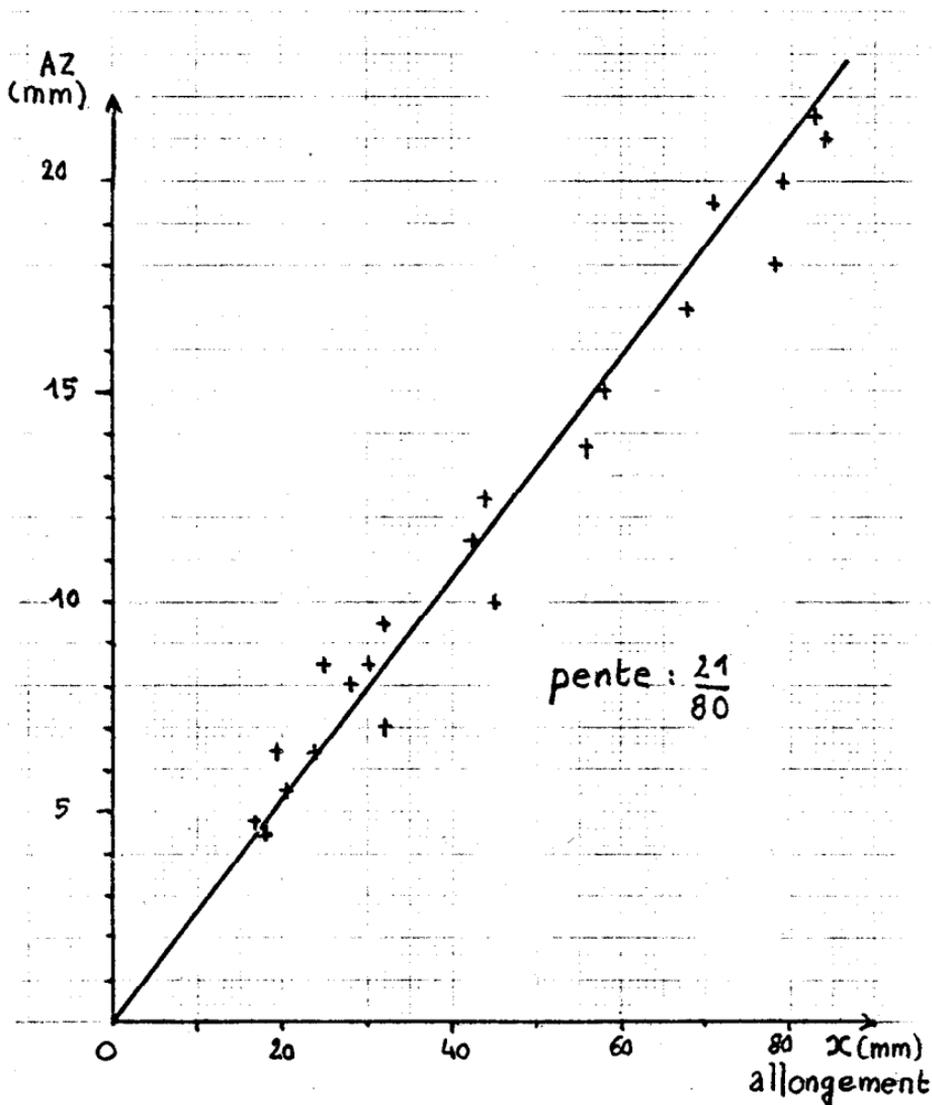


Fig. 5. — Courbe représentant l'intensité de la force F_A exercée par le ressort sur le mobile A en fonction de l'allongement x (la quantité AZ est proportionnelle à F_A : $F_A : F_A = AZ \cdot \frac{M_A}{4\pi^2}$).

$$F_A : F_A = AZ \cdot \frac{M_A}{4\pi^2}$$

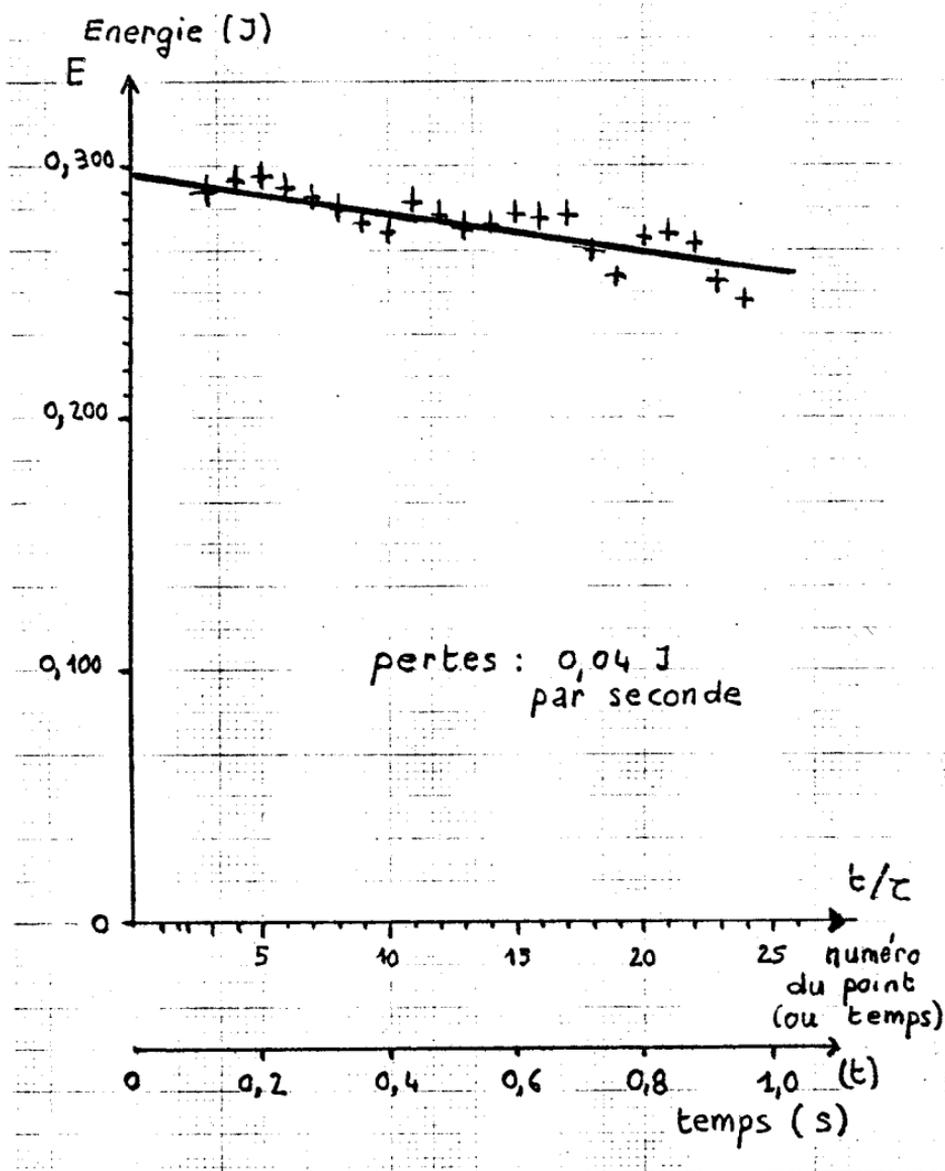


Fig. 6. — Courbe représentant la variation de l'énergie mécanique totale E en fonction du temps.

S'il n'y avait aucune dissipation d'énergie (essentiellement par frottement solide des mobiles sur le support), E désignerait l'énergie totale du système.

Le choix du ressort doit être judicieux si l'on veut que son rôle ne soit pas négligeable ou trop important ; il faut que les trois quantités $\frac{1}{2} M_A V_A^2$, $\frac{1}{2} M_B V_B^2$, $\frac{1}{2} kx^2$ aient des valeurs du même ordre de grandeur (se reporter aux valeurs en Annexe). On y remarquera aussi que l'énergie potentielle est bien minimale lorsque l'énergie cinétique $\frac{1}{2} M_A V_A^2 + \frac{1}{2} M_B V_B^2$ est maximale.

On constate (fig. 6) que l'énergie « totale » E diminue au cours du temps à raison de 0,04 J par seconde. En une seconde, l'énergie E a diminué de 13 % environ.

La décroissance de E en fonction du temps au-delà de une seconde n'est certainement plus linéaire, puisque la puissance des forces de frottement $p = \vec{f}_A \cdot \vec{V}_A + \vec{f}_B \cdot \vec{V}_B$ n'est pas constante, même dans le cas d'un frottement solide.

6) Précision et incertitudes.

Sur l'enregistrement original (à l'échelle 1), en opérant soigneusement, la précision sur les vitesses V_A et V_B , et sur l'allongement x atteint 0,5 à 1,5 % (soit 1 à 3 % sur les carrés : V_A^2 , V_B^2 , x^2).

Sans se lancer dans des calculs complexes et fastidieux, comme les trois termes de l'énergie « totale » E sont du même ordre de grandeur, l'incertitude relative sur E correspond à peu près à celle sur chacun des trois termes, soit 1 à 3 %.

Ceci conduit à une incertitude absolue moyenne de 0,006 J sur l'énergie « totale » E.

Je tiens à remercier pour leur aide efficace les préparateurs du laboratoire du lycée Hoche à Versailles.

Remarques.

* La majorité des égalités écrites dans cet article ne sont rigoureusement vraies que si l'intervalle de temps τ est extrêmement petit. L'exploitation de l'enregistrement montre que la valeur de 40 millisecondes est convenable. La valeur de τ est bien choisie tant qu'il est possible de confondre avec une bonne approximation l'arc curviligne entre deux points A_n et A_{n+1} , avec la corde joignant ces points.

* Je tiens à la disposition des collègues intéressés, l'enregistrement original à l'échelle 1 qui est très lisible (format $\simeq 30 \times 40$ cm).

BIBLIOGRAPHIE

- M. GATECEL, *Mécanique sur coussin d'air*, B.U.P. n° 603, avril 1978, p. 883-922.
- R. MOREAU, *Chocs de deux mobiles ; conséquences des frottements*, B.U.P. n° 611, février 1979, p. 617-623.
- M. BARBASTE, *Centre d'inertie d'un système isolé*, B.U.P. n° 611, février 1979, p. 625-634.
- C. SÉBILLE, J. AUTRAN, C. SACCOMAN, *Mécanique sur coussin d'air*, B.U.P. n° 618, novembre 1979, p. 169-180.

ANNEXE :

VALEURS EXPERIMENTALES

Points	V_A cm. s^{-1}	V_B cm. s^{-1}	$\frac{1}{2} M_A V_A^2$ Joule	$\frac{1}{2} M_B V_B^2$ Joule	distance AB (mm)	allonge menée x (mm)	AZ (mm)	$\frac{1}{2} K x^2$ Joule	Energie totale E Joule
A ₂ B ₂	43	65	0,061	0,205	277,3	40,3	X	0,022	0,292
A ₃ B ₃	45	65,6	0,067	0,213	265	28	8	0,0405	0,290
A ₄ B ₄	46,6	66,2	0,072	0,217	257,5	20,5	5,5	0,006	0,295
A ₅ B ₅	47,5	66,3	0,0745	0,218	254	17	4,7	0,004	0,296
A ₆ B ₆	46,9	65,6	0,0725	0,213	258	21	5,5	0,006	0,292
A ₇ B ₇	46,3	64,4	0,071	0,205	267	30	8,5	0,042	0,288
A ₈ B ₈	45,6	64,9	0,069	0,1895	279,5	42,5	11,5	0,0245	0,283
A ₉ B ₉	44,4	58,8	0,065	0,171	293	56	13,7	0,042	0,278
A ₁₀ B ₁₀	43,4	55	0,062	0,150	305	68	17	0,0625	0,274
A ₁₁ B ₁₁	47,1	51	0,073	0,129	316	79	20	0,084	0,286
A ₁₂ B ₁₂	50,6	45,8	0,0845	0,104	320	83	24,5	0,093	0,291
A ₁₃ B ₁₃	54,5	41,3	0,098	0,0845	321	84	21	0,095	0,278
A ₁₄ B ₁₄	61,2	38	0,124	0,0715	315	78	18	0,082	0,277
A ₁₅ B ₁₅	67,9	35	0,152	0,0605	308	71	19,5	0,068	0,281
A ₁₆ B ₁₆	74,5	32,5	0,183	0,0525	295	58	15	0,0455	0,281
A ₁₇ B ₁₇	79	31	0,206	0,0475	282	45	10	0,027	0,281
A ₁₈ B ₁₈	79	30,4	0,206	0,0455	269	32	7	0,014	0,266
A ₁₉ B ₁₉	79	29	0,206	0,0415	262	25	8,5	0,0085	0,256
A ₂₀ B ₂₀	83	28	0,228	0,039	256,5	19,5	6,5	0,005	0,272
A ₂₁ B ₂₁	84	27	0,233	0,036	255	18	4,5	0,0045	0,273
A ₂₂ B ₂₂	83	26,2	0,228	0,034	261	24	6,5	0,008	0,270
A ₂₃ B ₂₃	80,6	24	0,2145	0,0285	269	32	9,5	0,014	0,257
A ₂₄ B ₂₄	77,5	21,2	0,198	0,0225	281	44	12,5	0,026	0,247

K a été choisi égal à 27 N.m⁻¹.