

Résonance en mécanique

par Claude COSNARD,

Prytanée National militaire, La Flèche.

Le but de la manipulation proposée est d'étudier les oscillations forcées d'un système mécanique et de mettre en évidence : les régimes transitoire et permanent, les résonances de vitesse et d'amplitude, le déphasage résonateur — exciteur lors des régimes permanents sinusoidaux.

Il est possible, à mon sens, de réaliser la manipulation qualitativement en classes de terminales C, D et E et quantitativement en classes de mathématiques supérieures.

I. DISPOSITIF. MATERIEL UTILISE (fig. 1).

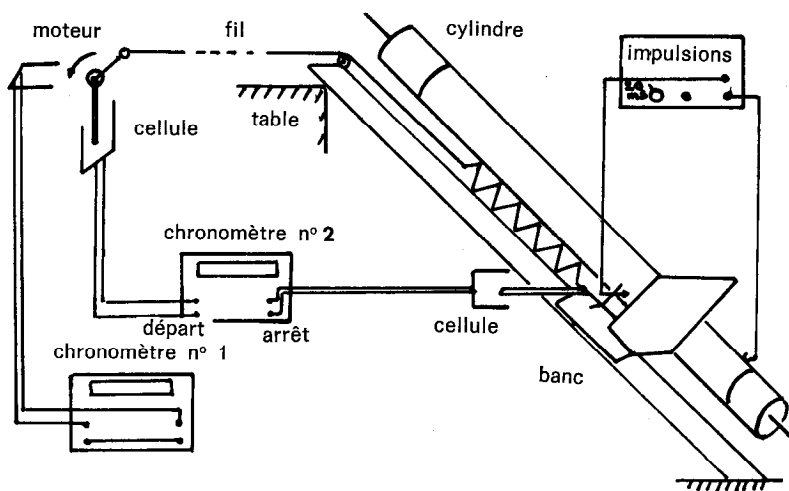


Fig. 1

Le banc à coussin d'air est celui de la marque JEULIN auquel on a adjoint définitivement un tuyau de PVC de 100 mm de diamètre avec un moteur permettant sa rotation (48,5 s/tr). Ce cylindre est recouvert d'un papier graphité. Une d.d.p. de 3 000 volts appliquée entre l'éclateur fixé sur le mobile et le

papier graphité permet l'inscription des points à la fréquence de 50 Hz (20 ms) (*).

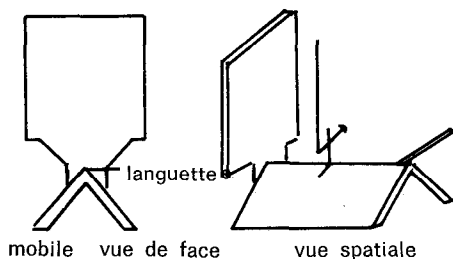


Fig. 2

Fig. 3

Le banc à coussin d'air repose sur le bord de la pailleasse et sur le sol de la salle de cours. L'inclinaison est choisie pour que l'amplitude à la résonance soit inférieure à l'allongement du ressort lorsque le mobile est accroché à une extrémité, le tout étant au repos sur le banc à coussin d'air.

Le moteur excitateur est de la marque MATLABO. Un excentrique de longueur a (2,55 cm) permet d'attacher un fil servant à l'entraînement de l'extrémité du ressort.

Une languette en carton liée à l'axe d'un moteur passe devant une cellule photoélectrique reliée à un chronomètre n° 1. Celle-ci déclenche le départ du chronomètre par occultation de la cellule, puis l'arrêt par l'occultation suivante de cette même cellule. On mesure ainsi la période de rotation du moteur.

Cette languette de carton passe aussi devant une deuxième cellule photoélectrique commandant le départ du chronomètre n° 2. L'arrêt de ce dernier est assuré par le passage d'une languette en carton portée par le mobile devant une troisième cellule.

On mesure ainsi le déphasage entre le mobile et le moteur.

Chronomètres et cellules sont de la marque DIDALAB. Les deux chronomètres sont identiques et possèdent les deux modes de fonctionnement cités précédemment (départ et arrêt par une seule cellule, ou départ et arrêt par deux cellules différentes).

Le mobile est celui du banc à coussin d'air auquel on a ajouté un amortisseur. Celui-ci, pour être rigide, est constitué d'une armature en carton ($L = l = 19$ cm, $e = 1,5$ mm) à l'in-

(*) La marque JEULIN propose actuellement un banc avec un cylindre.

térieur de laquelle a été collé un papier cellophane. L'ensemble n'alourdit que très peu le mobile tout en augmentant ($\times 4$) le frottement fluide par air.

Le ressort est un ressort ordinaire : $k = 6,4 \text{ N/m}$.

II. THEORIE.

A un instant t , en choisissant IJ grand devant a (fig. 4), on peut écrire : $I'J = IJ + a \sin \omega t$.

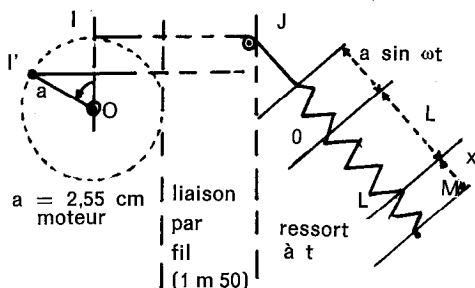


Fig. 4

O, L sont les extrémités du ressort à $t = 0$, c'est-à-dire le mobile étant au repos sur le plan incliné.

L est la longueur du ressort dans cette position. L_0 est sa longueur à vide.

Théorème du centre d'inertie appliqué à la masse M :

$$M \ddot{x} = -k(a \sin \omega t + L + x - L_0) + Mg \sin \alpha - f_r \dot{x}$$

$-f_r \dot{x}$ représente les frottements fluides ;

$Mg \sin \alpha - k(L - L_0) = 0$ (condition d'équilibre).

$$M \ddot{x} + f_r \dot{x} + kx = -ka \sin \omega t.$$

Posons :

$$\lambda = f_r/2M \quad \omega_0^2 = k/M$$

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = -\omega_0^2 a \sin \omega t.$$

On est ramené à l'équation classique des oscillateurs.

x_m : amplitude maximale à la fréquence f .

Posons :

$$z = f/f_0 \quad \left(f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \right)$$

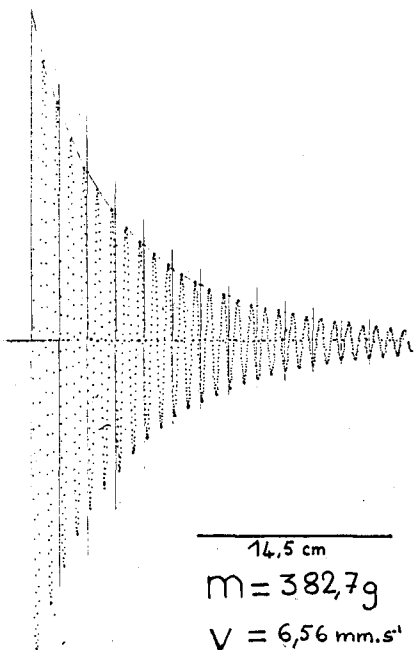
$$x_m = \frac{a}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + (f_r^2/M^2 \omega_0^2) z^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f_r \cdot \omega}{M (\omega^2 - \omega_0^2)}.$$

III. PARTIE EXPERIMENTALE.

a) Détermination du coefficient de frottement.

Le moteur étant arrêté, on enregistre les oscillations libres du ressort. On observe une décroissance *quasi* exponentielle de l'amplitude maximale (enregistrement n° 1 - fig. 5).



Enregistrement n° 1 : Oscillations libres.

$$\frac{x_n}{x_0} = \frac{e^{-\lambda (t_0 + n \Delta t)}}{e^{-\lambda t_0}}$$

$$\lambda = \frac{1}{n \Delta t} \cdot \ln (x_0/x_n)$$

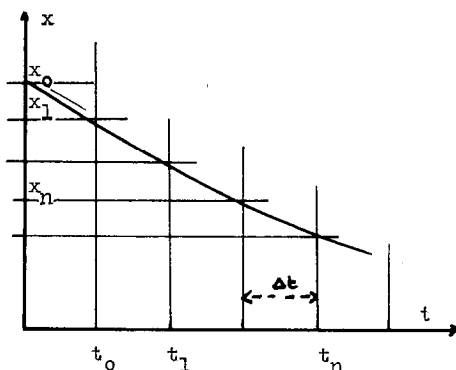


Fig. 5

$$\lambda = \frac{f_r}{2M} \quad f_r = \frac{2M}{\Delta t} \frac{1}{n} \cdot \ln(x_0/x_n).$$

Les mesures de l'enregistrement n° 1 ont donné ;

$$\frac{1}{n} \cdot \ln(x_0/x_n) = 0,28 \pm 0,02.$$

Le cylindre enregistreur tourne en 48,5 secondes, ce qui correspond à 318 mm de papier déroulé.

Sur l'enregistrement n° 1, on lit t représenté par 2,07 cm réels.

$$f_r = \frac{2 \times 0,3827}{2,07 \times 48,5/31,8} \times 0,28$$

$$f_r = 0,068 \text{ u. S. I.}$$

b) Détermination de la fréquence propre :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M}}.$$

b.1) Mesure de la constante de raideur par une méthode statique.

Une masse de 200 g allonge le ressort de 30,5 cm :

$$k = \frac{0,2 \times 9,81}{0,305} \quad k = 6,4 \text{ N/m}$$

la masse du mobile est $M = 0,3827$ kg (il s'agit de la masse totale amortisseur compris) :

$$f_0 = 0,65 \text{ Hz.}$$

b.2) Mesure de la fréquence propre à partir de l'enregistrement n° 1 :

$$\lambda = \frac{f_r}{2M} \quad \lambda = \frac{0,068}{2 \times 0,3827} \quad \lambda = 8,9 \cdot 10^{-2} \text{ u. S.I.}$$

$$\lambda \ll \omega_0 \Rightarrow T \simeq T_0 \left(1 + \frac{\delta^2}{8\pi^2} \right); \delta \text{ décrement logarithmique :}$$

$$\delta = 2\pi\lambda / (\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2})$$

$$\omega_0 = 2\pi \times 1,6 \Rightarrow \omega_0 = 4 \text{ rd. s}^{-1} \Rightarrow \delta = 0,14.$$

$$\delta^2 / 8\pi^2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ est donc très inférieur à 1.}$$

On peut confondre pseudo-période et période propre.

26,6 cm pour 26 oscillations sur l'enregistrement n° 1.

31,8 cm représentent 48,5 s de rotation.

$$T_0 = 1,56 \text{ s.} \quad f_0 = 0,64 \text{ Hz.}$$

c) Période transitoire.

On déclenche l'enregistrement électrique (étincelles tous les 20 ms) du mouvement du mobile et le moteur excitateur au même instant. Le cylindre enregistreur du banc à coussin d'air est en mouvement. L'enregistrement n° 2 fait bien apparaître, au bout

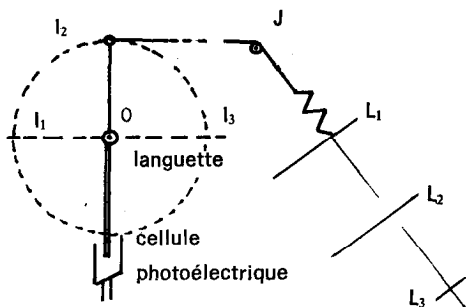
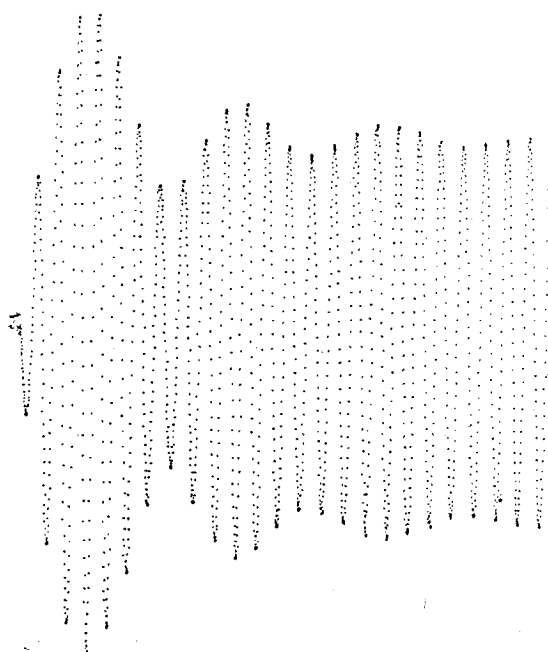


Fig. 6



16,2 cm

$$T = 1,78 \text{ s}$$

Enregistrement n° 2 : Régime transitoire.

d'un certain temps, un régime sinusoïdal permanent. Le début correspond à la superposition de ce dernier avec un mouvement sinusoïdal amorti exponentiellement.

La durée du régime transitoire est donc bien observable sur l'enregistrement mais aussi directement à l'œil lors de l'opération. De plus, le chronomètre mesurant le déphasage résonateur-excitateur se stabilise lorsque le mouvement permanent est établi.

d) Divers régimes permanents sinusoïdaux.

Le cylindre enregistreur est arrêté. Sur le papier graphité, on a tracé au préalable une échelle. Cette échelle est graduée en fréquence de 0 à 1 Hz. La pointe de l'éclateur du mobile JEULIN

sera, au début d'une expérience à une fréquence choisie, positionnée en face du point coïncidant de notre échelle.

On met le moteur en marche à la fréquence choisie (réglable avec le chronomètre n° 1).

Le régime permanent étant établi, c'est-à-dire le déphasage résonateur-excitateur stable (ceci se traduit par la stabilité de l'indication du chronomètre n° 2).

On appuie alors (une seule fois) sur le système de décharge électrique. L'amplitude maximale apparaît. L'ensemble des points du tracé sont irrégulièrement espacés faisant apparaître une vitesse maximale au passage par la position d'équilibre. La mesure de l'intervalle d'espace parcouru pendant 20 ms lors de ce passage par la position d'équilibre permet ainsi la mesure de la vitesse maximale possible pour une fréquence donnée (fig. 8).

On lit l'indication des chronomètres (1) et (2). :

- l'indication de (1) donne la période du moteur excitateur,
- l'indication de (2) donne le décalage horaire excitateur-résonateur.

Le rapport donne le déphasage.

On fait alors tourner le cylindre enregistreur à une nouvelle valeur de la fréquence de l'excitateur et on recommence.

L'enregistrement n° 3 donne l'ensemble des résultats obtenus pour diverses fréquences, dont un certain nombre de mesures plus nombreuses autour de la fréquence de résonance pour mieux faire ressortir la sélectivité d'un tel dispositif.

La résonance apparaît nettement sur l'enregistrement n° 3.

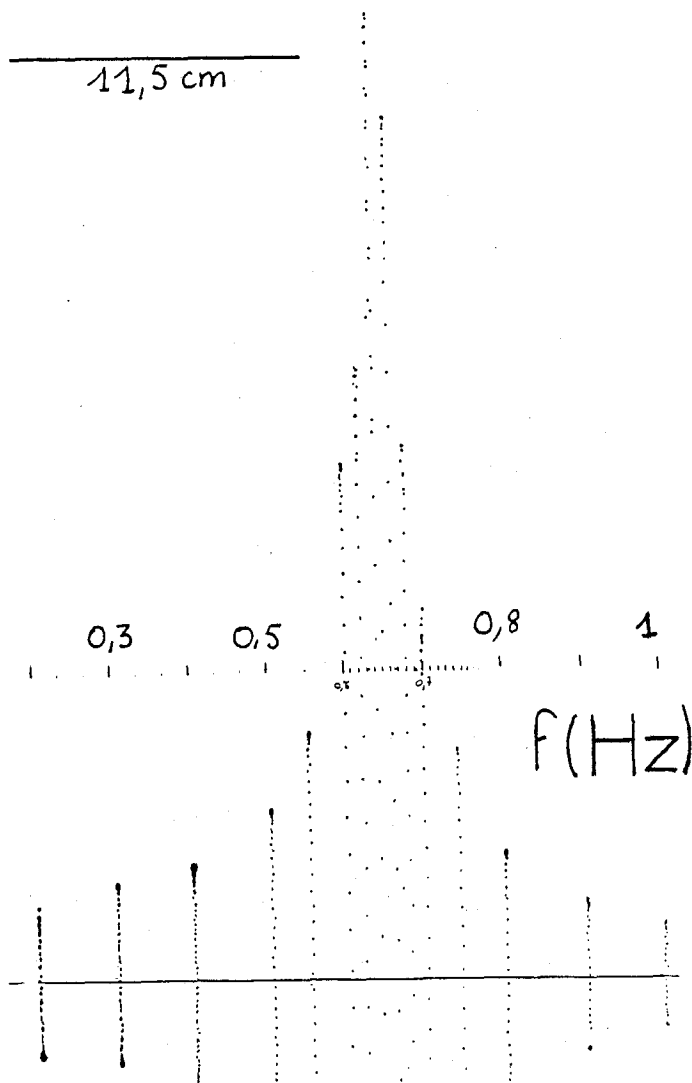
Remarque.

Le point à la résonance ne peut correctement être obtenu sur l'enregistrement n° 3 présenté ici car l'amplitude est trop grande et dépasse l'allongement du ressort au repos. Par conséquent, quoique maximale, l'amplitude ne peut être prise en considération du point de vue quantitatif.

(Il y a amélioration possible pour le prochain enregistrement).

e) *Tracé de la courbe de déphasage à partir des mesures (fig. 7).*

Les positions L1, L2, L3 du mobile (cf. fig. 6) correspondent aux positions I1, I2, I3 de l'excentrique. Il est important de régler les positions des cellules de départ et d'arrêt du chronomètre n° 2 dans les positions L2 et I2.



Enregistrement n° 3 : Résonance.

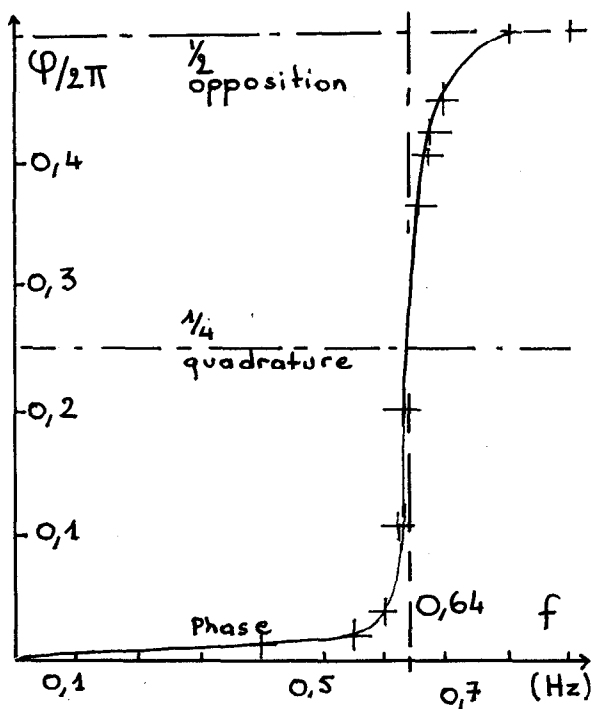


Fig. 7. — Déphasage.

(Hz) f	(s) t	$\varphi/2\pi$
0,2	0,04	0,0
0,4	0,05	0,02
0,5	0,03	0,02
0,59	0,06	0,035
0,60	0,07	0,042
0,62	0,17	0,11
0,64	0,32	0,2
0,65	0,47	0,3
0,67	0,59	0,4
0,69	0,64	0,44
0,7	0,65	0,45
0,8	0,62	0,5
0,9	0,56	0,5

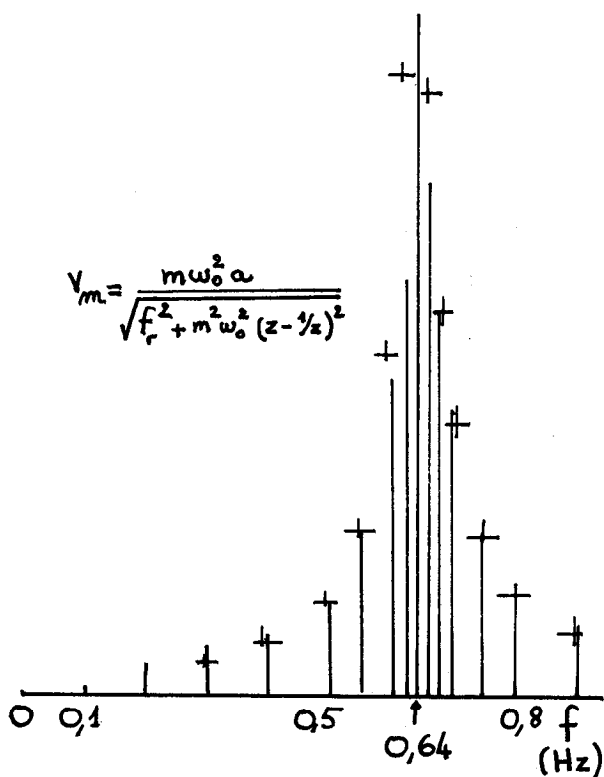


Fig. 8. — Résonance de vitesse.

traits pleins : à partir des mesures,

croix : à partir de la théorie en adoptant $f_r = 0,068$ uSI.

Les résultats montrent bien :

A basse fréquence, tout se passe comme s'il y avait absence de ressort, à la résonance quadrature et opposition de phase pour $f > f_0$.

Pour mieux observer à l'œil nu ce déphasage, on a placé un petit bouchon au début du ressort. On peut suivre à l'œil le mouvement du bouchon et du mobile.

IV. CONCLUSIONS.

Ce dispositif à l'avantage de montrer en même temps le déphasage et la résonance. Toutefois, il peut être allégé pour ne montrer que telle ou telle partie du phénomène de résonance.

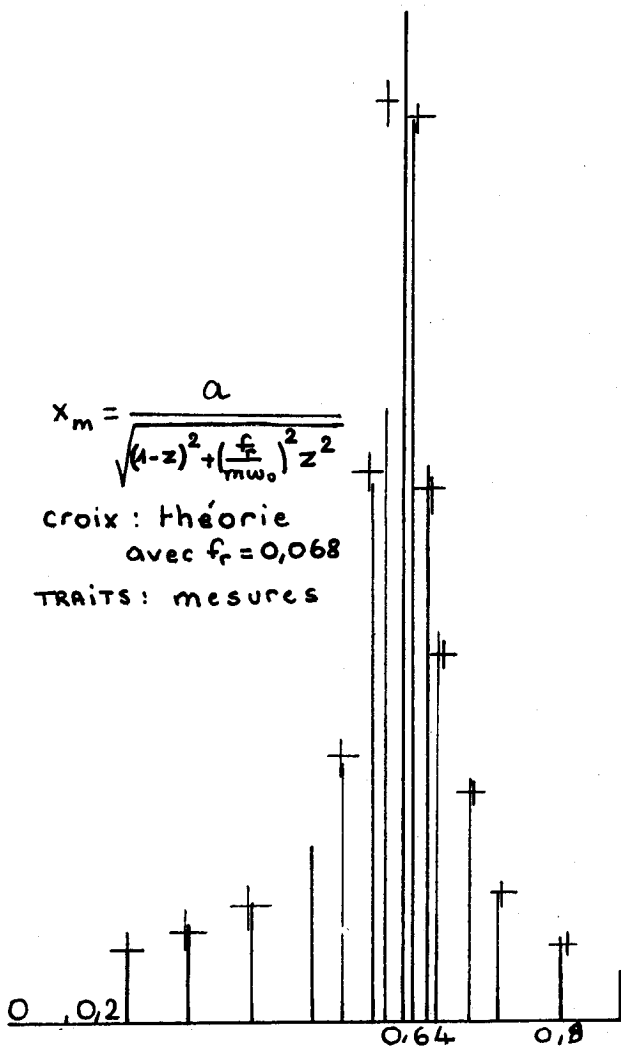


Fig. 9. — Résonance d'amplitude.

Par exemple, pour montrer la résonance de vitesse et d'amplitude, sont nécessaires :

- le banc, le mobile, le générateur d'impulsions,
- le moteur et le ressort.

On fait alors une suite discontinue d'enregistrement à diverses fréquences. Le cylindre enregistreur n'est donc pas indispensable. Il suffit de juxtaposer l'ensemble des enregistrements après avoir choisi une échelle représentant la fréquence pour les placer les uns à la suite des autres.

Matériel utilisé.

- Banc et accessoires : JEULIN (référence actuelle) 332018.
- Moteur : MATLABO n° 57 m.
- Chronomètres (n° 476) et cellules (743) de la marque DIDALAB.
- Générateur d'impulsions : JEULIN 281035.

BIBLIOGRAPHIE

H. GRÉ. — *Mécanique*. Editions J.-B. Baillières.

Remarques.

Les frottements fluides sont trop faibles pour faire une distinction entre fréquence de résonance de vitesse et d'amplitude, hélas !

Comment faire pour améliorer le frottement fluide sans trop alourdir le mobile et sans détendre le fil mobile moteur ?

Les enregistrements joints sont réels, photocopiés et réduits pour les besoins de la rédaction.

Je remercie tout le personnel de laboratoire qui m'a aidé et en particulier Monsieur D'AILLIÈRES qui a mis au point le cylindre tournant.
