

## Étude d'un résonateur à fréquences multiples :

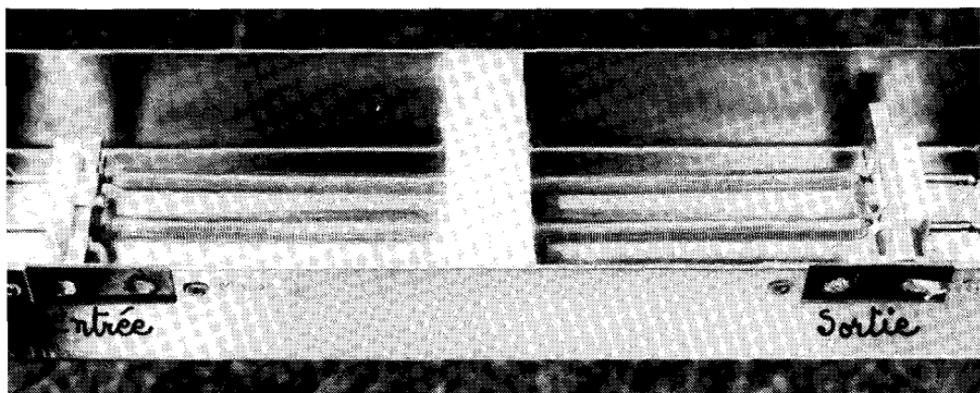
### LE RESSORT D'UNE LIGNE A RETARD

par René ALLARD,  
Lycée Bergson, Angers.

Mon objectif est de présenter quelques expériences qui permettent :

- de mesurer les fréquences de résonance d'un ressort,
- de déterminer la durée de propagation d'une onde le long du ressort précédent par différentes méthodes.

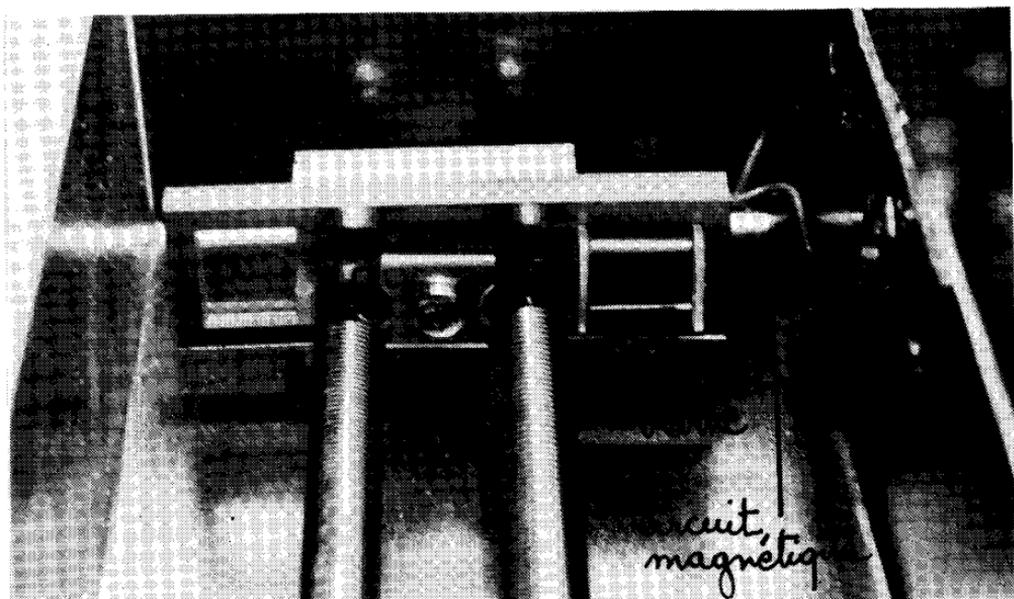
Le ressort utilisé est celui d'une ligne à retard, dispositif électromécanique conçu pour recréer artificiellement le phénomène de réverbération.



Photographie 1.

#### 1) LA LIGNE A RETARD.

La ligne à retard comprend un ou deux ressorts ; les extrémités de chaque ressort sont munies de petits aimants qui peuvent tourner autour d'un axe, confondu avec l'axe du ressort, dans l'entrefer d'un circuit magnétique équipé d'une bobine (photographies 1 et 2, fig. 1). Lorsqu'on applique une tension à



Photographie 2.

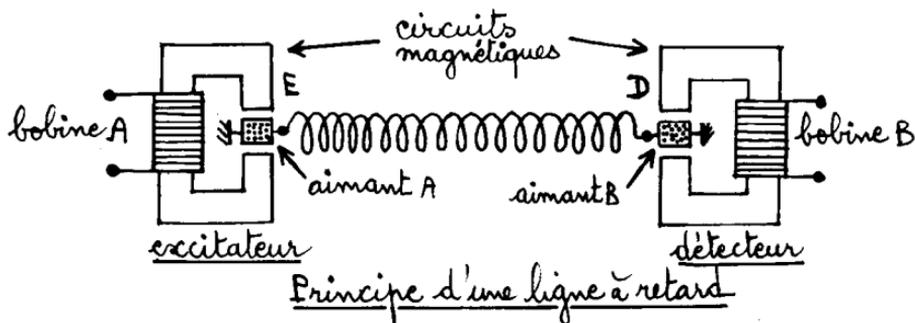


Fig. 1. — Principe d'une ligne à retard.

la bobine A de l'excitateur, l'aimant A tourne ; le ressort subit en conséquence une légère torsion ; cette torsion se propage le long du ressort et imprime à l'aimant B un mouvement de rotation, ce qui crée dans la bobine B une tension induite. La suspension des deux aimants étant très rigide, la plus grande partie de l'énergie se réfléchit sur les extrémités D et E du ressort ; le signal de torsion parcourt plusieurs fois le ressort tout en s'affaiblissant progressivement ; au bout d'un certain temps — temps de réverbération — le signal de torsion disparaît.

Les expériences qui seront décrites ont été réalisées avec un seul ressort, l'autre est maintenu immobile à l'aide de deux

pinces crocodile. Le ressort étant équipé d'un excitateur et d'un détecteur, il est assez facile d'étudier et de comparer les mouvements des extrémités E et D du ressort. On admettra que les angles de rotation des aimants sont proportionnels aux tensions existant aux bornes des bobines A et B.

## II) MATERIEL NECESSAIRE AUX EXPERIENCES.

1° La ligne à retard utilisée a pour référence MEB02. Le fabricant donne ses caractéristiques :

Impédance(\*) de la bobine A :  $16 \Omega$  ; intensité maximale : 350 mA ;

Impédance(\*) de la bobine B :  $10 \text{ k}\Omega$  ;

Durée de propagation : 25 à 30 ms ;

Fréquences : 100-3 000 Hz ;

Longueur du ressort : 14,5 cm environ ;

Longueur d'un aimant : 0,35 cm.

La ligne à retard est sensible aux vibrations mécaniques, elle devra être placée sur une plaque de mousse.

2° Les mesures vont montrer que l'écart entre deux fréquences de résonance consécutives est assez faible, 20 Hz environ. Pour obtenir des valeurs précises de la fréquence, il faudra donc utiliser un *générateur de fonctions*, muni d'un bouton de réglage des fréquences multitours, et un *fréquencemètre*. Les mesures ont été faites avec un fréquencemètre à 4 digits incorporé au générateur de fonctions.

3° On remarque que la bobine de l'excitateur a une impédance faible :  $4 \Omega$  pour  $N = 200 \text{ Hz}$  et  $19 \Omega$  pour  $N = 1 \text{ kHz}$ . Lorsqu'on relie directement la sortie —  $Z_s = 50 \Omega$  — d'un générateur de fonctions à l'excitateur, on peut observer une distorsion importante du signal sinusoïdal ou rectangulaire. Cette distorsion est très atténuée lorsque l'excitateur est alimenté avec un amplificateur de puissance dont l'impédance de sortie est de quelques ohms au plus (fig. 2).

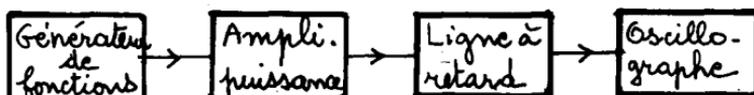


Fig. 2

Il faut vérifier que la température de la bobine de l'excitateur ne devient pas trop élevée.

(\*) Les valeurs des impédances indiquées par le fabricant correspondent à une fréquence voisine de 700 Hz.

## III) LES FREQUENCES DE RESONANCE DU RESSORT.

## 1° Résultats expérimentaux.

Une tension sinusoïdale est appliquée à l'excitateur ; on fait varier lentement sa fréquence. Sur l'écran de l'oscillographe, on obtient une sinusoïde représentant le mouvement de l'extrémité D du ressort ; l'amplitude de ce mouvement passe par des maxima et des minima. Cette expérience montre que le ressort possède plusieurs fréquences de résonance. Voici 2 séries de fréquences de résonance et les valeurs de l'écart  $\Delta N$  entre 2 fréquences consécutives :

$N$ (Hz)	947	967	987	1006	1025	1045	1064	1083	1103	1122	1142
$\Delta N$ (Hz)		20	20	19	19	20	19	19	20	19	20

$N$ (Hz)	169	189	209	228	248	267	288	308	328	348	367
$\Delta N$ (Hz)		20	20	19	20	19	21	20	20	20	19

On constate que la valeur moyenne de  $\Delta N$  est de 19,5 Hz. Les fréquences de résonance forment une progression arithmétique de raison 19,5 Hz environ.

## 2° Calcul des fréquences de résonance.

Le mouvement de l'extrémité D du ressort résulte de la superposition de deux séries d'ondes se propageant dans deux sens opposés. En appelant  $y(t)$  l'amplitude de torsion de E, le mouvement de E a pour équation  $y = a e^{i\omega t}$  en notation complexe. Les coefficients de réflexion des ondes en D et E sont respectivement  $r$  et  $r'$  ; négligeons l'amortissement des ondes le long du

ressort. Posons  $\varphi = \frac{\omega l}{c}$ ,  $l$  étant la longueur du ressort et  $c$  la célérité des ondes.

Représentons sur un schéma le trajet parcouru par les ondes qui arrivent en D et écrivons leurs équations (fig. 3).

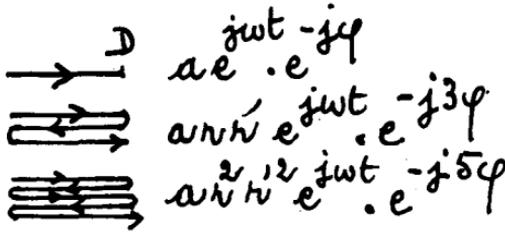


Fig. 3

L'équation générale d'une onde qui arrive en D est :

$$a r^n r'^n e^{-j(2n+1)\varphi} \cdot e^{j\omega t}; \quad n \in \mathbb{N}.$$

L'équation générale d'une onde qui vient de subir une réflexion en D est :

$$a r^{n+1} r'^n e^{-j(2n+1)\varphi} \cdot e^{j\omega t}.$$

L'amplitude complexe  $\mathcal{A}$  du mouvement de D est :

$$\mathcal{A} = a \sum_{n=0}^{\infty} r^n r'^n e^{-j(2n+1)\varphi} + a \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+1} r'^n e^{-j(2n+1)\varphi}$$

$$\mathcal{A} = a(1+r) e^{-j\varphi} \sum_{n=0}^{\infty} r^n r'^n e^{-j2n\varphi}.$$

Compte tenu de ce que  $r$  et  $r'$  sont inférieurs à 1, on a :  $r^n \rightarrow 0$  et  $r'^n \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

$$\mathcal{A} = \frac{a(1+r) e^{-j\varphi}}{1 - r r' e^{-j2\varphi}}.$$

Soit  $A$  l'amplitude réelle du mouvement de D ;  $A^2 = \mathcal{A} \mathcal{A}^*$  :

$$A^2 = \frac{a^2(1+r)^2}{(1 - r r')^2 + 4 r r' \sin^2 \varphi}.$$

Supposons que  $r = r'$  et posons  $m = \frac{4 r^2}{(1 - r^2)^2}$  :

$$A^2 = \frac{a^2}{(1 - r)^2} \cdot \frac{1}{1 + m \sin^2 \varphi}$$

$A^2$  est maximal pour  $\sin^2 \varphi = 0$  ;  $\varphi = k\pi$  ;  $\varphi = \frac{\omega l}{c}$ .

On en déduit les fréquences de résonance :

$$\boxed{N = k \frac{c}{2l}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

La valeur maximale de A est :  $A_{max} = \frac{a}{1-r}$ .

La valeur minimale de A correspond à  $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ; les

fréquences correspondantes sont :  $N = k \frac{c}{2l} + \frac{c}{4l}$ .

Valeur minimale de A :  $A_{min} = \frac{a(1+r)}{1+r^2}$ .

### 3° Durée de propagation.

L'onde parcourt la longueur du ressort en un temps  $\tau = \frac{l}{c}$ .

La différence entre 2 fréquences de résonance consécutives est :  $\Delta N = \frac{l}{2l}$ ; les mesures ont donné  $\Delta N = 19,5$  Hz.

On calcule  $\tau = \frac{1}{2 \times 19,5} = 25,6 \cdot 10^{-3}$  s ;  $\tau = 25,6$  ms.

Le fabricant nous indique que la valeur de  $\tau$  est comprise entre 25 ms et 30 ms ; la valeur trouvée se situe bien dans cet intervalle.

### 4° Acuité des résonances.

L'expérience montre que les résonances sont aiguës et que la valeur maximale de l'amplitude est beaucoup plus grande que la valeur minimale ; autour de la fréquence de 1025 Hz, on trouve :  $A_{max} \approx 17 A_{min}$ . La valeur du coefficient de réflexion peut s'obtenir à partir de la formule :

$$\frac{A_{max}}{A_{min}} = \frac{a}{1-r} \times \frac{1+r^2}{a(1+r)} = \frac{1+r^2}{1-r^2}$$

D'où :  $r = 0,94$ .

Pour caractériser l'acuité de la résonance, cherchons les 2 valeurs de  $\varphi$  les plus voisines de  $k\pi$  et pour lesquelles

$$A = \frac{A_{max}}{2}$$

On obtient  $1 + m \sin^2 \varphi = 4$  soit  $\sin \varphi = \pm \sqrt{\frac{3}{m}}$  :

$$m = \frac{4r^2}{(1-r^2)^2}; \quad m = 294$$

donc :

$$\varphi = k\pi \pm 0,1 \text{ rad} = (k + 3,2 \cdot 10^{-2})\pi \text{ rad.}$$

La courbe représentant la variation de  $A$  en fonction de  $\varphi$  présente des pics très fins pour  $\varphi = k\pi$ ; la largeur d'un pic mesurée à mi-hauteur est  $2 \Delta\varphi = 2 \times 0,1 = 0,2 \text{ rad}$ , la distance entre 2 pics successifs étant  $\pi$  radians (fig. 4).

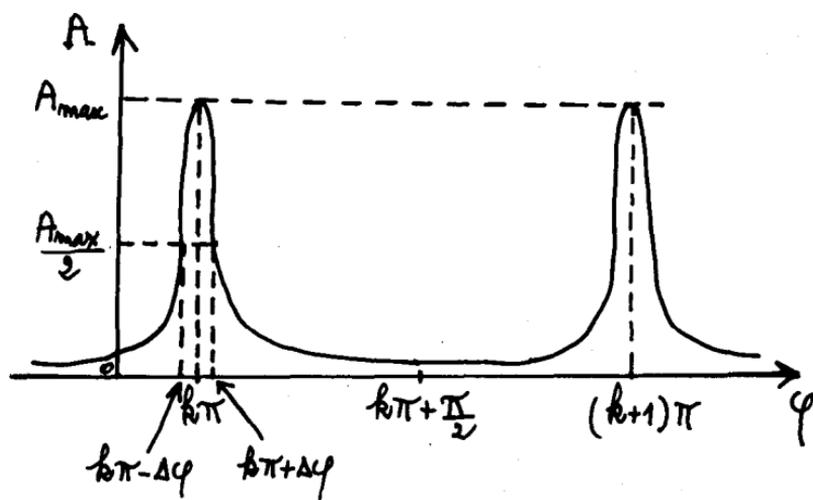


Fig. 4

La variation de fréquence  $\Delta N$  correspondant à  $\Delta\varphi$  est :

$$\Delta N = \frac{c}{l} \times \frac{\Delta\varphi}{2\pi}; \quad \Delta N = \frac{1}{25,6 \cdot 10^{-3}} \times \frac{0,1}{2\pi} \approx 0,6 \text{ Hz.}$$

Ce résultat signifie qu'une variation de fréquence inférieure à 1 Hz, au voisinage d'une fréquence de résonance, est suffisante pour provoquer une division de l'amplitude par 2. On comprend aisément la nécessité d'utiliser un générateur de fonctions permettant un réglage très fin de la fréquence.

#### 5° Calcul simplifié - niveau Terminales.

Les valeurs exactes des fréquences de résonance peuvent être déterminées en considérant l'interférence de 2 ondes seu-

lement : l'onde directe et l'onde ayant subi une réflexion en E et deux réflexions en D. Le déphasage entre ces 2 ondes est :

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2 \frac{\omega l}{c} = \frac{4\pi Nl}{c}. \text{ Les résonances sont obtenues}$$

pour  $\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , soit pour  $N = k \frac{c}{2l}$ . Cette méthode

de calcul ne permet pas évidemment de faire une étude correcte de l'amplitude parce qu'elle ne tient pas compte de toutes les ondes réfléchies.

#### IV) AMORTISSEMENT DES OSCILLATIONS DU RESSORT.

Le calcul de l'amplitude du mouvement d'un point quelconque du ressort, dans les expériences précédentes, montrerait qu'il existe des nœuds et des ventres de torsion ; le ressort est le siège d'une onde stationnaire presque parfaite parce que l'amortissement du ressort est très faible, et que les coefficients de réflexion sur les extrémités sont élevés.

Maintenant, il s'agit de diminuer l'influence des ondes réfléchies ; cela peut être réalisé en disposant sous le ressort, une couche de coton hydrophile, sur une longueur de 5 cm environ et près du capteur ; le frottement du ressort au contact du coton ne doit pas être trop important.

##### 1° Les résultats.

Les tensions aux bornes de l'excitateur et du capteur sont visualisées simultanément avec un oscillographe. Une variation de la fréquence de l'excitateur a pour effet principal de faire varier le déphasage entre les mouvements de E et D. L'amplitude du mouvement de D varie un peu, elle passe par des maxima et des minima. Par conséquent, on peut dire que le mouvement de D résulte de la superposition d'une onde progressive et d'une onde stationnaire.

Intéressons-nous à l'onde progressive qui est prépondérante ; mesurons les fréquences  $N_1$  et  $N_2$  pour lesquelles D et E sont respectivement en phase et en opposition de phase, et calculons les différences  $\Delta N_1$  et  $\Delta N_2$  entre 2 fréquences  $N_1$  consécutives et entre 2 fréquences  $N_2$  consécutives.

$N_1$ (Hz)	933	975	1014	1054	1093	1134	1172	1210	1250
$\Delta N_1$		42	39	40	39	41	38	38	40

$N_2$ (Hz)	955	996	1034	1074	1113	1153	1191	1230	1269
$\Delta N_2$		41	38	40	39	40	38	39	39

Ces 2 séries de valeurs des fréquences  $N_1$  et  $N_2$  forment deux progressions arithmétiques, la valeur moyenne de la raison étant de 39,5 Hz environ. Les valeurs de  $N_1$  et  $N_2$  sont obtenues avec moins de précision que celles des fréquences de résonance parce que l'étude du déphasage des mouvements de E et D se fait sur l'écran d'un oscillographe.

### 2° Interprétation.

Considérons l'onde progressive seule ; sa durée de propagation le long du ressort est  $\tau = \frac{l}{c}$ . D vibre en phase avec E lorsque  $\tau = kT$ ,  $k \in \mathbb{N}$  soit pour des fréquences :

$$N_1 = k \frac{c}{l}.$$

D vibre en opposition de phase avec E pour des fréquences :

$$N_2 = k \frac{c}{l} + \frac{c}{2l}.$$

### 3° Durée de propagation.

$\tau = \frac{l}{c}$ . La raison de la progression arithmétique des fréquences  $N_1$  et  $N_2$  est :  $\Delta N_1 = \Delta N_2 = \frac{c}{l}$ .

Les mesures ont donné :  $\Delta N_1 \simeq \Delta N_2 \simeq 39,5$  Hz.

On calcule  $\tau = \frac{1}{39,5} = 25,3 \cdot 10^{-3}$  s  $\tau = 25,3$  ms.

Cette valeur de  $\tau$  est très voisine de celle obtenue à partir de l'étude des fréquences de résonance ; l'écart relatif entre les

2 valeurs de  $\tau$  est :  $\frac{25,6 - 25,3}{25,3} \simeq 1,2\%$ .

**Remarque.**

La tension du ressort augmente avec l'épaisseur de la couche de coton hydrophile ;  $\tau$  peut devenir inférieure à 25 ms lorsque l'accroissement de la tension du ressort est trop grand.

**4° Propagation d'une impulsion de torsion.**

Cette étude doit être faite avec un ressort fortement amorti, en alimentant la bobine de l'excitateur avec un générateur d'impulsions de fréquence 25 Hz environ, la largeur des impulsions étant de 5 ms. L'interprétation de l'oscillogramme est assez délicate parce que l'excitateur et le détecteur déforment le signal et parce qu'il est difficile d'éliminer totalement les signaux réfléchis (fig. 5).

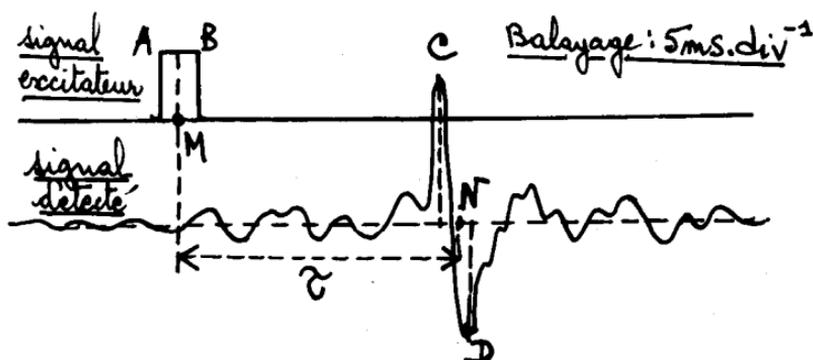


Fig. 5

Sur l'écran, on remarque que la distance horizontale entre les pointes C et D du signal détecté est égale à la largeur du signal excitateur. La valeur de  $\tau$  s'obtient en mesurant la distance entre le milieu M de l'impulsion rectangulaire et le point N, milieu d'une impulsion rectangulaire dont les flancs verticaux passeraient par C et D.

J'ai obtenu  $\tau \approx 24,5$  ms. Cette valeur est inférieure à celles déjà trouvées parce que la tension du ressort est plus grande dans cette expérience que dans les précédentes — nécessité d'un fort amortissement. Il faut tenir compte aussi du principe de la méthode. On peut considérer que 24,5 ms est une valeur acceptable pour  $\tau$ .

**CONCLUSION.**

Le ressort d'une ligne à retard est un bel exemple de résonateur à fréquences multiples. Son étude expérimentale donne de bons résultats avec des ondes sinusoïdales.

On peut acheter une ligne à retard dans un magasin de composants électroniques. Enfin, on peut indiquer l'application d'une ligne à retard : créer un phénomène de réverbération.

#### BIBLIOGRAPHIE

---

- J.-P. ROUX. — *Corde vibrante. Expérience de Melde*. B.U.P. n° 574, mai 1975.
- G. LETRAUBLON. — *Musique électronique*. Editions Radio.

#### Adresse des fournisseurs.

- CIBOT-RADIO, 3, rue de Reuilly, 75012 Paris (pour l'achat d'une ligne MEB 02).
  - MAGNETIC FRANCE, 11, place de la Nation, 75011 Paris (pour l'achat de lignes à retard plus performantes mais d'un prix beaucoup plus élevé que celui de la ligne MEB 02).
-