A propos d'oscillateurs couplés

par M. BENARROCHE,
Groupe de Recherches
en Didactique de la Physique,
Université de Provence, Marseille.

L'étude ci-dessous n'a aucune prétention à l'originalité. Elle vise simplement à montrer, sur un exemple précis, la nécessité pour les enseignants d'éviter la routine en vérifiant systématiquement la validité de résultats souvent admis comme « évidents » et en tous cas usuels.

A) RAPPELS.

Quand on étudie les oscillations libres d'un système linéaire non amorti, *à deux degrés de liberté,* c'est-à-dire décrit par deux paramètres prenant les valeurs q_1 et q_2 à l'instant t, on pose couramment :

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Le système linéaire qui décrit les oscillations est alors représenté par :

$$Q'' + UQ = 0 \quad \text{(couplage élastique)} \qquad (2)$$

ou bien :

$$VQ'' + Q = 0 \quad \text{(couplage par inertie)} \qquad (2')$$

où :

$$U = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \omega_2^2 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

et :

$$V = U^{-1} \qquad (3')$$

ω_1 (resp. ω_2) est la pulsation du sous-système à un degré de liberté obtenu à partir du système initial quand on maintient constant q_2 (resp. q_1) ($\omega_1 < \omega_2$).

L'usage est alors de définir le coefficient de couplage (γ) par :

$$\gamma^2 = \frac{\alpha_1 \, \alpha_2}{\omega_1^2 \, \omega_2^2}. \qquad (4)$$

On montre facilement que $\alpha_1 \, \alpha_2 > 0$ et que :

$$\gamma \in [0, 1]. \qquad (5)$$

Remarque.

Dans le cas du couplage par inertie, si la matrice de couplage : $V = U^{-1}$ s'écrit $V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, le coefficient de couplage est encore défini par :

$$\gamma^2 = \frac{b\,c}{a\,d} \in [0, 1], \tag{4'}$$

ce qui est cohérent avec ce qui précède.

Les pulsations propres sont racines de :

$$det\,[U - \Omega^2 \cdot 1] = 0 \tag{6}$$

qui s'écrit :

$$f(\Omega^2) = \Omega^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\,\Omega^2 + (1 - \gamma^2)\,\omega_1^2\,\omega_2^2 = 0. \tag{7}$$

Cette équation est dite « aux pulsations propres ».

Notons que dans le cas du couplage par inertie, on arrive à une équation de même type :

$$(1 - \gamma^2)\,\Omega^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\,\Omega^2 + \omega_1^2\,\omega_2^2 = 0 \tag{7'}$$

(ce qui ne change pas la discussion qui suit).

B) DISCUSSION DE L'EQUATION AUX PULSATIONS PROPRES.

L'équation (7) a toujours deux racines réelles : Ω'^2 et Ω''^2. En effet :

$$\Delta = (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4\,\gamma^2\,\omega_1^2\,\omega_2^2 > 0.$$

Ces deux racines sont toujours :

— de même signe puisque leur produit est :

$$(1 - \gamma^2)\,\omega_1^2\,\omega_2^2 > 0$$

— positives puisque leur somme est :

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 > 0.$$

Ces deux racines sont toujours extérieures à l'intervalle $]\omega_1^2, \omega_2^2[$, puisque ω_1^2 et ω_2^2 sont toujours compris entre les racines. En effet :

$$f(\omega_1^2) = f(\omega_2^2) = -\gamma^2\,\omega_1^2\,\omega_2^2 < 0.$$

Dans le cas général, c'est là tout ce qu'on peut dire sur les solutions de cette équation. Notons tout de même, comme on le verra plus loin (*cf.* C.3.), que l'augmentation du couplage écarte les fréquences propres.

Malheureusement, il n'est pas rare de rencontrer des cours qui, explicitant Ω'^2 et Ω''^2, tracent le graphe « bien connu » de $\gamma \to \Omega^2$ (ou Ω) (fig. 1).

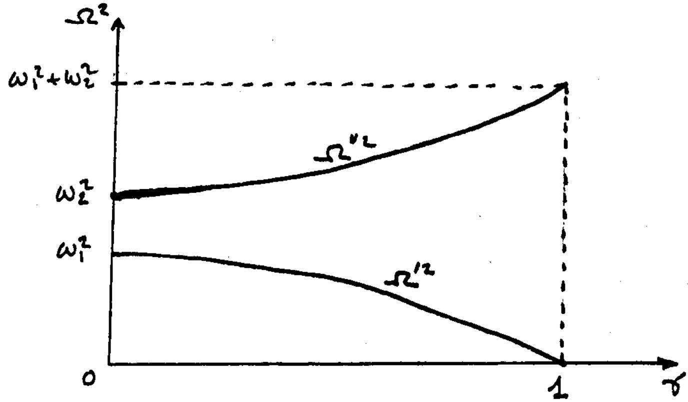
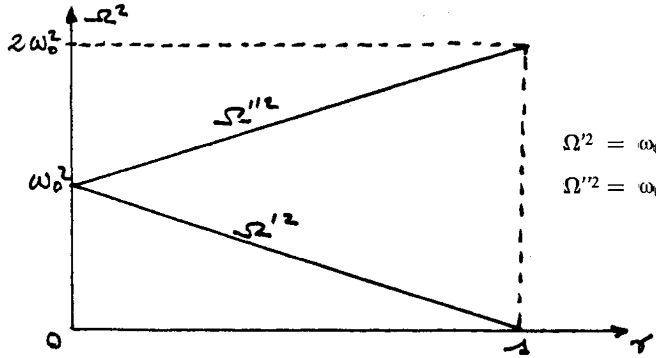


Fig. 1

De même, pour des circuits accordés ($\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$) les solutions de (7) s'écrivent simplement :

$$\Omega^2 = \omega_0^2 \cdot (1 \pm \gamma). \qquad (8)$$

Le graphe de la fig. 1 se transpose alors simplement et on rencontre des cours qui dans ce cas le présentent sous la forme $\gamma \to \Omega^2$:



$$\Omega'^2 = \omega_0^2 (1 - \gamma)$$
$$\Omega''^2 = \omega_0^2 (1 + \gamma)$$

Fig. 2

A l'évidence, les fig. 1 et 2 supposent implicitement que ω_1 et ω_2 (ou ω_0) sont des constantes indépendantes de γ, *ce qui est généralement faux*. Le plus souvent ω_1 et ω_2 (ou ω_0) varient avec γ, de sorte que, par exemple, la relation (8) devrait s'écrire complètement :

$$\Omega^2 = \omega_0^2(\gamma) \cdot (1 \pm \gamma). \qquad (8')$$

Dans ces conditions, les fig. 1 et 2 sont tracées en fonction de paramètres (ω_1 et ω_2, ou ω_0) dépendant eux-mêmes de la variable γ et sont dépourvues de sens.

Les études de cas particuliers ci-après montrent bien que si les fig. 1 et 2 ne sont pas toujours fausses, elles ne présentent en tout cas aucun caractère de généralité.

C) ETUDE DE QUELQUES CAS PARTICULIERS.

C.1. **Très exceptionnellement,** il peut se faire que l'élément couplant soit extérieur à chacun des oscillateurs. Alors, en faisant varier cet élément, on peut faire varier γ et garder ω_1 et ω_2 constants. Tel est le cas de circuits électriques résonnants couplés par mutuelle inductance M.

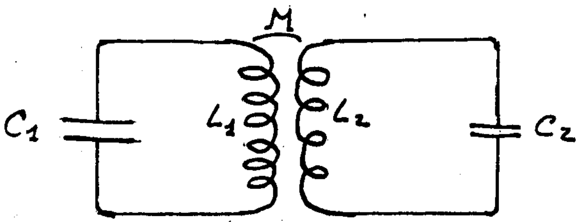


Fig. 3

Dans le cas (où le couplage se fait d'ailleurs par les dérivées secondes, c'est-à-dire par « inertie »), le coefficient γ vaut :

$$\gamma = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}. \tag{9}$$

On peut ici faire varier γ par l'intermédiaire de M sans modifier L_1, L_2, C_1, C_2 c'est-à-dire sans modifier ω_1 et ω_2. Les fig. 1 et 2 sont, ici, parfaitement légitimes.

C.2. **Systèmes 2 masses - 3 ressorts symétriques.**

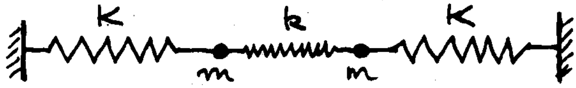


Fig. 4

Les deux oscillateurs sont accordés :

$$\omega_1^2 = \omega_2^2 = \omega_0^2 = \frac{K + k}{m}. \tag{10}$$

Le coefficient de couplage γ vaut :

$$\gamma = \frac{k}{K + k} \in [0, 1]. \tag{11}$$

En faisant varier k de 0 à ∞, on fait varier γ de 0 à 1 mais ω_0 varie aussi... $\left(\omega_0^2 = \dfrac{K}{m}\,\dfrac{1}{1-\gamma}\right)$.

La relation (8) fournit bien les pulsations propres :

$$\Omega'^2 = \omega_0^2(1-\gamma) = \frac{K}{m}, \tag{12}$$

$$\Omega''^2 = \omega_0^2(1+\gamma) = \frac{K}{m}\,\frac{1+\gamma}{1-\gamma}. \tag{13}$$

Le graphe de la fig. 2 doit donc être remplacé par :

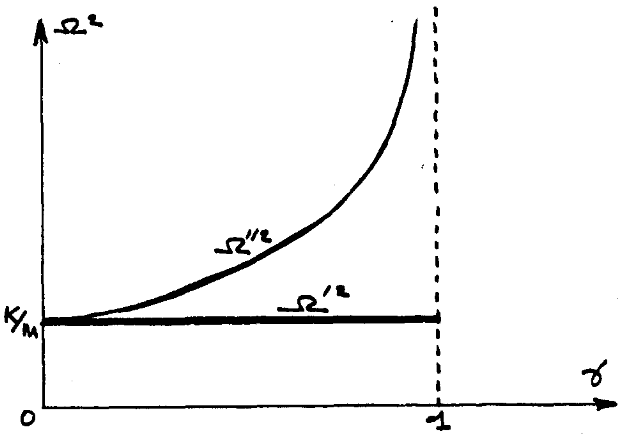


Fig. 5

Au passage, on retrouve ici un résultat physique « naturel » : (12) montre que Ω' ne dépend pas de k : la basse fréquence de résonance ne dépend pas du couplage ; quand les masses oscillent selon le mode propre antisymétrique où elles sont en phase, la fréquence des oscillations ne dépend pas du couplage : que k soit un ressort de très faible dureté ou une barre rigide, les deux masses oscillent en phase, leur distance restant constante.

C.3. **Systèmes 2 masses - 3 ressorts dissymétriques.**

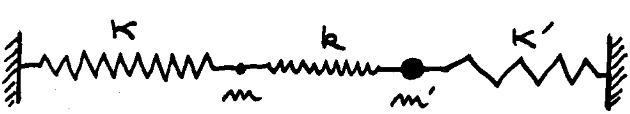


Fig. 6

On pose :

$$m' = \alpha m \qquad \alpha \in \mathbb{R}^+, \text{ sans dimension} \tag{14}$$

$$K' = \beta K \qquad \beta \in \mathbb{R}^+, \text{ sans dimension.} \tag{15}$$

Alors :

$$\omega_1^2 = \frac{k + K}{m}, \tag{16}$$

$$\omega_2^2 = \frac{k + \beta K}{\alpha m}, \tag{17}$$

$$\gamma^2 = \frac{k^2}{(k + K)(k + \beta K)}. \tag{18}$$

Quand :

$$k \in [0, +\infty[, \qquad \gamma \in [0, 1[.$$

On pose :

$$y = \Omega^2/(K/m) \in \mathbb{R}^+ \quad \text{sans dimension} \tag{19}$$

$$x = k/K \in \mathbb{R}^+ \quad \text{sans dimension} \tag{20}$$

Les racines de (7) s'écrivent alors :

$$y = \frac{1}{2\alpha}\Big[(\alpha + \beta) + (\alpha + 1)\,x \ldots$$

$$\ldots \pm \sqrt{[(\alpha - \beta) + (\alpha - 1)\,x]^2 + 4\,\alpha\,x^2}\,\Big] \tag{21}$$

a) Quand $x \to 0$ ($\Longleftrightarrow k \to 0$, faible couplage) :

$$y = \frac{1}{2\alpha}\,[(\alpha + \beta) \pm |\alpha - \beta|].$$

On appelle y' et y'' les racines ($y'' > y'$) :

$$\alpha > \beta \Rightarrow \quad \begin{cases} y''(0) = 1 \\ y'(0) = \beta/\alpha \end{cases}$$

$$\alpha < \beta \Rightarrow \quad \begin{cases} y''(0) = \beta/\alpha \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

b) Quand $x \to \infty$ ($\Longleftrightarrow k \to \infty$, fort couplage : $\gamma \to 1$).

On montre facilement que :

$$y''(\infty)\left(\sim \frac{\alpha + 1}{\alpha}\,x\right) \to +\infty$$

$$y'(\infty) \to \frac{\beta + 1}{\alpha + 1}.$$

Un calcul complet montre que, dans tous les cas, quand x croît de 0 à ∞, c'est-à-dire quand $\gamma \nearrow$ de 0 à 1 :

y'' croît de 1 (ou β/α) à l'infini,

y' croît de β/α (ou 1) à $\dfrac{\beta + 1}{\alpha + 1}$.

Dans le cas particulier vu en C.2. ($\alpha = \beta$) y' reste constant $= 1$.

Les fig. 7, 8 et 9 résument les résultats précédents.

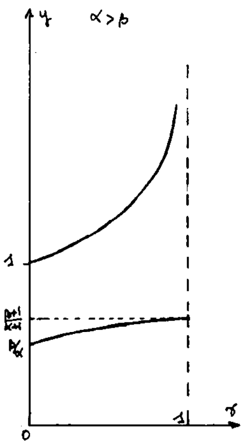


Fig. 7

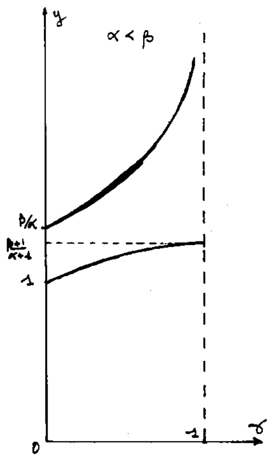


Fig. 8

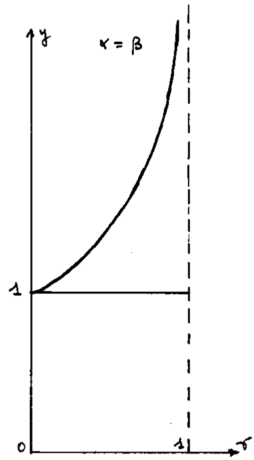


Fig. 9

Il apparaît ainsi que les graphes de $\gamma \rightarrow \Omega^2$ (ou Ω) n'ont jamais l'allure indiquée fig. 1 et 2. Néanmoins, un résultat reste valable : l'augmentation du couplage écarte les fréquences propres.

C.4. Les quelques cas particuliers envisagés ici montrent bien l'impossibilité d'une conclusion générale. On notera encore au passage que :

a) quand le couplage devient nul ($\gamma \rightarrow 0$), les pulsations $\omega_1(0)$ et $\omega_2(0)$ [ou $\omega_0(0)$] sont bien des pulsations propres du système, à couplage nul ;

b) certains auteurs contournent (volontairement ou par accident) la difficulté en traçant non pas les graphes $\gamma \rightarrow \Omega^2$ ou (Ω) mais $\gamma \rightarrow \left(\dfrac{\Omega}{\omega_0}\right)^2$ dans le cas des circuits accordés. On obtient bien alors des courbes ayant l'allure de la fig. 2. Une telle présentation est particulièrement dangereuse car les coordonnées utilisées ne sont pas des coordonnées réduites : ω_0 n'est pas une constante. Le lecteur inattentif ou sans méfiance en déduira naturellement que quand le couplage croît de 0 à 1, la haute fréquence propre augmente du simple au double et la basse fréquence propre décroît de ω_0^2 à 0, ce qui est totalement contradictoire avec ce que l'on a vu précédemment.

D) CONCLUSION.

Ce qui précède suggère l'idée d'une possible insuffisance conceptuelle : ne devrait-on pas distinguer, parmi les oscillateurs couplés, ceux dont les pulsations ω_1 et ω_2 sont indépendantes du couplage de ceux qui sont tels que ω_1 et ω_2 en dépendent ?

Mais là n'est pas notre propos : les quelques remarques précédentes n'ont pas la prétention qu'on leur accorde une importance théorique qu'elles n'ont pas. Il est même vraisemblable qu'en cherchant un peu on trouverait dans des cours aussi nombreux que divers des défauts de logique et de cohérence tout à fait analogues à ceux mentionnés ici.

Leur présentation n'a en fait qu'un seul but : illustrer la nécessité d'un dégraissage de cours qui, depuis des décennies, se perpétuent d'un auteur à l'autre. L'esprit critique doit être enfin vigoureusement réintroduit dans l'enseignement de la physique, en commençant par les enseignants eux-mêmes. Il faut en finir avec une certaine paresse intellectuelle qui nous conduit à enseigner... ce qu'on nous avait enseigné. On ne peut se satisfaire d'un habillage plus « moderne » sans s'interroger sur l'intérêt et parfois même la validité des résultats présentés.

Cet exemple enfin présente l'intérêt de montrer la nécessité de prohiber certains développements arbitraires auxquels on attribue une valeur « pédagogique » : il va de soi que si les résultats précédents avaient une quelconque relation avec la « physique des physiciens » (ou avec une pratique technologique réelle) on se serait bien vite rendu compte de leur caractère erroné. Malheureusement, leur seul intérêt est d'être source de problèmes construits, on s'en doute, sans la moindre corrélation avec la pratique concrète des physiciens ou des techniciens.

Il s'agit donc là, typiquement, d'une fausse transposition didactique : certes il est évident que le savoir savant ne peut être enseigné tel quel et qu'il faut bien procéder à une nécessaire « transposition didactique » (*). Par contre, cette transposition didactique ne justifie nullement les débordements auxquels elle donne parfois naissance de façon le plus souvent d'ailleurs inconsciente et involontaire. La « pédagogie » ne peut s'autoriser l'illustration inutile ; *a fortiori* l'illustration erronée.

(*) Y. CHEVALLARD, *Cours de l'Ecole d'Eté de Chamrousse*, juillet 1980.