

Sustentation d'un mobile autoporteur sur une table à coussin d'air ou heureusement que l'air est visqueux

par Luc PETIT (*),

Laboratoire d'Hydrodynamique
de Mécanique Physique,

Résumé.

Nous mettons en évidence la nature du phénomène physique mis en jeu dans la sustentation d'un mobile sur une table à coussin d'air, système qui permet de faire des expériences de mécanique sans l'effet des frottements : il s'agit d'un effet de lubrification. Nous déterminons le mouvement du fluide dans le film d'air sous le mobile et comparons les résultats obtenus avec les mesures effectuées.

1. INTRODUCTION.

Beaucoup de laboratoires d'enseignement de physique (lycées, universités,...) ont été équipés durant les dernières années de tables dites « à coussin d'air » ; elles permettent de réaliser un grand nombre d'expériences de mécanique (mouvements de différents types, chocs variés,...) en s'affranchissant de l'effet de frottement : les mobiles sont sustentés à l'aide d'une soufflerie éjectant de l'air par des trous ménagés dans le plan de la table, ou bien par un orifice situé sous la surface plane du mobile (cas des mobiles dits « autoporteurs »). Nous voudrions, dans cet article, préciser la nature physique du phénomène de sustentation (dans lequel les effets de viscosité de l'air sont *dominants*) et montrer comment l'utilisation raisonnée du nombre de REYNOLDS permet de la mettre en évidence.

2. TABLE A COUSSIN D'AIR ETUDIEE.

Il s'agit d'un ensemble expérimental de marque JEULIN comprenant essentiellement une table très plane et des mobiles du type autoporteur (référence M 3201 F) de forme cylindrique (rayon $R = 5$ cm). Une petite pompe à membrane oscillante, alimentée par des accumulateurs, est située à l'intérieur du mobile ;

(*) Aussi : Laboratoire de Physique - E. N. S. Saint-Cloud,
92210 Saint-Cloud.

elle permet de souffler de l'air par un orifice circulaire (rayon $r_0 = 6$ mm) centré sur la base du mobile (fig. 1) avec un débit $Q = 38$ cm³/s. La masse du mobile est $M = 600$ g.

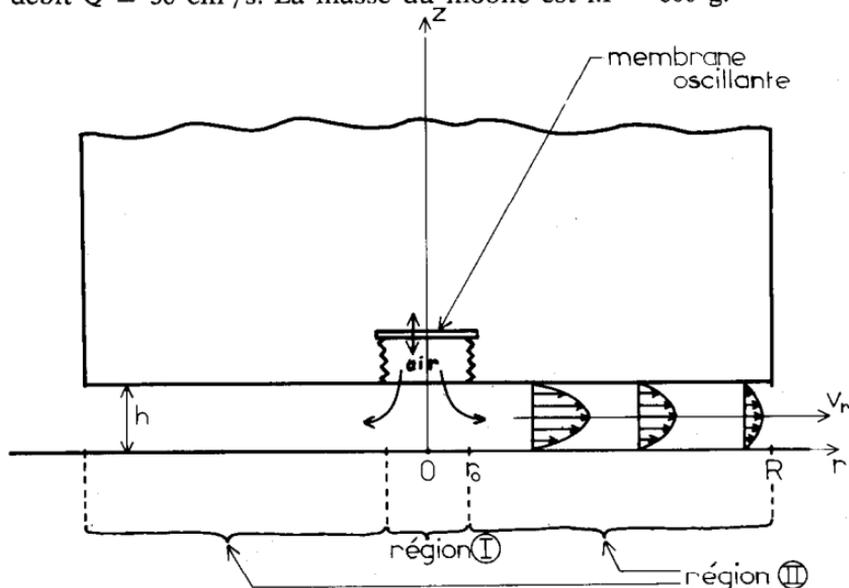


Fig 1. — Schéma du mobile autoporteur utilisé : l'air est éjecté de la semelle du mobile avec un débit $Q \sim 38$ cm³/s, par un orifice circulaire de rayon $r_0 = 6$ mm à l'aide d'une pompe à membrane oscillante. On a reporté le profil de vitesse parabolique trouvé dans la région II ($r_0 < r < R$). L'épaisseur du film d'air lorsque le mobile est en équilibre vaut $h \sim 90$ μm. La masse du mobile est $M = 600$ g et son rayon $R = 5$ cm.

Le débit Q a été mesuré de la manière suivante (fig. 2) : un tube en verre maintenu au contact de l'orifice d'évacuation

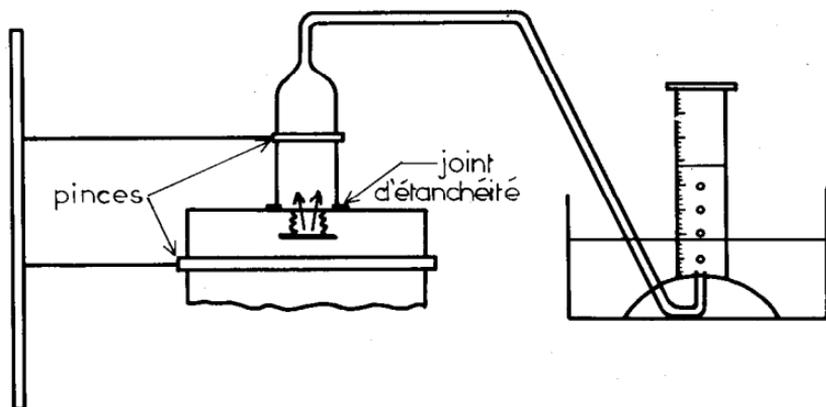


Fig. 2. — Dispositif pour la mesure du débit Q de l'air éjecté par l'orifice central.

de l'air, permet de recueillir sur une cuve à eau un volume connu d'air dans un temps donné, mesuré au chronomètre (l'étanchéité entre le tube de verre et la semelle du palet peut être assurée à l'aide d'un joint en pâte à modeler par exemple).

L'intervalle h entre la table et la semelle du palet, lorsque celui-ci est en équilibre, a été mesuré en essayant de glisser des lamelles de papier d'épaisseurs variées : on a obtenu $h = (90 \pm 10) \mu\text{m}$.

3. ECOULEMENT DE L'AIR SOUS LE PALET.

Les valeurs numériques données au 2. vont nous permettre de poser *a priori* les hypothèses simplificatrices nous permettant de répondre à notre interrogation du 1.; c'est la démarche habituelle de l'hydrodynamicien qui doit nécessairement faire ressortir le (ou les) effet (s) dominant (s) afin d'obtenir un problème raisonnablement soluble; une vérification de la validité des hypothèses sera faite *a posteriori*.

Pour décrire l'écoulement de l'air, nous partons de l'équation du mouvement, écrite pour l'unité de volume de fluide [1] [2] [3] :

$$\varrho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \varrho (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) (*) \vec{v} = - \overrightarrow{\text{grad}} p + \eta \Delta \vec{v} \quad (1)$$

où ϱ est la masse volumique de l'air, η sa viscosité dynamique ($\eta = 1,8 \cdot 10^{-4}$ poise — système c.g.s. — pour l'air à 20°C),

\vec{v} la vitesse d'une particule d'air et p la pression en chaque point; la simplification de l'équation (1) est rendue nécessaire par la présence des termes non linéaires du type $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$ appelés termes convectifs, car ils correspondent à un transfert

de quantité de mouvement $\varrho \vec{v}$ (par unité de volume) dû au mouvement du fluide; nous intéressant à un mouvement per-

manent de l'air sous le mobile, le terme $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ est nul et il vient :

$$\varrho (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = - \overrightarrow{\text{grad}} p + \eta \Delta \vec{v}. \quad (2)$$

(*) L'opérateur $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})$ s'écrit : $\left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right)$

en coordonnées cartésiennes et : $\left(v_r \frac{\partial}{\partial r} + (v_\theta/r) \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right)$ en coordonnées cylindriques.

A côté de cette équation, nous avons la condition :

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

qui traduit l'incompressibilité du fluide dans le cas où sa masse volumique ρ est constante; ceci est bien vérifié tant que $v \ll c =$ vitesse de propagation des ondes de pression dans le fluide ($c_{\text{air}} \approx 340$ m/s à 20°C).

L'équation (2) écrite en coordonnées cylindriques, compte tenu de la symétrie du problème, donne (voir fig. 3 pour les notations) :

$$\begin{aligned} & \rho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \dots \\ & \dots = -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \dots \\ & \dots = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (3')$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (3'')$$

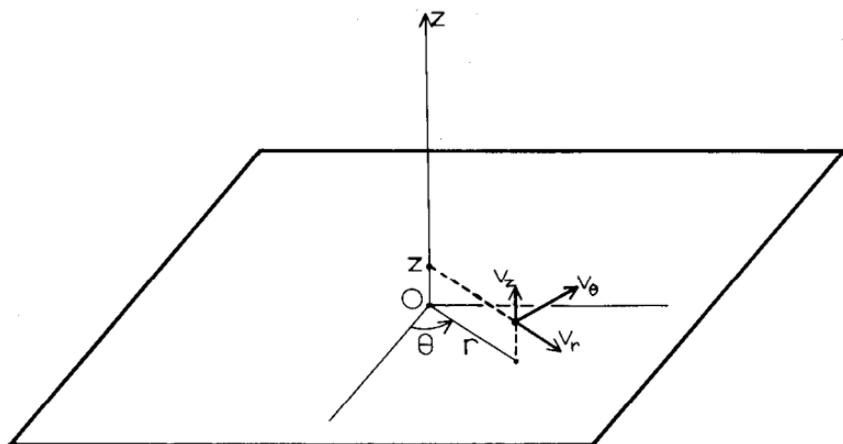


Fig. 3. — Notations utilisées en coordonnées cylindriques.

L'équation (3''), correspondant à la composante v_r de \vec{v} , a été écrite en remplaçant v_r par 0 car on suppose que le palet ne tourne pas sur lui-même.

Nous nous intéressons d'autre part à l'écoulement de l'air sous le palet, dans la région (II) (voir fig. 1), c'est-à-dire en dehors de la région où l'air est éjecté du palet; il en résulte que, dans cette région (II), la composante verticale v_z de la vitesse est nulle puisque le palet ne descend pas; l'équation (3') conduit alors à :

$$(\partial p / \partial z) = 0 \quad (4')$$

ce qui nous indique que p ne dépend finalement que de r (résultat général pour les écoulements parallèles).

L'équation (3) devient alors, compte tenu de $v_z = 0$ et $p = p(r)$:

$$\begin{aligned} \rho v \frac{\partial v}{\partial r} \dots \\ \dots = -\frac{dp}{dr} + \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

dans laquelle on a noté $v_r = v$, seule composante de la vitesse intervenant désormais.

Évaluons maintenant l'importance respective des termes de la parenthèse du deuxième membre de (4); pour trouver la dépendance de v avec r , nous écrivons la conservation de la masse d'air soufflé par le palet : le débit Q de l'air sortant du cylindre de hauteur h et de rayon r_0 est égal au débit de l'air sortant à la périphérie de tout cylindre de rayon r ($r_0 \leq r \leq R$) :

$$\begin{aligned} Q = \int_0^h v(r, z) 2\pi r dz \dots \\ \dots = 2\pi r \int_0^h v(r, z) dz = 2\pi r h \bar{v}(r) = \text{constante} \end{aligned} \quad (5)$$

où $\bar{v}(r)$ représente la vitesse moyenne à la distance r de l'axe (moyenne prise dans la direction Oz); ceci conduit à une dépendance de v avec r en $1/r$; nous avons donc :

$$\begin{aligned} \text{terme n}^\circ 1 : \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \sim \frac{v}{r^2}; \quad \text{n}^\circ 2 : \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \sim \frac{v}{r^2}; \quad \text{n}^\circ 3 : \frac{v}{r^2}; \\ \text{n}^\circ 4 : \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \sim \frac{v}{z^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, le rapport entre le 4^e terme et les 3 premiers termes de la parenthèse du 2^e membre de (4) est de l'ordre de :

$$\frac{v/z^2}{v/r^2} \sim \left(\frac{r}{z}\right)^2 \geq \left(\frac{r_0}{h}\right)^2 \sim 3000; \text{ le dernier terme est donc}$$

largement dominant, ce qui donne :

$$\rho v (\partial v / \partial r) = -(dp/dr) + \eta (\partial^2 v / \partial z^2). \quad (7)$$

Evaluons maintenant le rapport $Re = \frac{\text{termes convectifs}}{\text{termes visqueux}}$,

donnant l'importance relative des forces d'inertie par rapport aux forces de viscosité (nombre de REYNOLDS [4]) :

$$Re = \left| \frac{\rho v (\partial v / \partial r)}{\eta (\partial^2 v / \partial z^2)} \right| \sim \frac{\rho (v^2/r)}{\eta (v/z^2)} \sim \frac{v z^2}{\nu r} \quad (6)$$

où $\nu = (\eta/\rho)$ est la viscosité cinématique du fluide ; l'utilisation de la relation (12) va nous suffire pour évaluer Re ; elle donne :

$$\bar{v}(r) = Q/(2\pi r h)$$

valeur que nous reportons dans Re :

$$Re \sim \frac{Q}{2\pi r h} \frac{1}{\nu} \frac{z^2}{r} \sim \frac{(Q/2\pi)}{\nu} \left(\frac{z^2}{r^2 h} \right).$$

Avec $Q = 38 \text{ cm}^3/\text{s}$, $z \sim h/2 \sim 50 \text{ }\mu\text{m}$, $r = 6 \text{ mm}$ et $\nu = 0,15 \text{ cm}^2/\text{s}$, on trouve $Re_{max} \sim 0,15$; ceci nous permet de conclure que les effets de viscosité sont dominants dans toute la région (II) (où $r \geq r_0 = 6 \text{ mm}$).

Nous pouvons donc écrire l'équation (7) en négligeant le

terme $\rho v \frac{\partial v}{\partial r}$ devant $\eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$:

$$\eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{dp}{dr}. \quad (7')$$

Une intégration de cette équation (en se rappelant que p ne dépend que de r) conduit à :

$$v_r = v = \left(\frac{1}{2\eta} \right) \left(\frac{dp}{dr} \right) z^2 + C_1 z + C_2. \quad (8)$$

Les constantes C_1 et C_2 sont déterminées en tenant compte des conditions aux limites, à savoir $v_r(z=0) = v_r(z=h) = 0$

(condition de non glissement du fluide sur les parois, qui est une caractéristique des écoulements de fluides visqueux) :

$$v_r = (1/2 \eta) (dp/dr) z(z-h). \quad (9)$$

Le profil de vitesse le long de la direction Oz est donc parabolique ; ce résultat est classique : on obtient la même forme du profil de vitesse que dans le cas de l'écoulement entre deux plans ou dans un tube cylindrique (écoulements de POISEUILLE [5] [6]) ; la seule différence est qu'ici, la vitesse moyenne diminue le long de r pour pouvoir conserver le débit à travers la surface extérieure de tout cylindre de rayon r . Cependant, le calcul est basé sur des hypothèses simplificatrices intuitives pour l'hydrodynamicien, mais non triviales.

Le profil de vitesse est représenté fig. 1.

4. EQUILIBRE DU PALET.

Il nous faut maintenant trouver la répartition de la pression sous la surface du palet, afin de pouvoir traduire son équilibre ; pour cela, nous reportons l'expression (9) trouvée pour v_r , dans l'équation (12) (conservation du débit) :

$$Q = \int_0^h (1/2 \eta) (dp/dr) z(z-h) 2\pi r dz$$

p ne dépendant que de r , on arrive à :

$$(dp/dr) = -6\eta Q/(\pi h^3 r). \quad (10)$$

D'où, par intégration : $p - p_0 = (-6 \eta Q/\pi h^3) \ln(r/R)$ où on a noté p_0 la pression atmosphérique ($p = p_0$ en $r = R$) (remarquons qu'il s'agit bien d'une surpression $p > p_0$, car $\ln(r/R) < 0$). La différence des forces de pression exercées sur les surfaces inférieure et supérieure du palet s'écrit :

$$F = \int_{\text{surface du palet}} (p ds - p_0 ds) = \int_{r_0}^R (p - p_0) 2\pi r dr$$

soit :

$$F = -(12\eta Q/h^3) \int_{r_0}^R \ln(r/R) r dr = -(3 \eta QR^2/h^3) \int_{r_0/R}^1 \ln(r/R)^2 d(r/R)^2.$$

Le calcul de cette intégrale (par parties) conduit à :

$$F = (3 \eta QR^2/h^3) \left\{ 1 + \left(\frac{r_0}{R} \right)^2 \left[\ln \left(\frac{r_0}{R} \right)^2 - 1 \right] \right\} = 3 A \eta QR^2/h^3 \quad (11)$$

la constante A représentant l'expression entre les caractères { } et valant $A = 0,96$ dans notre expérience ($r_0 = 6$ mm, $R = 50$ mm).

L'équilibre du palet conduit à :

$$Mg = 3 A \eta QR^2/h^3$$

d'où, une épaisseur de la couche d'air entre le palet et la table :

$$h = (3 A \eta QR^2/Mg)^{1/3}.$$

Remarque.

On peut contrôler la forme de ce résultat par le raisonnement suivant : l'équilibre du palet nécessite l'existence d'une force de sustentation F_s due à une surpression Δp telle que [équation (7)] :

$$\frac{\Delta p}{\Delta r} \sim \frac{\Delta p}{R} \sim \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \sim \eta \frac{\bar{v}}{h^2}$$

\bar{v} représente la vitesse moyenne sous le palet : $\bar{v} \sim Q/(2\pi R h)$ (conservation du débit) et la force F_s est de l'ordre de :

$$F_s \sim (\Delta p) \pi R^2 \sim \left(\frac{\eta Q}{2\pi h^3} \right) \pi R^2 \sim \frac{\eta QR^2}{h^3}$$

ce qui est bien la forme du résultat trouvé au facteur A près qui vient de l'intégration du terme en $(1/r)$; il n'était pourtant pas évident *a priori* de retrouver ce résultat par un raisonnement simpliste, vues les hypothèses simplificatrices faites.

Le calcul de h avec les valeurs numériques données dans le paragraphe 2 conduit à $h = 95$ μm , à comparer avec la valeur mesurée $h \simeq 90$ μm ; l'accord entre ces deux valeurs est tout à fait satisfaisant compte tenu des approximations faites (que nous vérifions dans le paragraphe suivant) et de l'incertitude sur la mesure de h ($\Delta h \approx 10$ μm) et de Q ($\Delta Q \sim 3$ cm^3/s).

5. VERIFICATIONS DES HYPOTHESES.

Les relations (9) et (10) nous permettent de trouver l'expression de v_r en tous points :

$$v_r = -3 Q z (z - h) / (\pi r h^3).$$

La plus grande valeur de v_r $\left(r = r_0, z = \frac{h}{2} \right)$ vaut :

$$(v_r)_{\max} = 3 Q / 4 \pi r h = 8 \text{ m/s};$$

(i) la condition d'incompressibilité $v \ll c$ est donc bien vérifiée ;

(ii) la valeur du rapport :

$$Re = \frac{\text{termes convectifs}}{\text{termes visqueux}} = \frac{\rho v_r (\partial v_r / \partial r)}{\eta (\partial^2 v_r / \partial z^2)} \sim \frac{v_r z^2}{\nu_r} \text{ est}$$

maximum en $r = r_0$ et $z = h/2$ où il vaut $Re_{max} \approx 0,2$ qui est bien l'ordre de grandeur que nous avons évalué au paragraphe 3.

6. REMARQUES ET CONCLUSION.

(i) Nous avons montré dans cet article que le phénomène physique dominant dans la sustentation d'un mobile sur une table à coussin d'air était dû à la viscosité de l'air et non à des effets de « poussée » du jet d'air éjecté par la soufflerie; ceci peut sembler inattendu, car nous savons que « l'air n'est pas très visqueux »; en fait, comme nous l'avons vu, la viscosité d'un fluide n'est pas suffisante pour apprécier l'importance des forces de viscosité dans un fluide : c'est en fait le rap-

port $\frac{\text{termes convectifs}}{\text{termes visqueux}}$ (le nombre de REYNOLDS) qui permet

d'évaluer l'importance des effets de viscosité; l'origine de la valeur nettement inférieure à l'unité de ce nombre dans le problème traité ici est la très petite valeur de l'épaisseur h du film d'air sous le mobile, qui fait que les forces de viscosité $\eta (\partial^2 v_r / \partial z^2)$ sont très importantes (elles varient comme $1/h^2$).

On rencontre ailleurs cette propriété de sustentation par effets de viscosité : c'est le phénomène de lubrification hydrodynamique qui permet par exemple de diminuer les efforts sur les paliers soutenant l'arbre d'une machine tournante à axe horizontal, ou encore de limiter les effets des frottements dans les machines tournantes à axe vertical, grâce à un patin hydrodynamique; dans ces exemples, le fluide utilisé est de l'huile, ce qui permet d'obtenir des forces de sustentation beaucoup plus importantes.

(ii) L'expression trouvée ici pour le nombre de REYNOLDS

$$Re = \frac{v_r h^2}{\nu_r r} \text{ peut surprendre; en effet, on écrit souvent}$$

directement l'expression de ce nombre sous la forme [4]

$$Re = \frac{v l}{\nu} \text{ où } l \text{ est une « longueur caractéristique de l'écoulement », c'est-à-dire une distance sur laquelle la vitesse varie de}$$

manière appréciable ; ceci est vrai si *une seule* longueur apparaît naturellement dans le problème (*); or ici, il y en a deux :

- l'une (h) dans la direction verticale, qui intervient dans les forces de viscosité [termes en $\eta \partial^2 v_r / \partial z^2$];
- l'autre (r) qui apparaît dans les termes convectifs [$v_r (\partial v_r / \partial r)$], qui n'ont d'importance que dans la direction radiale.

Il aurait été donc incorrect d'écrire directement $R = \frac{v_r h}{\nu}$,

qui conduit à une valeur $R \approx 50$, ne permettant plus de négliger les termes convectifs devant les termes de viscosité.

(iii) L'utilisation (incorrecte ici) de la relation de BERNOULLI [7] [8] [9] $p + (1/2) \rho v^2 = c^e$ aurait conduit à une conclusion surprenante ; en effet, supposons que le palet soit très légèrement incliné sur l'horizontale, donc que le film d'air ait une épaisseur non constante ; du côté où cette épaisseur diminue, la vitesse augmente (conservation du débit = vitesse \times surface) ; la pression sous le palet diminue donc de ce côté, entraînant une diminution supplémentaire de l'épaisseur du film ; l'équilibre du palet serait donc instable ! En revanche, l'utilisation de la relation (11) nous montre que la force de sustentation F varie comme $(1/h^3)$, et donc augmente si h diminue, ce qui correspond à un équilibre stable.

La relation de BERNOULLI est inapplicable dans notre problème, car elle traduit la conservation de l'énergie, à l'exclusion de toute perte par viscosité ; elle est vraie pour un fluide parfait (viscosité nulle), et est utilisable dans les régions d'un écoulement où les effets de la viscosité sont négligeables (régions à faibles gradients de vitesse), ce qui n'est évidemment pas le cas ici.

(*) C'est le cas, par exemple, de l'écoulement autour d'une sphère de rayon a , dans un canal de grandes dimensions devant a ; le nombre de REYNOLDS d'un tel écoulement sera alors naturellement $R = va/\nu$ où v représente la vitesse du fluide loin de la sphère.

REFERENCES

-
- [1] FEYNMAN, LEIGHTON et SANDS. — *Le cours de Physique de Feynman, Electromagnétisme 2* (Interéditions, 1979), p. 401.
- [2] BRUHAT. — *Mécanique* (Masson, 1967), p. 495 et 513.
- [3] LANDAU et LIFCHITZ. — *Mécanique des fluides* (Mir, 1971), p. 62.
- [4] Référence (1), p. 402.
- [5] Référence (3), p. 71.
- [6] BRUN, MARTINOT-LAGARDE et MATHIEU. — *Mécanique des fluides - tome 2* (Dunod, 1968), p. 4 et 9.
- [7] Référence (1), p. 384.
- [8] Référence (2), p. 498.
- [9] Référence (3), p. 19.

BIBLIOGRAPHIE SUPPLEMENTAIRE

-
- D.-J. TRITTON. — *Physical Fluid Dynamics* (Van Nostrand Reinhold, 1977).
- G.-K. BATCHELOR. — *Fluid Dynamics* (Cambridge University Press, 1967).
- A.-R. PETERSON. — *A first course in fluid dynamics* (Cambridge University Press, 1983).
- HUGHES et BRIGHTON. — *Fluid dynamics - série Schaum* (Mc Graw-Hill, 1967).
- R. COMOLET. — *Mécanique expérimentale des fluides* (Masson, 1961).
-

Notons également qu'il existe une série de films sonores 16 mm illustrant divers aspects de la mécanique des fluides, et produits par le National Committee for Fluid Mechanics; ils peuvent être empruntés au Service du Film de la Recherche Scientifique (96, boulevard Raspail - 75272 Paris - Tél. : 42.22.46.44). Citons en particulier, le très beau film « Ecoulements aux faibles nombres de Reynolds » de G. TAYLOR, qui montre notamment des effets de lubrification hydrodynamique.