

L'introduction de la constante d'action h par PLANCK (1900)

par H. GRÉ.

Cet exposé s'inspire très directement d'un texte de Conférence d'Alfred KASTLER, intitulé : « Max PLANCK et le concept de quantum d'énergie lumineuse, $\mathcal{E} = h\nu$ ». On y verra la hardiesse des hypothèses émises par PLANCK, lequel eut d'ailleurs beaucoup de mal à se convaincre lui-même de leur bien-fondé.

I. LE RAYONNEMENT THERMIQUE DU CORPS NOIR.

Si on chauffe un corps, celui-ci émet un rayonnement de nature électromagnétique appelé « *rayonnement thermique* ». Le rayonnement thermique est caractérisé par un spectre *continu*, ceci en opposition avec les spectres de raies observées, par exemple, dans les tubes à décharge.

Un cas particulier important du point de vue théorique est le rayonnement thermique du *corps noir*. Le corps noir est un objet idéalisé caractérisé par le fait qu'il absorbe *intégralement* toutes les radiations électromagnétiques qu'il reçoit. Dans ces conditions, une loi due à KIRCHHOFF, indique que c'est le corps noir qui émet le rayonnement thermique maximal.

On peut schématiser un corps noir en *équilibre thermique* à la température absolue T par une enceinte vide plongée dans un thermostat à cette même température (fig. 1). Le rayonnement thermique émis par les parois est réabsorbé par ces mêmes parois de manière à assurer l'équilibre. Si on perce une petite ouverture dans l'enceinte, tout rayonnement extérieur pénétrant dans la cavité ne peut pratiquement ressortir et est ainsi « piégé » dans l'enceinte. Vu de l'extérieur, le trou de l'ouverture apparaît ainsi comme « noir ».

La cavité est de la sorte baignée par un rayonnement électromagnétique caractérisée par une densité volumique d'énergie u (en $J.m^{-3}$). Toutes les fréquences participent (inégalement) à cette densité, le spectre du rayonnement étant continu.

Entre les fréquences ν et $\nu + d\nu$, la densité volumique d'énergie est :

$$du = u_\nu d\nu \quad (1)$$

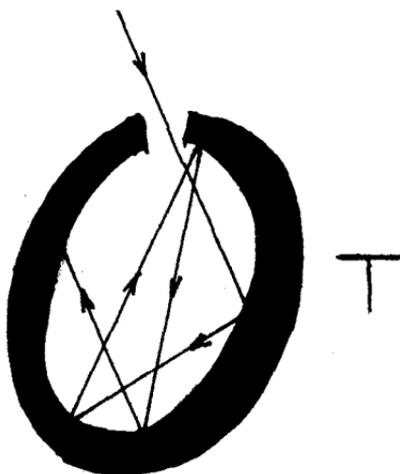


Fig. 1. — Enceinte noire, piège à rayonnement.

la fonction u_ν dépendant de la fréquence ν et de la température T . On notera que u_ν se mesure en J.s.m^{-3} [densité volumique d'action (*)].

KIRCHHOFF avait montré que u_ν était une fonction universelle de ν et de T . En 1894, WIEN (**) précisa que u_ν devait être de la forme générale :

$$u_\nu = \nu^3 F(\nu/T) \quad (2)$$

où $F(\nu/T)$ est une fonction universelle.

A partir de (2), on montre facilement que, pour T donnée, u_ν passe par un maximum pour une longueur d'onde $\lambda_m = c/\nu_m$ telle que :

$$\lambda_m T = \text{Cte} \quad (3)$$

la constante étant universelle. C'est sous cette forme (3) que l'on énonce la loi dite du « déplacement » de WIEN et qui indique que le rayonnement prépondérant correspond à une longueur d'onde d'autant plus courte que la température est plus élevée, soit un « déplacement » du rouge au bleu lorsque T croît. La courbe de la fig. 2 donne l'allure de la variation de la fonction u_ν en fonction de ν pour différentes valeurs de T .

(*) La grandeur « action » est le produit d'une énergie par un temps.

(**) Wilhelm WIEN, physicien allemand (1864-1928); prix Nobel de Physique (1911) pour ses travaux sur le rayonnement noir.

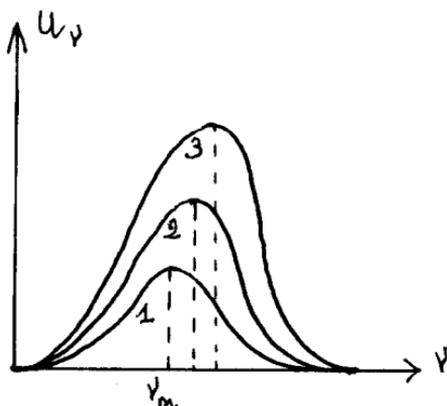


Fig. 2. — Densité spectrale pour différentes températures ($T_1 < T_2 < T_3$).

II. LES EXTREMITES DU SPECTRE.

En 1896, WIEN proposait la fonction :

$$F(\nu/T) = \alpha e^{-\beta \nu/T}$$

où α et β sont des constantes, d'où :

$$u_\nu = \alpha \nu^3 e^{-\beta \nu/T}. \quad (4)$$

En 1900, les mesures de u_ν effectuées dans l'infrarouge lointain (faibles fréquences) par KURLBAUM et PRINGSHEIM d'une part et RUBENS d'autre part, infirmèrent la relation (4). Ces mesures montraient que dans ce domaine de fréquences u_ν variait proportionnellement à T . La même année RAYLEIGH donnait une interprétation de ce résultat, basée sur la thermodynamique et plus particulièrement le théorème d'équipartition de l'énergie. RAYLEIGH fait intervenir le nombre de « modes » du rayonnement par unité de volume dans la cavité. Le rayonnement enfermé dans cette cavité constitue, en effet, un système d'ondes stationnaires. On peut décompter le nombre d'ondes stationnaires dont le module du vecteur d'onde est compris entre k et $k + dk$ (modes d'ondes stationnaires). Le calcul, maintenant très classique, montre que le nombre de modes par unité de volume de la cavité et correspondant à l'intervalle de fréquences ν , $\nu + d\nu$, vaut :

$$dg = 2 \cdot \frac{4\pi \nu^2}{c^3} d\nu \text{ (en m}^{-3}\text{)}.$$

Le facteur 2 tient compte de l'existence des états de polarisation des ondes électromagnétiques, tout état de polarisation

pouvant être obtenu par superposition de 2 états de polarisation pris comme référence.

On définit ainsi une densité de modes par intervalle de fréquence, par unité de volume de la cavité :

$$g = \frac{dg}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \text{ (en m}^{-3}\cdot\text{s)}. \quad (5)$$

La relation (5) est valable, soulignons-le, dans un domaine de fréquences quelconque.

La grandeur g correspond, pour le rayonnement, à un nombre de *degrés de liberté* de sorte que la grandeur :

$$u_1 = \frac{u_\nu}{g} \text{ (en J)} \quad (6)$$

représente l'énergie par degré de liberté. Le théorème de l'équipartition de l'énergie en thermodynamique classique, établit qu'à l'équilibre thermique à la température T , u_1 a la valeur :

$$u_1 = k_B T \quad (7)$$

où k_B désigne la constante de BOLTZMANN.

On en déduit :

$$u_\nu = g u_1 = \frac{8\pi k_B}{c^3} \nu^2 T (*) \quad (8)$$

qui exprime la loi de RAYLEIGH-JEANS. Cette loi, de type parabolique en fonction de ν , s'accorde effectivement bien aux résultats expérimentaux dans le domaine des fréquences peu élevées (IR) mais cesse d'être vérifiée pour des fréquences plus grandes.

En particulier (8) prévoit une valeur de u_ν tendant vers l'infini lorsque $\nu \rightarrow \infty$, ce qui est inacceptable. La référence au théorème de l'équipartition de l'énergie doit être remise en cause hors du domaine des fréquences peu élevées.

Par contre, la relation (4) de WIEN semblait bien décrire l'autre extrémité du spectre (fréquences élevées du domaine UV), de sorte que dans ce domaine :

$$u_1 = \frac{u_\nu}{g} = \frac{\alpha c^3}{8\pi} \nu e^{-\beta \nu/T}$$

(*) De la forme (2) avec $F(\nu/T) = \frac{8\pi k_B}{c^3} \left(\frac{\nu}{T}\right)^{-1}$.

soit :

$$u_1 = h \nu e^{-\beta \nu/T} \quad (9)$$

où on a posé :

$$h = \frac{\alpha c^3}{8 \pi} \quad (10)$$

Là commence l'histoire de la constante h .

III. LE « RACCORDEMENT » DE PLANCK.

En 1900, on disposait ainsi d'expressions satisfaisantes de la fonction u_ν (ou de u_1) aux deux extrémités du spectre :

- domaine de RAYLEIGH : $u_1 = \frac{8 \pi k_B}{c^3} T \nu^2,$
- domaine de WIEN : $u_1 = h \nu e^{-\beta \nu/T}.$

Mais l'expression générale de u_ν (ou u_1) pour toute fréquence restait à établir. C'est à ce travail que PLANCK va se consacrer.

Il s'agit donc de « raccorder » les deux bouts du spectre. L'approche de PLANCK est basée sur la thermodynamique.

Rappelons que pour un système en équilibre thermique, la température T obéit à la relation :

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_V$$

où U est l'énergie interne du système et S son entropie. Dans le cas considéré ici, où le rayonnement est enfermé dans une cavité de volume V constant, il suffira d'écrire :

$$\frac{1}{T} = \frac{dS}{dU} \quad (11)$$

PLANCK introduit, de façon analogue à u_1 , l'entropie par mode :

$$s_1 = \frac{s_\nu}{g} \quad (12)$$

où s_ν est l'entropie volumique du rayonnement par intervalle de fréquence. La relation (12) sous-entend, pour avoir une signification, une additivité des entropies des divers modes, ce qui, de fait, suppose l'indépendance (incohérence) de ces différents modes.

La relation (11) se maintient avec les grandeurs u_1 et s_1 , de sorte que, à l'équilibre thermique :

$$\frac{1}{T} = \frac{ds_1}{du_1}. \quad (13)$$

PLANCK considère alors la grandeur :

$$\mathfrak{R} = - \left(\frac{d^2s_1}{du_1^2} \right)^{-1} \text{ (en J. K)}$$

qui va lui donner la clé de la réponse.

• Dans le domaine de WIEN :

$$u_1 = h\nu e^{-\beta\nu/T}$$

soit :

$$\frac{1}{T} = - \frac{1}{\beta\nu} \ln \frac{u_1}{h\nu}.$$

D'après (13) :

$$\frac{ds_1}{du_1} = - \frac{1}{\beta\nu} \ln \frac{u_1}{h\nu}$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{d^2s_1}{du_1^2} = - \frac{1}{\beta\nu} \frac{1}{u_1}$$

et :

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_W = \beta\nu u_1. \quad (14)$$

Cette relation avait été obtenue par PLANCK en 1899 sur la base de la formule (9) de WIEN supposée alors (à tort) valable pour une fréquence quelconque.

• Dans le domaine de RAYLEIGH :

$$u_1 = k_B T$$

d'où :

$$\frac{1}{T} = \frac{k_B}{u_1} = \frac{ds_1}{du_1}$$

et :

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_R = \frac{u_1^2}{k_B}. \quad (15)$$

Pour déterminer la forme générale de la fonction u_1 , PLANCK a alors l'intuition de faire l'hypothèse que pour une fréquence quelconque on doit avoir :

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_W + \mathfrak{R}_R \quad (16)$$

expression qui redonne bien les valeurs particulières \mathfrak{R}_R ou \mathfrak{R}_W aux extrémités du spectre.

En effet, aux fréquences peu élevées $\mathfrak{R}_W \approx 0$ alors que \mathfrak{R}_R a la valeur constante $k_B T^2$. A l'inverse, dans le domaine des fréquences élevées $\mathfrak{R}_W \gg \mathfrak{R}_R$ car :

$$\mathfrak{R}_W = \beta h \nu^2 e^{-\beta \nu/T} \text{ et } \mathfrak{R}_R = \frac{h^2 \nu^2}{k_B} e^{-2 \beta \nu/T}.$$

La relation (16) s'écrit :

$$\left(\frac{d^2 s_1}{du_1^2} \right)^{-1} = \beta \nu u_1 + u_1^2/k_B$$

ou :

$$\frac{d^2 s_1}{du_1^2} = 1/u_1 (u_1/k_B + \beta \nu).$$

Par intégration, compte tenu de $\frac{ds_1}{du_1} = \frac{1}{T}$, on obtient :

$$u_1 = \frac{k_B \beta \nu}{a e^{\beta \nu/T} - 1} \quad (17)$$

où a est une constante d'intégration.

- aux basses fréquences :

$$u_1 \approx k_B T$$

ce qui impose que $a = 1$;

- aux fréquences élevées, en identifiant (17) à (9), on obtient :

$$\beta = h/k_B. \quad (18)$$

La relation (17) prend ainsi la forme :

$$u_1 = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \quad (19)$$

d'où :

$$u_\nu = \frac{8 \pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \quad (20)$$

qui est bien de la forme (2).

Telle est la célèbre formule de PLANCK qui donne la densité spectrale d'énergie pour le rayonnement du corps noir en total accord avec les résultats expérimentaux. PLANCK considérait l'hypothèse (16) de raccordement comme une « heureuse trouvaille ». Il obtint en effet la valeur *exacte* de \mathfrak{R} pour une fréquence quelconque à partir des valeurs \mathfrak{R}_W et \mathfrak{R}_R qui n'étaient en fait que des valeurs *approchées* de \mathfrak{R} aux extrémités du spectre !

IV. L'INTERPRETATION DE PLANCK : LA QUANTIFICATION DU RAYONNEMENT ELECTROMAGNETIQUE.

Un esprit rigoureux et exigeant comme l'était PLANCK ne pouvait s'accommoder d'une hypothèse, certes efficace, mais qui était inexplicée. Il restait à donner une interprétation de la relation (20). Ce travail déboucha rapidement sur l'idée d'une quantification nécessaire du rayonnement. PLANCK présenta le résultat de cette recherche, qui s'avéra cruciale, devant la Société de Physique de Berlin le 14 décembre 1900. Dégageons les idées essentielles qui guidèrent PLANCK dans ce travail.

De la relation (19), on déduit :

$$\frac{ds_1}{du_1} = \frac{1}{T} = \frac{k_B}{hv} \ln(1 + 1/x) \quad \text{avec} \quad x = \frac{u_1}{hv}$$

d'où, par intégration :

$$s_1 = k_B [(1 + x) \ln(1 + x) - x \ln x]$$

la constante d'intégration étant choisie de telle sorte que $s_1 \rightarrow 0$ lorsque $T \rightarrow 0$ (cette condition traduit ce que nous appelons aujourd'hui le principe de NERNST-PLANCK). On en déduit :

$$s_v = g s_1 = k_B g [(1 + x) \ln(1 + x) - x \ln x]. \quad (21)$$

PLANCK rapproche la relation (21) de celle de BOLTZMANN :

$$S = k_B \ln W \quad (22)$$

qui donne une signification statistique de l'entropie, W étant le nombre de complexions du système à l'équilibre. La relation de BOLTZMANN utilise un modèle *discontinu*. PLANCK perçoit que la relation (21) ne peut également découler que d'une structure *discontinue* du rayonnement. Il postule que l'énergie u_v est constituée d'un nombre *fini* N d'éléments de valeur \mathcal{E} , soit :

$$u_v = \mathcal{E} N (= g u_1). \quad (23)$$

Pour calculer $s_v = g s_1$ selon la relation (22) :

$$s_v = k_B \ln W_v$$

on est amené, pour la fréquence ν , à distribuer les N éléments entre les g modes. Si on suppose les éléments *indiscernables* :

$$W_\nu = \frac{(N + g - 1)!}{N!(g - 1)!} \quad (24)$$

avec $N/g = u_1/\mathcal{E}$.

La relation (24) résulte d'un simple dénombrement. Représentons les N éléments d'énergie par des points et les g modes par des cases (fig. 3). On obtient les diverses complexions en



Fig. 3. — Répartition de N éléments ($N = 19$) entre g cases ou modes ($g = 9$). Il y a $g - 1 = 8$ barres.

permutant un point avec l'une des $g - 1$ barres. L'indiscernabilité fait qu'il n'y a pas à prendre en compte les permutations des points entre eux (division par $N!$). Par ailleurs la permutation des barres entre elles ne change évidemment rien (division par $(g - 1)!$)

N et g étant supposées grandes, l'approximation de STIRLING, soit :

$$\ln N! \approx N \ln N - N \quad \text{et} \quad \ln g! \approx g \ln g - g$$

donne :

$$s_\nu = k_B g [(1 + N/g) \ln (1 + N/g) - (N/g) \ln (N/g)]$$

avec $N/g = u_1/\mathcal{E}$, soit :

$$s_\nu = k_B g [(1 + u_1/\mathcal{E}) \ln (1 + u_1/\mathcal{E}) - (u_1/\mathcal{E}) \ln (u_1/\mathcal{E})]$$

qui s'identifie à (21) à condition de poser :

$$x = \frac{u_1}{h\nu} = \frac{u_1}{\mathcal{E}}$$

d'où :

$$\boxed{\mathcal{E} = h\nu} \quad (25)$$

L'énergie électromagnétique apparaît ainsi comme *quantifiée*, présentant une structure discontinue en grains d'énergie de valeur $h\nu$.

A partir des données expérimentales relatives au rayonnement noir, PLANCK obtint des valeurs de h et k_B , soit en unités actuelles :

$$h = 6,55 \cdot 10^{-34} \text{ J. s}$$

$$k_B = 1,346 \cdot 10^{-23} \text{ J. K}^{-1}$$

d'où il déduisit une valeur du nombre d'Avogadro $\mathcal{N} = R/k_B$. Il donna également une valeur de la charge de l'électron à partir de celle du Faraday et de \mathcal{N} ($F = \mathcal{N}e$).

Je voudrais conclure par deux remarques, l'une d'ordre historique, l'autre d'ordre plus pédagogique.

- Dans son travail de 1900, PLANCK considérait non pas, comme nous l'avons présenté dans un souci de simplification, le rayonnement en lui-même dans la cavité, mais les *échanges* d'énergie entre le rayonnement et les parois de la cavité. Il assimilait ces parois à un ensemble d'oscillateurs harmoniques constitués chacun d'une charge électrique mise en mouvement d'oscillations forcées à la fréquence ν par le champ électrique de l'onde électromagnétique pour cette fréquence. Dans une telle description, la grandeur u_1 représentait l'énergie moyenne d'un oscillateur. PLANCK établit une relation entre u_1 et la densité volumique d'énergie du rayonnement u_ν soit :

$$u_\nu = g u_1.$$

Par un calcul long (une cinquantaine de pages!), PLANCK parvint à établir l'expression (5) de g . (La même année et antérieurement, RAYLEIGH avait obtenu très simplement cette même expression de g en comptabilisant, comme nous l'avons indiqué au paragraphe II, les modes du rayonnement dans la cavité).

Dans ce contexte, basé sur les échanges d'énergie, PLANCK supposait, en fait, que la quantification de l'énergie électromagnétique n'apparaissait précisément qu'à l'occasion des échanges d'énergie entre le rayonnement et la matière.

En 1905, dans son interprétation de l'effet photoélectrique, EINSTEIN proposa une hypothèse beaucoup plus radicale, à savoir la quantification du rayonnement lui-même. Une controverse à ce sujet opposa longtemps les deux physiciens. Il y a quelques années, la discussion sembla resurgir. En fait, on peut considérer actuellement qu'il y a identité des deux points de vue.

• Il est assez remarquable que l'idée de quantifier le rayonnement a été introduite pour interpréter un spectre *continu*. Cette constatation montre que lorsqu'on évoque, à propos de la mécanique quantique, l'idée de discontinu, il faut être précis.

Il convient de bien distinguer :

- la continuité ou la discontinuité d'un spectre,
- la quantification du rayonnement électromagnétique.

Rappelons, à ce sujet, l'existence de spectres d'énergie continus correspondant à des solutions de l'équation de SCHRÖDINGER à valeur positive de l'énergie (états non liés). Le rayonnement thermique est produit précisément par le mouvement désordonné d'agitation thermique des particules (*) constituant le corps chauffé, ce mouvement correspondant à des états non liés. Certes, une discontinuité des niveaux d'énergie (atomiques, moléculaires...) implique celle du rayonnement. Mais, à l'inverse, supposer que l'énergie électromagnétique est quantifiée en grains d'énergie de valeur $h\nu$ n'implique pas nécessairement que le spectre soit discontinu.

(*) Classiquement il s'agit du rayonnement d'accélération des charges électriques ainsi mises en mouvement.