

Résolution de l'équation de Laplace en électrostatique à l'aide d'un micro-ordinateur

par Marc CHAPELET,

11 bis, rue Ernest-Psichari, Le Chesnay.

METHODE DE RELAXATION

Cet article présente une méthode de résolution de l'équation de Laplace pour des conducteurs en équilibre. Il est nécessaire de disposer d'un micro-ordinateur ayant une grande capacité mémoire.

1. PRINCIPE.

On détermine le potentiel en un point donné en moyennant le potentiel des points les plus voisins (généralement au nombre de 4). Il en résulte qu'il est nécessaire de procéder à des itérations successives pour obtenir la valeur réelle du potentiel au point considéré. Le potentiel obéit à l'équation de Laplace ; de plus il est imposé par les conditions limites c'est-à-dire par la valeur du potentiel des conducteurs en présence.

2. UN EXEMPLE : LE CONDENSATEUR PLAN.

L'armature A est au potentiel $V_A = 100$ V.

L'armature E est au potentiel $V_E = 0$ V.

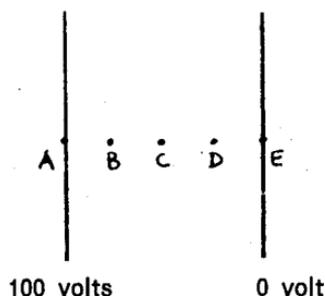


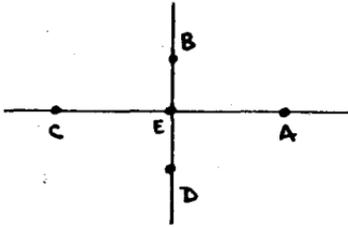
Fig. 1

Déterminons par itérations successives : V_B , V_C , V_D :

ANNEXE

Expression approchée du potentiel en un point E, en fonction du potentiel des points voisins.

a) EN COORDONNÉES CARTÉSIENNES A 2 DIMENSIONS :



Coordonnées : E (x_0, y_0)

$$A(x_0 + h_1, y_0)$$

$$B(x_0, y_0 + h_2)$$

$$C(x_0 - h_1, y_0)$$

$$D(x_0, y_0 - h_2)$$

Développements limités des potentiels Φ_A , Φ_B , Φ_C , Φ_D au voisinage du point E :

$$\Phi_A = \Phi(x_0 + h_1, y_0) = \Phi(x_0, y_0) + h_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{x_0, y_0} + \frac{h_1^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_{x_0, y_0}$$

$$\Phi_C = \Phi(x_0 - h_1, y_0) = \Phi(x_0, y_0) - h_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{x_0, y_0} + \frac{h_1^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_{x_0, y_0}$$

$$\Phi_B = \Phi(x_0, y_0 + h_2) = \Phi(x_0, y_0) + h_2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{x_0, y_0} + \frac{h_2^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_{x_0, y_0}$$

$$\Phi_D = \Phi(x_0, y_0 - h_2) = \Phi(x_0, y_0) - h_2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{x_0, y_0} + \frac{h_2^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_{x_0, y_0}$$

$$\text{on en tire : } \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_{x_0, y_0} = \frac{\Phi_A + \Phi_C - 2\Phi(x_0, y_0)}{h_1^2} \text{ et}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_{x_0, y_0} = \frac{\Phi_B + \Phi_D - 2\Phi(x_0, y_0)}{h_2^2}$$

Or, l'équation de Laplace s'écrit : $\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$;

on en déduit au point E :

$$\Phi_{(x_0, y_0)} = \Phi_E = \frac{h_2^2 (\Phi_A + \Phi_C) + h_1^2 (\Phi_B + \Phi_D)}{2(h_1^2 + h_2^2)}$$

Dans la suite, on limite notre étude à la détermination du potentiel dans un plan (x, y) en coordonnées cartésiennes ou dans un plan (ϱ, z) en coordonnées cylindriques.

3. LE TRAITEMENT EN COORDONNEES CARTESIENNES.

On définit un quadrillage de pas h_1 (selon l'axe des x) et de pas h_2 (selon l'axe des y).

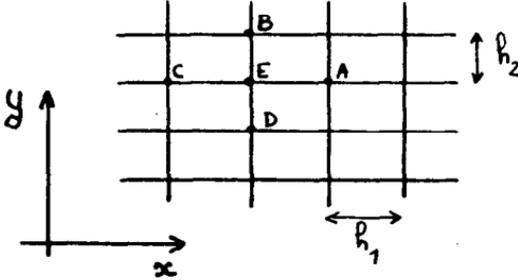


Fig. 2

Le calcul exposé en annexe montre que le potentiel au point E du quadrillage s'exprime en fonction des potentiels en A, B, C et D :

$$\Phi_E = \frac{h_2^2(\Phi_A + \Phi_C) + h_1^2(\Phi_B + \Phi_D)}{2(h_1^2 + h_2^2)}$$

généralement, on choisit : $h_1 = h_2$; alors :

$$\Phi_E = \frac{1}{4}(\Phi_A + \Phi_B + \Phi_C + \Phi_D).$$

On procède de la même façon pour chaque nœud du quadrillage. Les potentiels des conducteurs en présence constituent les conditions limites.

4. LE TRAITEMENT EN COORDONNEES CYLINDRIQUES.

On définit un quadrillage de pas $\Delta\varrho$ et Δz . Il en résulte (voir l'annexe), si $l = \Delta\varrho = \Delta z$ que :

$$\Phi_E = \frac{1}{4}[\Phi_A + \Phi_B + \Phi_C + \Phi_D + \frac{l}{2\varrho_0}(\Phi_A - \Phi_C)]$$

sauf au point singulier ($\varrho_0 = 0$) où :

$$\Phi_E(\varrho_0, z_0) = \frac{1}{6}(\Phi_B + \Phi_D + 4\Phi_A).$$

5. LE MICRO-ORDINATEUR.

Il doit pouvoir stocker à chaque itération la valeur du potentiel en chaque nœud du quadrillage. La capacité mémoire doit être importante : 100 valeurs stockées pour un quadrillage 10×10 ; 1600 valeurs enregistrées pour un quadrillage 40×40 . Une imprimante peut s'avérer fort utile; les valeurs du potentiel sont imprimées sous forme de tableaux qui respectent le choix du quadrillage.

6. LA METHODE DE RELAXATION.

Il existe de nombreuses méthodes mathématiques pour réduire le temps de calcul. Ces méthodes définissent des critères de convergence rapide afin de minimiser le nombre des itérations nécessaires à l'obtention des valeurs du potentiel aux nœuds du quadrillage.

Soit : $\Phi_n(E)$ la valeur du potentiel au point E après n itérations et $\Phi_{n+1}(E)$ la valeur après $(n + 1)$ itérations; la méthode de relaxation consiste à remplacer $\Phi_{n+1}(E)$ par une combinaison judicieuse de $\Phi_{n+1}(E)$ et de $\Phi_n(E)$.

On choisit :

$$\Phi'_{n+1} = k \Phi_{n+1} + (1 - k) \Phi_n \quad \text{avec} \quad 1 < k < 2.$$

7. CRITERE DE CONVERGENCE RAPIDE.

Les mécanismes de relaxation sont appliqués dans ce paragraphe à un cas simple; on veut déterminer la valeur du potentiel pour un condensateur cylindrique représenté fig. 3.

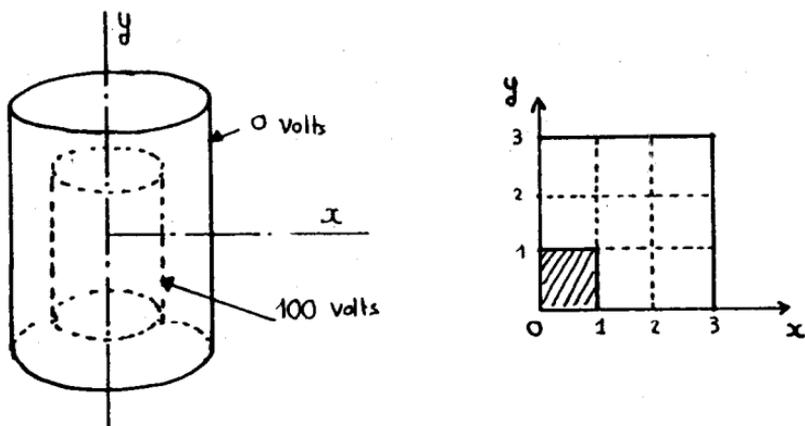


Fig. 3

La symétrie cylindrique nous permet de restreindre l'étude à un demi-plan xOy . Le quadrillage 3×3 a un pas de 1 ($P = 1$).

Le tableau II présente les valeurs testées pour le facteur d'itération k , défini au paragraphe 6. Le tableau II permet de déterminer les valeurs de k assurant un maximum de rapidité de la convergence.

Tableau II

k	écart $ V_{\text{après } n \text{ itérations}} - V_{\text{réel}} $		
	quadrillage 3 x 3 pas P=1 ap.5 itéra.	quadr. 6x6 P=0,5 10 itér.	quadr. 12x12 P=0.25 20 ité.
1.00	0.10		
1.05	0.00		
1.10	0.00		
1.20	0.05	0.4	
1.30	0.20	0.1	
1.35		0.00	
1.40	1.00	0.0	
1.50		0.1	0.30
1.60	7.2	0.8	0.00
1.70			0.10
1.80	27.2		

Les valeurs obtenues sont :

- $k \approx 1,05$ pour $P = 1$ (quadrillage 3×3),
 $k \approx 1,35$ pour $P = 0,5$ (quadrillage 6×6),
 $k \approx 1,60$ pour $P = 0,25$ (quadrillage 12×12).

En fait, des méthodes délicates d'étude de la convergence des séries mathématiques montrent que k peut avoir une expression approchée fort simple :

$$k \approx \frac{2}{1 + \Delta}$$

avec : $\Delta \approx \frac{\text{pas du quadrillage (P)}}{\text{plus petite dimension des conducteurs (R)}}$.

Ainsi dans l'exemple étudié ; pour un quadrillage 3×3 on a $P = 1$, et le rayon du conducteur central vaut $R = 1$ (les unités sont arbitraires), d'où :

$$k_{P=1} \simeq \frac{2}{1 + 1/1} = 1.$$

On en déduit :

$$k_{P=0,5} \simeq \frac{2}{1 + 0,5} \simeq 1,33 \quad \text{et} \quad k_{P=0,25} = \frac{2}{1 + 0,25} = 1,60.$$

Remarques.

* Le facteur Δ n'est pas toujours simple à déterminer ; il est plus simple de déterminer Δ expérimentalement en étudiant l'écart $|V_{iteration} - V_{reel}|$ pour différentes valeurs de k (tableau II). Ainsi, dans l'exemple étudié pour $P = 1$, on détermine empiriquement que $k_{(P=1)} \simeq 1,05$, d'où on en tire :

$$\Delta = \frac{2}{1,05} - 1 = 0,90.$$

Pour un pas moitié du précédent, il vient donc :

$$k_{P=0,5} \simeq \frac{2}{1 + 0,90/2} \simeq 1,38$$

et :

$$k_{P=0,25} = \frac{2}{1 + 0,90/4} \simeq 1,63.$$

* Seulement les potentiels obtenus par valeurs limites peuvent différer légèrement des valeurs exactes. L'accord est excellent si le pas du quadrillage est petit devant la plus petite dimension des conducteurs, c'est-à-dire si $\Delta < 1$.

Ainsi,

pour $P = 1$	($\Delta = 1$ car $R = 1$) l'écart atteint 5 %,
pour $P = 0,5$	l'écart est de 2 %,
pour $P = 0,25$	l'écart est de 0,7 %.

* La détermination de la valeur « idéale » de k économise un temps de calcul considérable.

8. RESULTATS.

Le micro-ordinateur relié à une imprimante donne les valeurs du potentiel en chaque point du quadrillage. Les valeurs sont présentées sous forme de tableau qui reflète la disposition du quadrillage (fig. 4 - 6). Il suffit ensuite de relier les points de même potentiel pour dessiner les équipotentielles (fig. 5 - 7).

Le micro-ordinateur utilisé est un SHARP PC 1500 connecté à l'imprimante SHARP CE 150.

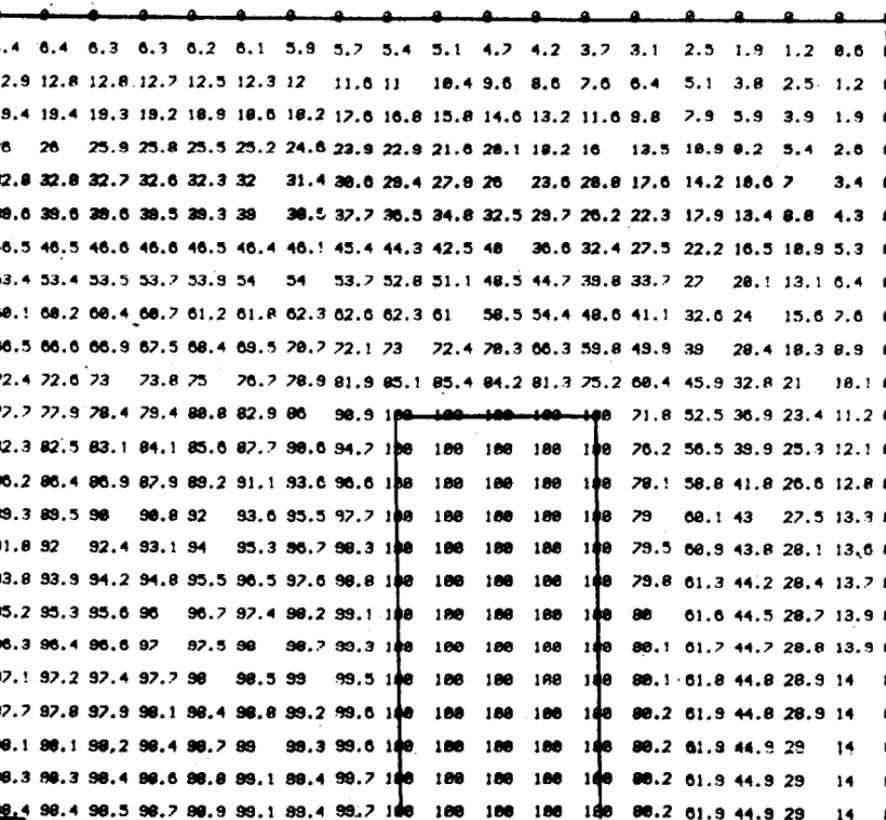


Fig. 4

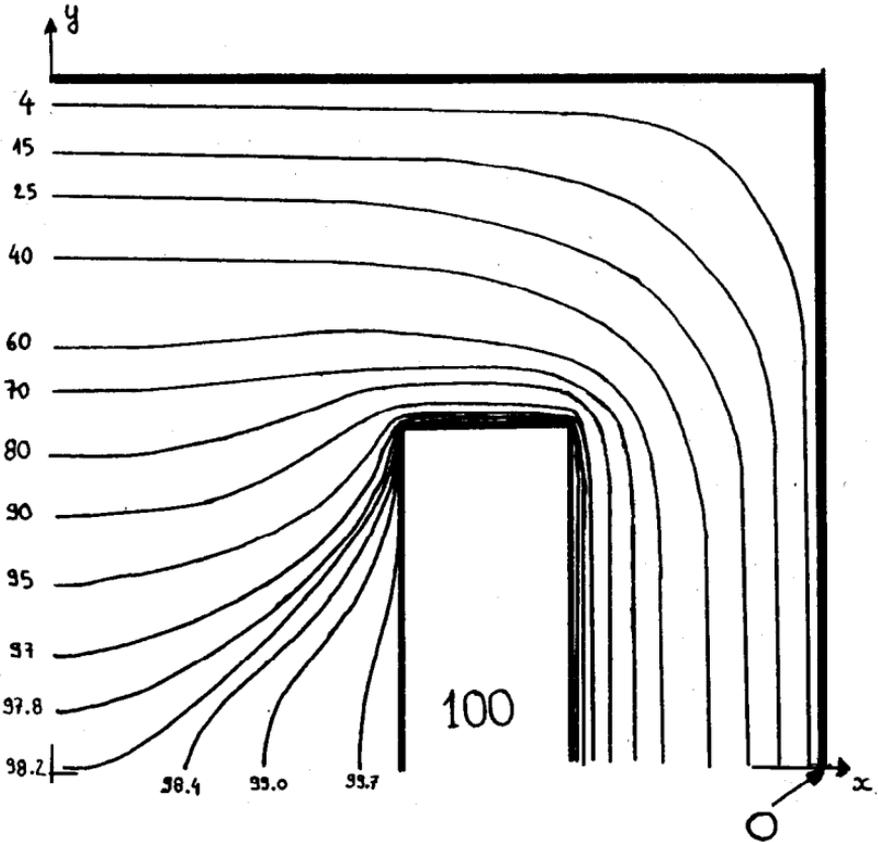


Fig. 5

9. CONCLUSION.

La résolution de l'équation de Laplace en électrostatique s'applique à l'étude des lentilles électrostatiques utilisées en microscopie électronique. On peut aussi déterminer la répartition du potentiel dans une chambre à ionisation...

Par extension, on peut appliquer ces méthodes de résolution à l'étude des guides d'onde et des cavités électromagnétiques.

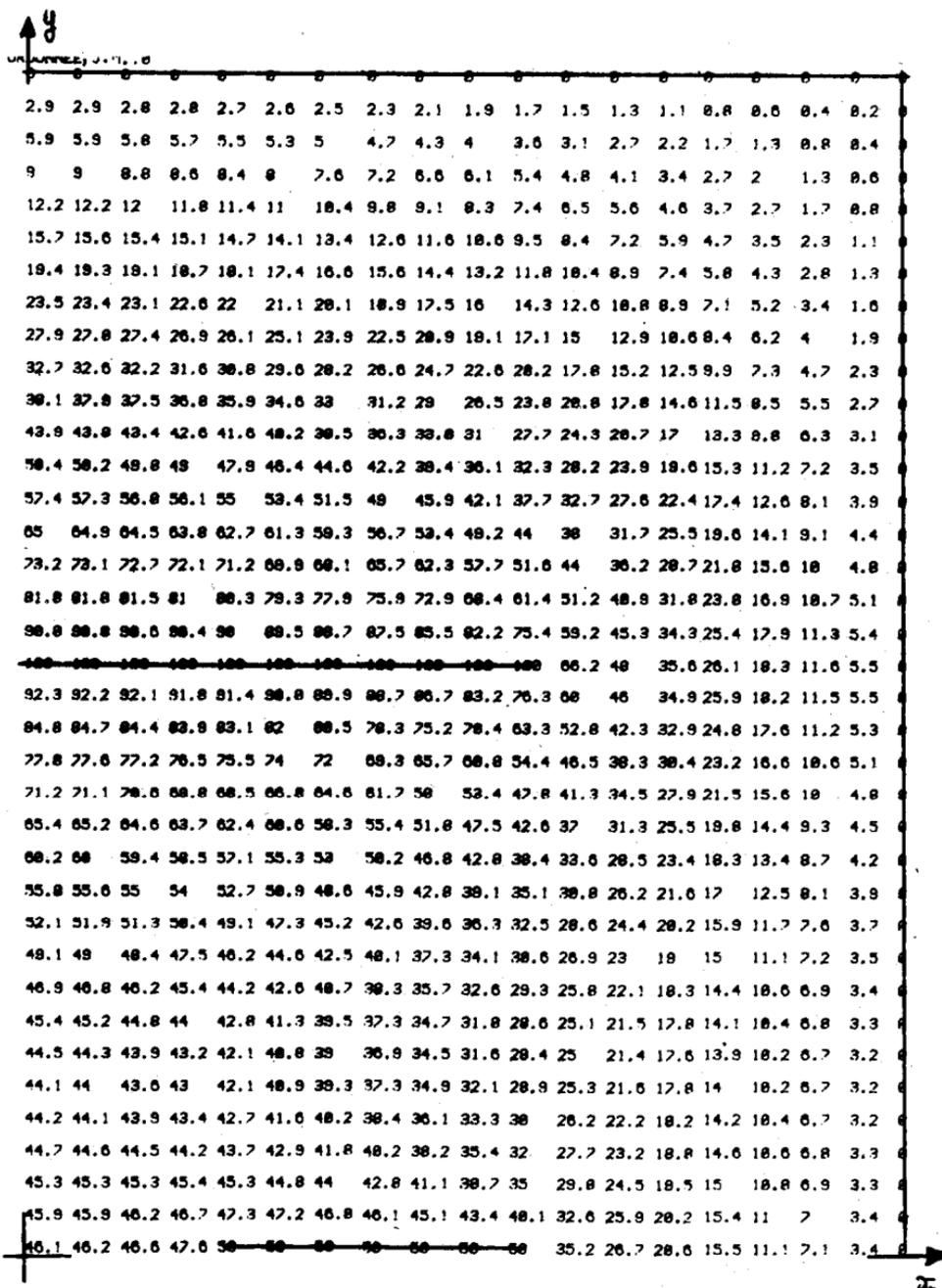


Fig. 6

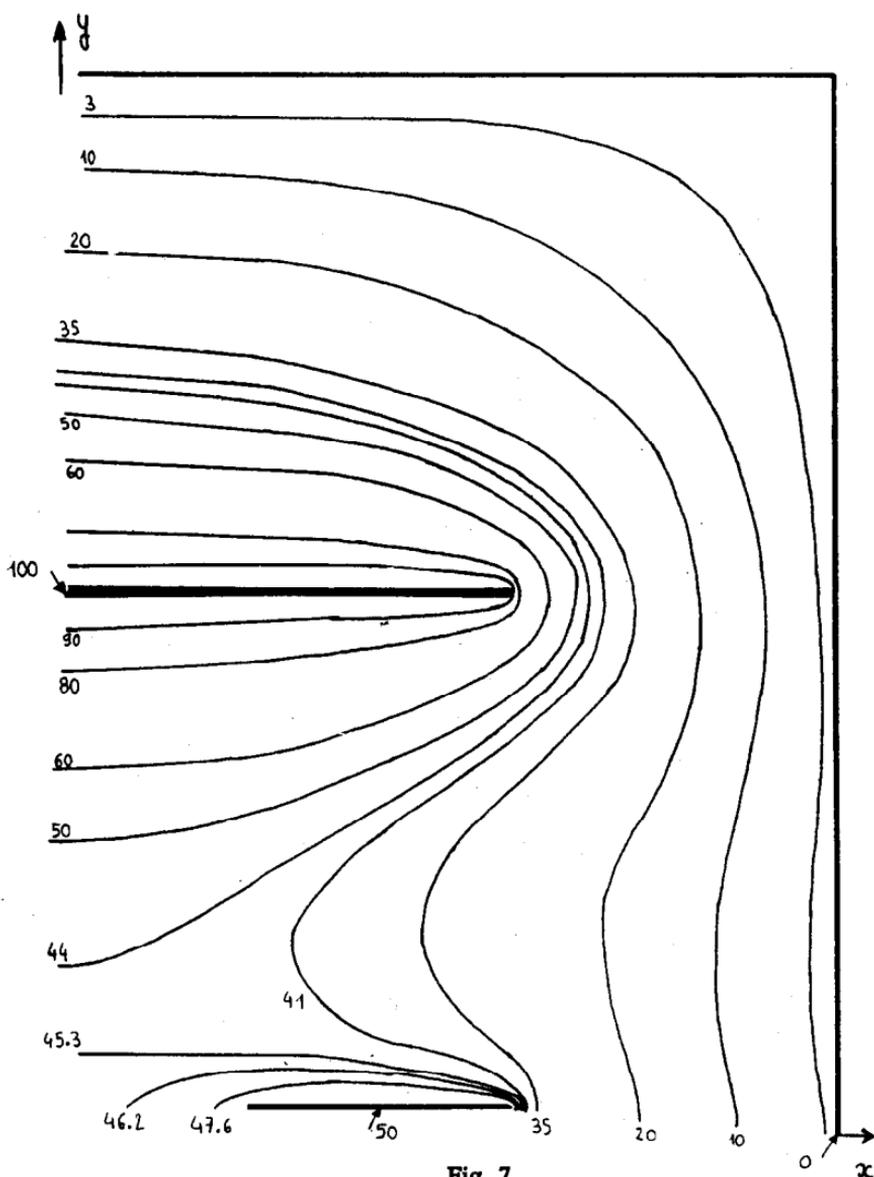


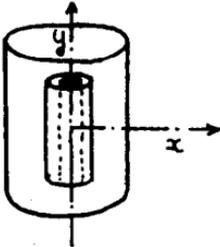
Fig. 7

BIBLIOGRAPHIE

- Les ouvrages d'Electrostatique (essentiellement en langue anglaise).
- BRUHAT. — *Electricité* (partie Electrostatique).
- *American Journal of Physics*. Mai 1979, p. 440-444.

Commentaires des figures 4, 5, 6, 7 :

Figures 4 - 5 : distribution du potentiel dans le *demi-plan* (x, y) de la cavité dessinée ci-dessous.

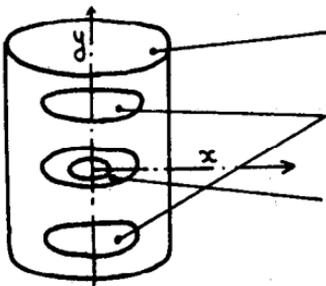


Le conducteur central creux est au potentiel 100 V.

Le conducteur externe est au potentiel 0 V.

Les équipotentielles sont représentées figure 5.

Figures 6 - 7 : distribution du potentiel dans le *demi-plan* (x, y) de la cavité cylindrique dessinée ci-dessous.



conducteur externe au potentiel 0 V

plaques minces au potentiel 100 V

anneau mince au potentiel 50 V.

Les équipotentielles sont représentées figure 7.

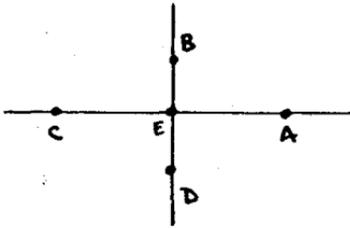
Remarque :

Il y a une symétrie de révolution autour de l'axe des y , et une symétrie par rapport au plan perpendiculaire à l'axe des y passant par l'axe des x .

ANNEXE

Expression approchée du potentiel en un point E, en fonction du potentiel des points voisins.

a) EN COORDONNÉES CARTÉSIENNES A 2 DIMENSIONS :



Coordonnées : E (x_0, y_0)

A $(x_0 + h_1, y_0)$

B $(x_0, y_0 + h_2)$

C $(x_0 - h_1, y_0)$

D $(x_0, y_0 - h_2)$.

Développements limités des potentiels $\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C, \Phi_D$ au voisinage du point E :

$$\Phi_A = \Phi(x_0 + h_1, y_0) = \Phi(x_0, y_0) + h_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{x_0, y_0} + \frac{h_1^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_{x_0, y_0}$$

$$\Phi_C = \Phi(x_0 - h_1, y_0) = \Phi(x_0, y_0) - h_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{x_0, y_0} + \frac{h_1^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_{x_0, y_0}$$

$$\Phi_B = \Phi(x_0, y_0 + h_2) = \Phi(x_0, y_0) + h_2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{x_0, y_0} + \frac{h_2^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_{x_0, y_0}$$

$$\Phi_D = \Phi(x_0, y_0 - h_2) = \Phi(x_0, y_0) - h_2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{x_0, y_0} + \frac{h_2^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_{x_0, y_0}$$

on en tire :
$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_{x_0, y_0} = \frac{\Phi_A + \Phi_C - 2\Phi(x_0, y_0)}{h_1^2} \text{ et}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_{x_0, y_0} = \frac{\Phi_B + \Phi_D - 2\Phi(x_0, y_0)}{h_2^2}.$$

Or, l'équation de Laplace s'écrit : $\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$;

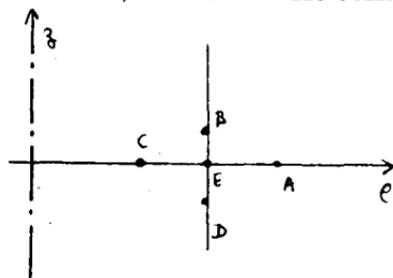
on en déduit au point E :

$$\Phi_{(x_0, y_0)} = \Phi_E = \frac{h_2^2 (\Phi_A + \Phi_C) + h_1^2 (\Phi_B + \Phi_D)}{2(h_1^2 + h_2^2)},$$

le plus souvent, on choisit $h_1 = h_2$, d'où :

$$\Phi_E = \frac{1}{4} (\Phi_A + \Phi_B + \Phi_C + \Phi_D).$$

b) EN COORDONNÉES CYLINDRIQUES (avec symétrie axiale) :



Coordonnées : E (ρ_0, z_0)

A ($\rho_0 + \Delta\rho, z_0$)

B ($\rho_0, z_0 + \Delta z$)

C ($\rho_0 - \Delta\rho, z_0$)

D ($\rho_0, z_0 - \Delta z$).

Développements limités des potentiels $\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C, \Phi_D$ au voisinage de E :

$$\Phi_A = \Phi(\rho_0 + \Delta\rho, z_0) = \Phi(\rho_0, z_0) + \Delta\rho \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} \right)_{\rho_0, z_0} + \frac{(\Delta\rho)^2}{2} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2} \right)_{\rho_0, z_0}$$

$$\Phi_C = \Phi(\rho_0 - \Delta\rho, z_0) = \Phi(\rho_0, z_0) - \Delta\rho \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} \right)_{\rho_0, z_0} + \frac{(\Delta\rho)^2}{2} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2} \right)_{\rho_0, z_0}$$

$$\Phi_B = \Phi(\rho_0, z_0 + \Delta z) = \Phi(\rho_0, z_0) + \Delta z \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} \right)_{\rho_0, z_0} + \frac{(\Delta z)^2}{2} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \right)_{\rho_0, z_0}$$

$$\Phi_D = \Phi(\rho_0, z_0 - \Delta z) = \Phi(\rho_0, z_0) - \Delta z \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} \right)_{\rho_0, z_0} + \frac{(\Delta z)^2}{2} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \right)_{\rho_0, z_0}$$

on en tire : $\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \right)_{\rho_0, z_0} = \frac{\Phi_B + \Phi_D - 2\Phi_E}{(\Delta z)^2}$ et

$$\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2} \right)_{\rho_0, z_0} = \frac{\Phi_A + \Phi_C - 2\Phi_E}{(\Delta\rho)^2}$$

et :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = \frac{\Phi_A - \Phi_C}{2\Delta\rho}.$$

Or, l'équation de Laplace s'écrit :

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = 0;$$

au point E, cela donne :

$$\frac{\Phi_B + \Phi_D - 2\Phi_E}{(\Delta z)^2} + \frac{\Phi_A + \Phi_C - 2\Phi_E}{(\Delta q)^2} + \frac{1}{2\epsilon_0 \Delta q} (\Phi_A - \Phi_C) = 0$$

d'où :

$$\Phi_E = \frac{1}{2 [1/(\Delta z)^2 + 1/(\Delta q)^2]} \left[\frac{\Phi_B + \Phi_D}{(\Delta z)^2} + \frac{\Phi_A + \Phi_C}{(\Delta q)^2} + \frac{1}{2\epsilon_0 \Delta q} (\Phi_A - \Phi_C) \right]$$

et si : $\Delta q = \Delta z = l$, alors :

$$\Phi_E = \frac{1}{4} [\Phi_A + \Phi_B + \Phi_C + \Phi_D + \left(\frac{\Phi_A - \Phi_C}{2\epsilon_0} \right) l] \quad \text{si} \quad \epsilon_0 \neq 0,$$

au point singulier $\epsilon_0 = 0$, on a : $\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \Phi}{\partial q} \simeq \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q^2}$ (d'après la

règle de l'Hopital); de plus : $\Phi(0 - \Delta q, z_0) = \Phi(0 + \Delta q, z_0)$ c'est-à-dire ($\Phi_A = \Phi_C$) (du fait de la symétrie axiale). Après arrange-

ment, il vient : $0 = \Delta \Phi = \frac{\Phi_B + \Phi_D - 2\Phi_E}{(\Delta z)^2} + \frac{2}{(\Delta q)^2} (2\Phi_A - 2\Phi_E)$

et si $\Delta q = \Delta z$, on obtient : $\Phi_E = \frac{4\Phi_A + \Phi_B + \Phi_D}{6}$.