

## Tracés de trajectoires à l'aide d'un micro-ordinateur

par J.-P. SARMANT,  
Lycée Louis-le-Grand, Paris.

Dans le précédent article, nous avons vu comment représenter des cartes de champ (gravitationnel, électrique, magnétique) à l'aide d'un micro-ordinateur muni d'une petite table traçante. Nous allons examiner maintenant une méthode élémentaire permettant de tracer la trajectoire d'un point matériel lancé, avec des conditions initiales données, dans un champ de force connu. Cette fois, la méthode décrite n'intéresse pas seulement les heureux possesseurs d'un ensemble micro-ordinateur-table traçante. En effet, avec une modeste calculette programmable, le programme décrit (\*) permet de calculer les coordonnées du point à divers instants successifs ; il ne reste plus qu'à reporter celles-ci sur du papier millimétré.

### 1. PRINCIPE D'UN PROGRAMME D'INTEGRATION NUMERIQUE DES EQUATIONS DE LA MECANIQUE NEWTONIENNE.

Dans tout cet article, nous nous limiterons à la description de problèmes plans [étude du mouvement d'un point M de masse  $m$  dont les coordonnées à l'instant  $t$  sont  $x(t)$  et  $y(t)$ ].

Si le champ de forces  $\vec{f}$  dans lequel M est placé est connu, nous savons expliciter les coordonnées  $a_x$  et  $a_y$  de l'accélération

$\vec{a} = \vec{f}/m$ . Les lois de la dynamique newtonienne nous conduisent

donc,  $v_x$  et  $v_y$ , étant les coordonnées de la vitesse  $\vec{V}$ , aux équations différentielles :

$$\frac{dv_x}{dt} = a_x \qquad \frac{dv_y}{dt} = a_y \qquad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x \qquad \frac{dy}{dt} = v_y \qquad (2)$$

(\*) Ci-après, ce programme sera donné en BASIC. Toutefois, sa structure très simple permet de l'adapter à une calculette non-alphanumérique.

Pour les besoins du programme, affectons à chacune des grandeurs précédentes une variable notée par une lettre majuscule :

$$t \rightarrow T, \quad x \rightarrow X, \quad y \rightarrow Y, \quad v_x \rightarrow U, \quad v_y \rightarrow V, \quad a_x \rightarrow A, \quad a_y \rightarrow B.$$

Connaissant la position  $(X, Y)$  et la vitesse  $(U, V)$  à un instant  $T$ , les équations (1) et (2) nous permettent d'estimer la position  $(X_1, Y_1)$  et la vitesse  $(U_1, V_1)$  à un instant  $T_1 = T + H$  très voisin ( $H$  est le *pas d'incrément* choisi pour  $T$ ) :

$$U_1 = U + H \cdot A \qquad V_1 = V + H \cdot B \qquad (1')$$

$$X_1 = X + H \cdot U \qquad Y_1 = Y + H \cdot V \qquad (2')$$

## 2. ECRITURE DU PROGRAMME.

En BASIC, les équations (1') et (2') conduisent à l'écriture du programme ci-après :

```
10 INPUT XO, YO, UO, VO
20 X = XO : Y = YO : U = UO : V = VO : T = 0
30 GOSUB 100
40 U = U + H * A : V = V + H * B
50 X = X + H * U : Y = Y + H * V
60 T = T + H
70 GOTO 30
```

La signification des lignes de ce programme se comprend aisément :

- 10 demande les conditions initiales.
- 20 initialise les variables.
- 30 va lire en ligne 100 un sous-programme où sont explicitées les coordonnées  $A$  et  $B$  de l'accélération (pour un exemple, voir plus loin), déduites de la loi de force supposée.
- 40 et 50 réalisent respectivement les algorithmes (1') et (2') d'incrément de la vitesse et de la position.
- 60 incrémente la date  $T$ .
- 70 assure l'itération du processus.

Si on veut piloter en plus une table traçante avec ce programme, il faut ajouter deux ordres graphiques : une ligne 25 qui positionne le stylo au point de départ et une ligne 65 qui trace un segment joignant la position non incrémentée à la position incrémentée.

**Remarques :**

1) On trouve dans les ouvrages spécialisés des méthodes d'intégration numérique des équations différentielles du second ordre mathématiquement beaucoup plus élaborées que celle-ci. Leurs « performances » sont éventuellement meilleures en ce sens qu'elles donnent une précision supérieure en un temps de calcul donné. L'avantage de la méthode exposée précédemment réside dans la simplicité de son principe (qui permet à l'utilisateur de maîtriser le déroulement du programme) ainsi que dans son aptitude à traiter *toute* étude de trajectoire, y compris celles qui conduisent à des systèmes différentiels couplés (rien n'interdit en effet d'explicitier A ou B en fonction de n'importe lesquelles des variables X, Y, U, V, T).

2) Le programme peut être utilisé tel quel en choisissant définitivement une valeur du pas H jugée raisonnable après quelques essais. Il est, je crois, plus habile, d'adopter une méthode de *pas variable* en introduisant la ligne :

$$35 H = S/\sqrt{(U^* U + V^* V)}.$$

En ayant préalablement choisi S (ajouter INPUT S en 10), cette instruction conduit la machine à tracer des segments qui ont tous une même longueur S (S joue le rôle de l'arc de courbe élémentaire  $ds = v dt$ ).

**3. UN EXEMPLE DE TRACE DE TRAJECTOIRE.**

En notant  $\vec{OM} = \vec{r} = r \vec{u}_r$  le vecteur position, un champ de force newtonienne attractif de centre O conduit, avec un choix convenable d'unités, à une accélération :

$$\vec{a} = -\frac{\vec{u}_r}{r^2} = -\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Une telle accélération décrit par exemple le mouvement keplerien d'une planète dans le référentiel de Copernic. Le sous-programme explicitant les coordonnées de  $a$  est alors le suivant :

```
100 R = SQR(X*X + Y*Y)
```

```
110 A = -X/R/R/R : B = -Y/R/R/R
```

```
120 RETURN
```

La fig. 1 montre le résultat obtenu avec les conditions initiales  $XO = -1$ ,  $YO = 0$ ,  $UO = 0$ ,  $VO = 1,3572$  (cette valeur a été ici choisie de façon à ajuster à la valeur 100 la période de révolution, ce qui a permis d'illustrer la loi des aires en faisant

écrire la date le long de la trajectoire à chaque fois que celle-ci est voisine d'un multiple de 5).

Sur cet exemple, l'avantage de la méthode « du pas variable » est évident : avec un pas constant, on s'ennuie ferme pendant que la planète se traîne au voisinage de l'aphélie ; plus grave, elle passe trop vite au voisinage du périhélie, ce qui augmente les erreurs de méthode et la trajectoire ne se ferme pas à moins d'utiliser un pas extrêmement faible !

#### 4. CONCLUSION.

Bien entendu, la figure ci-après n'est qu'une *illustration* d'un

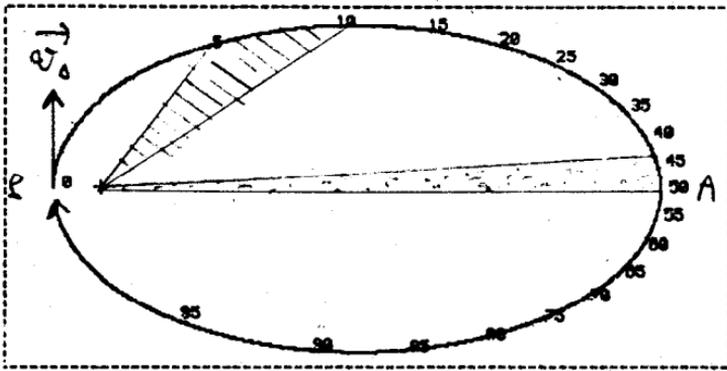


Fig. 1

problème dont la solution analytique est bien connue. C'est surtout quand les équations du mouvement ne s'intègrent pas à l'aide de fonctions connues qu'une méthode numérique s'impose.

Ainsi, la fig. 2 représente ce que devient l'ellipse keplerienne

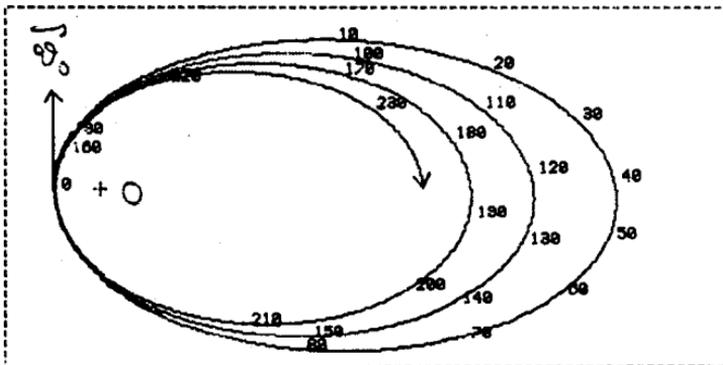


Fig. 2

de la fig. 1 quand on ajoute (avec  $P = 2 \cdot 10^{-4}$ ) les termes  $-P \cdot U$  et  $-P \cdot V$  respectivement dans les expressions de A et de B, c'est-à-dire sous l'influence d'une force de frottement fluide  $-P\vec{v}$ . La fig. 3 simule les divers cas possibles pour des sondes du type Apollo lancées depuis une orbite circulaire terrestre avec des vitesses initiales tangentielles et de module croissant :

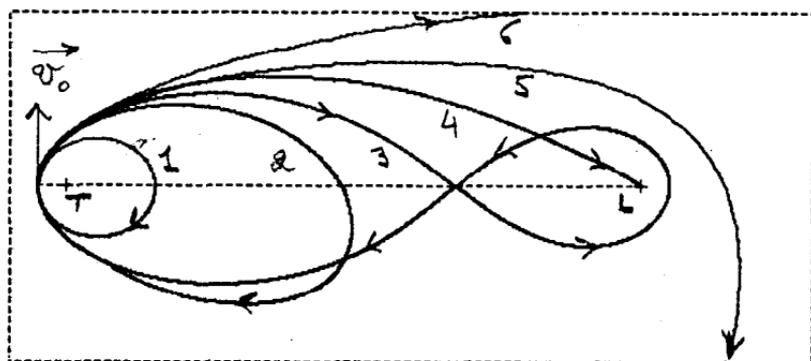


Fig. 3

\* 1 est une orbite elliptique circumterrestre, trop éloignée de la Lune L pour être sensiblement affectée par le champ gravitationnel de celle-ci.

\* 2 est une orbite circumterrestre déformée par l'attraction lunaire.

\* 3 correspond à un voyage aller et retour après passage derrière la Lune (trajectoire du type de celle suivie par Apollo 8).

\* 4 s'écrase sur la Lune.

\* 5 s'échappe du système Terre-Lune.

\* 6 correspond également à une libération et à une trajectoire peu perturbée par la Lune (et donc proche de l'hyperbole prévue par la théorie usuelle du mouvement newtonien).

Pour terminer, signalons que le programme vu au § 2 se modifie aisément de façon à traiter des problèmes de mouvements relativistes régis par :

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \vec{p} = \gamma m\vec{v}, \quad \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}.$$

Il suffit d'incrémenter les coordonnées  $p_x$  et  $p_y$  de la quantité de mouvement en calculant à chaque itération le facteur de Lorentz  $\gamma$  (on aura intérêt à rentrer en ligne 10 des vitesses initiales exprimées en fraction de la vitesse de la lumière dans le vide  $c$ ).

---