

Physique et ordinateur ⁽¹⁾

par Cyprien DUTOUR,
Lycée de Muret.

PROSPECTIVE.

A partir d'un état initial, un phénomène physique évolue de proche en proche. La nature « ignore » parfaitement la solution générale de l'équation différentielle le régissant. Ainsi, pour un phénomène à croissance ou décroissance exponentielle, fréquent en physique, ne « connaît-elle » que l'état initial (x_0, y_0) et la simple relation de proportionnalité directe : $dy = k \cdot y \cdot dx$ entre la variation de x et la variation concomitante de y . Elle « ignore » parfaitement la solution : $y = C \cdot e^{kx}$, génial raccourci, inventé par les mathématiciens, artifice de calcul permettant d'éviter une suite de calculs longs, pénibles, fastidieux et incertains (2).

L'ordinateur « travaille » également à partir de la valeur initiale d'une variable, de proche en proche et ne connaît la valeur actuelle de cette variable qu'en ayant d'abord calculé successivement toutes ses valeurs antérieures. Il « ignore » les suites de calculs longs, pénibles, fastidieux et incertains.

Aussi, l'ordinateur apparaît-il comme étant, pour un physicien, l'outil de laboratoire idéal, « travaillant » de manière « naturelle », servi et non pas asservi par la si merveilleuse mathématique (ô liberté !).

Les lois de la nature sont souvent simples. Nos méthodes analytiques conduisent rapidement à des résultats extraordinairement compliqués (quand elles y conduisent) et « nous voilent la compréhension de l'Univers » (A. FRESNEL 1788-1827). Ce qui faisait dire à M. BELL : « la déduction des conséquences à partir des prémisses et la vue d'ensemble d'une question ne sont vraiment pas naturelles à l'esprit humain. » Il s'agit sans doute plus de l'usage d'un outil mal adapté que d'une inaptitude de l'esprit humain. Et l'ordinateur semble bien être l'outil qui nous permettra une meilleure compréhension de l'Univers.

(1) L'ordinateur utilisé est le A2E MICRAL 80-82 avec son imprimante. Les programmes fournis sont en L.S.E.

(2) N.D.L.R. : Qui peut se prononcer sur ce que connaît ou ignore la nature ?

Il faudra modifier nos méthodes et notre enseignement. Pédagogiquement, il est remarquable de constater qu'un élève de la classe de seconde, ignorant l'analyse, puisse résoudre numériquement une équation différentielle du premier ordre et aussi facilement une équation différentielle du second ordre, même si cette équation est « non négligeable » pour un mathématicien. Pour intégrer, il n'est même pas nécessaire de connaître les fonctions dérivées. L'élève possède la notion de vitesse dx/dt d'un mobile d'abscisse x à la date t bien avant celle de dérivée qui la sublime. Il en est de même par exemple pour la notion de gradient de pression dp/dz d'une pression p à la cote z ou d'un gradient de température dT/dz et cela nous suffit. Si le phénomène existe, l'équation qui le régit est nécessairement intégrable. Manifestement, avec l'ordinateur, les équations différentielles « descendent » en classe de seconde, irréversiblement.

Mieux que l'oscilloscope qui, équipé de transducteurs convenables, visualise un phénomène, permet de constater son évolution en fonction d'une variable, l'ordinateur permet, par une suite d'inductions et de déductions (démarche habituelle du physicien), sans soucis analytiques, de comprendre un phénomène, c'est-à-dire de le rattacher à des lois.

RECHERCHE.

En application de ce qui précède, étudions un phénomène à décroissance exponentielle. Cherchons, en vingt étapes, la loi de variation de la pression atmosphérique p avec l'altitude z .

DONNEES EXPERIMENTALES.

Dans les régions tempérées, la répartition verticale de p en fonction de z est voisine de :

z_{km}	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$P_{mb} (3)$	1013	899	795	700	615	537	469	408	355	309	264	227	195	168	143	120
z_{km}	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
P_{mb}	103	88	75	65	55	46	38	32	27	23	20	18	16	14	12	

TRACE DE LA COURBE EXPERIMENTALE $p(z)$.

Visualisons la loi cherchée en traçant la représentation graphique de $f : z \rightarrow p$ à l'aide du programme PG1 ci-joint.

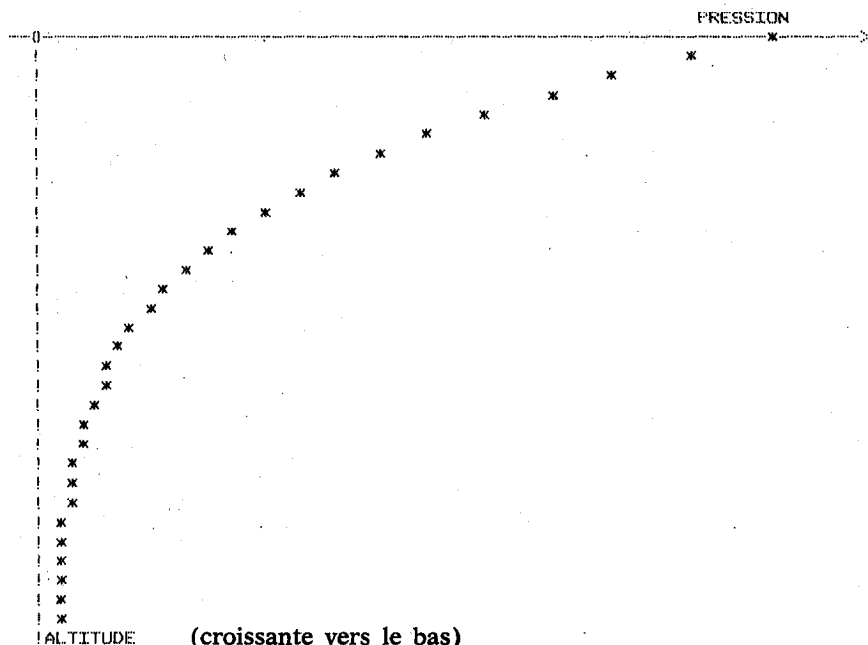
(3) N.D.L.R. : 1 bar = 10^5 pascals.

PROGRAMME PG1.

```

AFFICHER 'VARIATION DE LA PRESSION ATMOSPHERIQUE EN FONCTION DE L'ALTITUDE'
AFFICHER 'DONNEES EXPERIMENTALES.'
AFFICHER(2/3);PAUSE
TABLEAU TC(30)
TC(1)=899;TC(2)=795;TC(3)=700;TC(4)=615;TC(5)=537;TC(6)=469;TC(7)=408;TC(8)=307
TC(9)=264;TC(10)=227;TC(11)=195;TC(12)=168;TC(13)=143;TC(14)=120;TC(15)=103
TC(16)=88;TC(17)=75;TC(18)=65;TC(19)=55;TC(20)=46;TC(21)=38;TC(22)=32;TC(23)=27
TC(24)=23;TC(25)=20;TC(26)=18;TC(27)=16;TC(28)=14;TC(29)=12;TC(30)=355
5 AFFICHER(2/,63X,'PRESSION'
6 AFFICHER(2/,5'-','0',63'-','X',7'-','>')
0 FAIRE 36 POUR I=1 JUSQUA 30
6 AFFICHER(2/,5X,!!',XX,'X'363*TC(I)/1013
0 AFFICHER(2/,5X,!!', 'ALTITUDE'
1 AFFICHER(2/, 'VALEUR MAXIMALE DE LA PRESSION (AU SOL) EN MILLIBAR: '1013
2 AFFICHER(2/, 'VALEUR MAXIMALE DE L'ALTITUDE EN KM: '30
5 TERMINER

```



**Variation de la pression atmosphérique en fonction de l'altitude
(données expérimentales)
obtenue avec le programme PG1**

Valeur maximale de la pression (au sol) en millibars : 1013.

Valeur maximale de l'altitude en kilomètres : 30.

LOI PROPOSEE.

La courbe affichée suggère une loi exponentielle décroissante. Si l'altitude z varie de Δz , la pression p varie de Δp tel que : $\Delta p = k \cdot p \cdot \Delta z$; k est négatif et s'exprime en m^{-1} .

Utilisons le S.I. pour les valeurs numériques :

— pour $z = z_0 = 0 \text{ m}$ $p = p_0 = 101\,300 \text{ Pa}$;

et pour $\Delta z = 1\,000 \text{ m}$:

$$k_1 = \frac{89\,900 - 101\,300}{101\,300 \cdot 1\,000} = -1,1253 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1} ;$$

— pour $z = z_{\max} = 30\,000 \text{ m}$ $p = p_{\min} = 1\,200 \text{ Pa}$;

et pour $\Delta z = 1\,000 \text{ m}$:

$$k_2 = \frac{1\,200 - 1\,400}{1\,400 \cdot 1\,000} = -1,4285 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}.$$

Malgré l'importance du domaine de variation de z , ces valeurs de k sont voisines, ce qui justifie notre première hypothèse et nous prendrons :

$$k = \frac{k_1 + k_2}{2} = -1,2769 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$$

soit, en unités S.I. :

$$\Delta p = -1,2769 \cdot 10^{-4} p \cdot \Delta z$$

c'est-à-dire que le gradient de pression $\frac{\Delta p}{\Delta z}$ est proportionnel à la pression p .

CONDITIONS INITIALES.

$$z = z_0 = 0 \text{ m} \quad p = p_0 = 101\,300 \text{ Pa}.$$

CHOIX DU PAS.

A partir du point connu (z_0, p_0) , on progresse d'un petit pas Δz vers le point suivant $z_1 = z_0 + \Delta z$.

Le pas d'intégration sera donné par :

$$\Delta z = \frac{z_{\max} - z_0}{N}.$$

Le choix de N se justifie à postériori. Un pas trop grand donne une précision insuffisante. Un pas trop petit conduit à

un calcul trop long. Avec un pas convenable, l'erreur s'amortit au lieu de s'amplifier.

Nous prendrons $N = 750$ points calculés, soit :

$$\Delta z = 30\,000/750 = 40 \text{ m.}$$

CALCUL DE LA PRESSION p A L'ALTITUDE z .

Une incrémentation spatiale à partir de z_0 donne :

$$z = z_0 \quad p = p_0$$

$$z = z_1 = z_0 + \Delta z \quad p = p_1 = p_0 + \Delta p_0$$

avec :
$$\Delta p_0 = -1,2769 \cdot 10^{-4} \cdot p_0 \cdot \Delta z$$

$$z = z_2 = z_1 + \Delta z \quad p = p_2 = p_1 + \Delta p_1$$

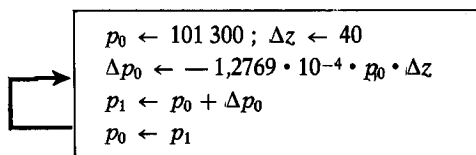
avec :
$$\Delta p_1 = -1,2769 \cdot 10^{-4} \cdot p_1 \cdot \Delta z, \text{ etc.}$$

p_2 s'obtient à partir de p_1 par la relation qui a permis d'obtenir p_1 à partir de p_0 , en remplaçant p_0 par p_1 .

Il en est de même pour z_2 à partir de z_1 .

Nous procéderons donc par itération, procédé de choix pour l'ordinateur.

ALGORITHME.



TRACE DE LA COURBE PROPOSEE $p(z)$.

Nous afficherons la courbe avec un point par km, soit en 30 points. Le pas donne 750 points calculés, soit un affichage tous les : $750/30 = 25$ points calculés.

NOUVEAU PROGRAMME : PG2.

Le programme PG2 ci-joint affiche la courbe proposée + et la courbe expérimentale *. Il s'obtient à partir de PG1 en ajoutant les 10 lignes suivantes : 19-26-27-28-29-30-35-36-43-44, indiquées ci-après.

PRECISION DE L'INTEGRATION.

L'intégration de : $dp = -1,2769 \cdot 10^{-4} \cdot p \cdot dz$ à variables séparables donne immédiatement :

$$p = 101\,300 \cdot e^{-1,2769 \cdot 10^{-4} \cdot z} \text{ Pa}$$

Ligne à ajouter à PG1 pour obtenir PG2.

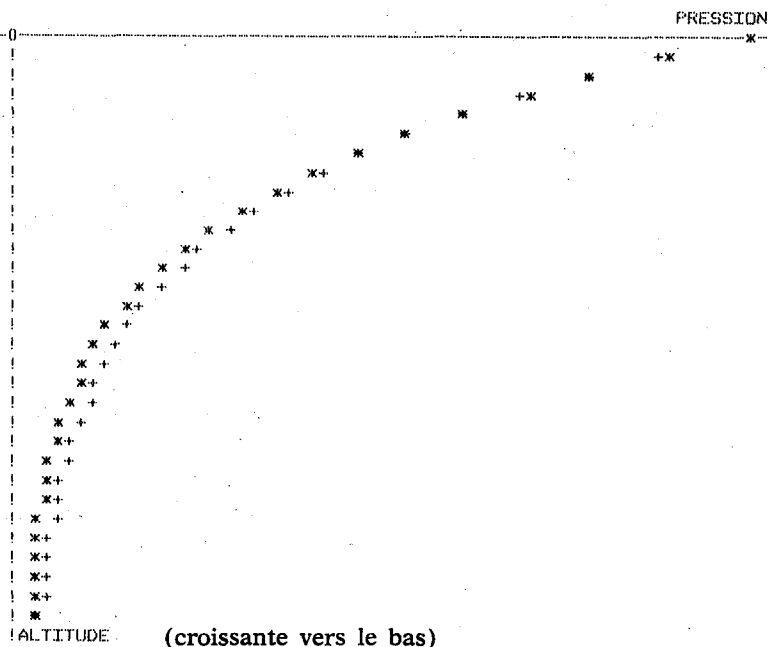
```

19 Z0←0;P0←101300;E0←0;DZ←40

26 DP0←-1.2769E-04*P0*DZ;P1←P0+DP0
27 Z0←Z0+DZ;P0←P1
28 E1←ABS(P0/100-TCZ0/1000J)*100/TCZ0/1000J
29 SI E1>E0 ALORS DEBUT E0←E1;ZE←Z0/1000 FIN
30 A←63*P0/101300;B←63*TCZ0/1000J/1013
35 SI A>=B ALORS AFFICHERC/,6X,*X,'+',',C,5X,'!',',XX,'*',JA,B
36 SI A<B ALORS AFFICHERC/,6X,*X,'*',',C,5X,'!',',XX,'+',',JB,A

43 AFFICHERC/, 'ERREUR RELATIVE MAXIMALE EN %: ',F2.1JE1
44 AFFICHERC/, 'ALTITUDE CORRESPONDANTE EN KM: 'JZE

```



**Variation de la pression atmosphérique en fonction de l'altitude
(données expérimentales, loi proposée)
obtenue avec le programme PG2**

Valeur maximale de la pression (au sol) en millibars : 1013.

Valeur maximale de l'altitude en kilomètres : 30.

Erreur relative maximale en % : 81.3.

Altitude correspondante en km : 26.

on en déduit la formule de Laplace (1749-1827) :

$$z = a \cdot \text{Log } p/p_0$$

pour $z = 30\,000$ m ; la formule donne : $p = 2197,6427$ Pa = 21,98 mb
et l'ordinateur : $p = 2176,1769$ Pa = 21,76 mb, soit une erreur

$$\text{relative en \% de : } \frac{\Delta p}{p} \times 100 = \frac{21,76 - 21,98}{21,98} \times 100 \approx -1 \%$$

ce que nous considérons comme satisfaisant et ce qui justifie le choix du pas. Sans intégration analytique, nous aurions modifié le pas et observé si le résultat variait notablement ou non.

VALEUR DE LA LOI PROPOSEE.

L'allure générale de la courbe est excellente. Les extrémités des deux courbes se confondent naturellement, mais aussi au voisinage de $z = 5$ km, ce qui est intéressant. Il y a 25 points + non confondus avec les points * mais ils sont voisins. Néanmoins, pour de grandes altitudes, l'écart relatif, sur le graphique, est de l'ordre de 50 %. L'ordinateur nous donne : 81,3 % à 26 km.

MEILLEURE APPROCHE DE LA LOI.

Comme souvent en physique, au phénomène étudié s'en superposent d'autres que nous avons négligés. En particulier, la température de l'atmosphère varie quand on s'élève, phénomène dû à l'échauffement de la terre par le rayonnement solaire en basse altitude (troposphère), à la dissociation et recombinaison de molécules gazeuses en haute altitude (stratosphère). Il nous faut donc connaître la répartition de la température t en fonction de l'altitude z .

DONNEES EXPERIMENTALES COMPLEMENTAIRES.

z_{km}	0	1	2	3	4	5	6	7
t °C	15,0	8,5	2,0	— 4,5	— 11,0	— 17,5	— 24,0	— 30,5
z_{km}	16	17	18	19	20	21	22	23
t °C	— 56,5	— 56,5	— 56,5	— 56,5	— 56,5	— 56	— 55	— 54
z_{km}	8	9	10	11	12	13	14	15
t °C	— 37,0	— 43,5	— 50,0	— 56,5	— 56,5	— 56,5	— 56,5	— 56,5
z_{km}	24	25	26	27	28	29	30	
t °C	— 53	— 52	— 51	— 50	— 49	— 48	— 47	

Ce tableau nous montre que, dans la troposphère (jusqu'à 11 km), la température décroît régulièrement, le gradient vertical de température ayant pour valeur : $dT/dz = -6,5 \text{ K.km}^{-1}$.

Dans la tropopause, la température reste constante. Elle croît ensuite régulièrement dans la stratosphère (jusqu'à 50 km pour atteindre sa valeur au sol), avec un gradient vertical de température : $dT/dz = 1 \text{ K.km}^{-1}$.

NOUVELLE LOI PROPOSEE.

Entre z et $z + \Delta z$, la relation fondamentale de la statique des fluides (nous supposons donc l'air immobile) donne :

$$\Delta p = -\rho \cdot g \cdot \Delta z$$

avec : $\rho = m/V$: masse volumique de l'air dans les conditions (p, T).

L'équation d'état du gaz parfait (nous supposons l'air gaz sec et parfait) s'écrit : $pV = n \cdot R \cdot T$; si $n = 1 \text{ mol}$, alors $m = M$: masse molaire de l'air et :

$$\rho = M/V \quad V = R \cdot T/p \quad \rho = \frac{Mp}{RT}$$

enfin :

$$\Delta p = -\frac{Mg}{RT} \cdot p \cdot \Delta z$$

numériquement, en unités S.I. :

$$M = 28,966 \text{ g.mol}^{-1} = 28,966 \cdot 10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}$$

(valeur adoptée internationalement pour les besoins météorologiques) : $g = 9,80665 \text{ m.s}^{-2}$ (intensité normale du champ de pesanteur), soit, avec : $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$:

$$\Delta p = -3,41828 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{p}{T} \cdot \Delta z \text{ Pa}$$

si $z \leq 11\,000 \text{ m}$: $T = az + b$; $z = 0 \text{ m}$; $T = 288 \text{ K} = b$;

$$a = dT/dz = -6,5 \cdot 10^{-3} \text{ K.m}^{-1} :$$

$$T = -6,5 \cdot 10^{-3} z + 288 \text{ en K}$$

si $11\,000 < z \leq 20\,000 \text{ m}$:

$$T = 216,5 \text{ K}$$

si $z > 20\,000$ m : $T = az + b$; $a = dT/dz = 10^{-3}$ K.m $^{-1}$;

$z = 30\,000$ m ; $T = 226$ K ; $b = 196$ K :

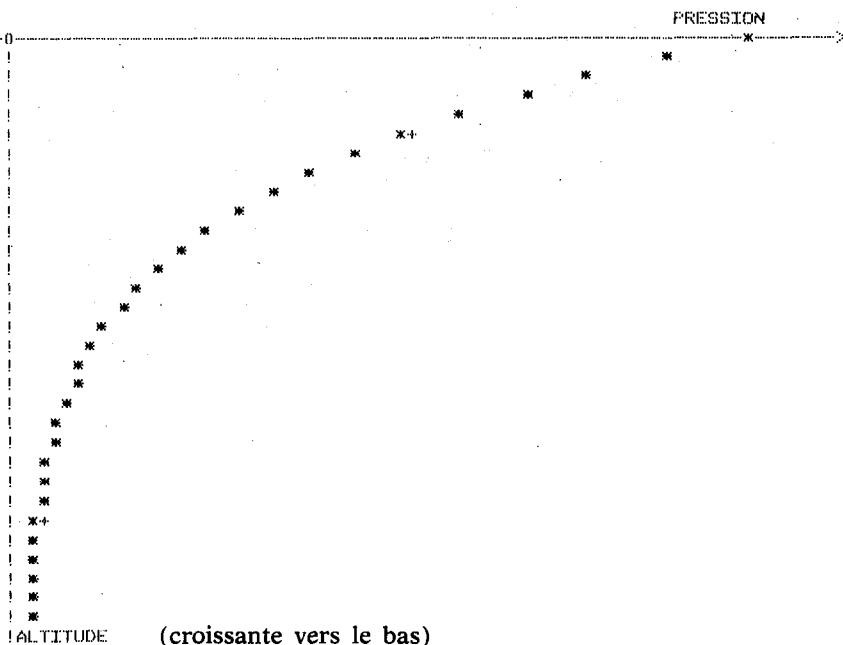
$T = 10^{-3} z + 196$ en K.

NOUVEAU PROGRAMME : PG3.

Le programme PG3 tient compte de l'influence de la température.

Pour obtenir PG3, ajouter à PG2 les lignes 23 - 24 - 25 - 26 ci-dessous :

```
23 SI Z0<=11000 ALORS T0←-0.0065*Z0+288.
24 SI Z0<=20000 ET Z0>11000 ALORS T0←216.5
25 SI Z0>20000 ALORS T0←1E-03*Z0+196
26 DP0←-0.0341828*P0*DZ/T0;P1←P0+DP0
```



**Variation de la pression atmosphérique en fonction de l'altitude
(données expérimentales, loi proposée)
obtenue avec le programme PG3**

Valeur maximale de la pression (au sol) en millibars : 1013.

Valeur maximale de l'altitude en kilomètres : 30.

Erreur relative maximale en % : 4.5.

Altitude correspondante en km : 25.

RESULTATS.

L'amélioration est spectaculaire. Il n'y a plus, à la précision du tracé de l'ordinateur, que deux points différents des points expérimentaux et l'écart relatif maximal n'est plus que de 4,5 % (à 25 km). Le paramètre température est donc important. On en tient toujours compte en météorologie.

NOUVELLE APPROCHE DE LA LOI.

La relation précédente :

$$\Delta p = - \frac{Mg}{RT} \cdot p \cdot \Delta z$$

fait apparaître le rôle d'un paramètre négligé jusqu'ici : le facteur g . Nous considérerons le référentiel terrestre comme étant galiléen et nous confondrons l'intensité g du champ de pesanteur terrestre avec celle G du champ de gravitation au voisinage de la terre. La loi de NEWTON donne :

$$G = k.M/(R + z)^2$$

M et R étant la masse et le rayon terrestres et k étant la constante d'attraction universelle.

En introduisant : $G_0 = k.M/R^2$ à l'altitude zéro et en posant :

$$(1 + z/R)^{-2} \approx 1 - 2z/R \quad \text{car : } z \ll R = 6370 \text{ km,}$$

il vient :

$$G = G_0(1 - 2z/R)$$

soit :

$$g = 9,80665 (1 - 2z/6,37 \cdot 10^6) \text{ m. s}^{-2}.$$

NOUVELLE LOI PROPOSEE.

$$\Delta p = - \frac{Mg}{RT} \cdot p \cdot \Delta z$$

donne, numériquement, en unités S.I. :

$$M/R = 28,996 \cdot 10^{-3}/8,31 = 3,4857 \cdot 10^{-3}$$

soit :

$$\Delta p = - 3,4857 \cdot 10^{-3} \cdot g \cdot p \cdot \Delta z \text{ Pa.}$$

NOUVEAU PROGRAMME.

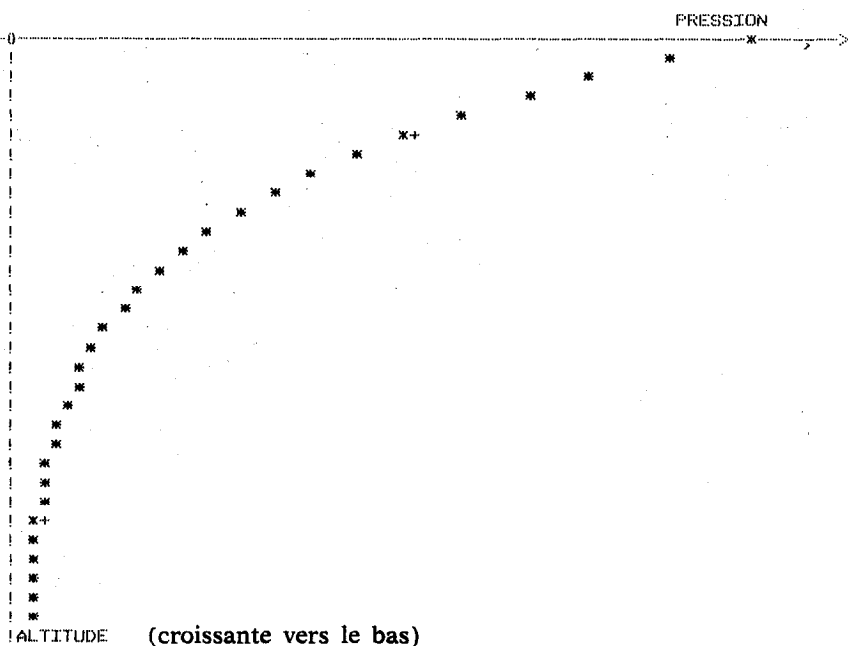
Le Programme PG4 tient compte de l'influence de l'altitude sur l'intensité de la pesanteur.

Pour obtenir PG4, ajouter à PG3 les lignes 19 - 26 - 27 ci-dessous :

19 $GN \leftarrow 9.80665; Z0 \leftarrow 0; P0 \leftarrow 101360; G0 \leftarrow GN; E0 \leftarrow 0; DZ \leftarrow 40$

26 $DP0 \leftarrow -0.0034857 * G0 * P0 * DZ / T0; P1 \leftarrow P0 + DP0$

27 $Z0 \leftarrow Z0 + DZ; P0 \leftarrow P1; G0 \leftarrow GN * (1 - 2 * Z0 / 6.37E+06)$



**Variation de la pression atmosphérique en fonction de l'altitude
(données expérimentales, loi proposée)
obtenue avec le programme PG4**

Valeur maximale de la pression (au sol) en millibars : 1013.

Valeur maximale de l'altitude en kilomètres : 30.

Erreur relative maximale en % : 2.4.

Altitude correspondante en km : 25.

NOUVEAUX RESULTATS.

L'écart relatif maximal a été sensiblement réduit de moitié, soit 2,4 % (à 25 km). Nous considérerons ce résultat comme très satisfaisant, vu la précision des données expérimentales, fournies avec deux chiffres significatifs, pour $z = 25$ km. Ce ne sont, de plus, que des valeurs moyennes.

CONCLUSION.

La loi proposée permet de retrouver les résultats expérimentaux dans le domaine de variation d'altitude considéré. Cela ne signifie pas que la loi proposée soit la seule possible.

D'ailleurs, de meilleures valeurs expérimentales mettraient en évidence des écarts dus à des paramètres négligés ici. En particulier, la composition de l'atmosphère en basse altitude en azote, oxygène et argon (99,997 %) reste constante quand on s'élève, malgré des densités différentes (0,967 ; 1,105 ; 1,379), ne montrant aucun effet diffusif. Cette répartition est due au brassage vertical de l'air. Il subit ainsi des transformations qui sont généralement suffisamment rapides pour qu'on puisse les considérer adiabatiques.

Par contre, la composition de l'atmosphère de basse altitude en vapeur d'eau est essentiellement variable, l'eau participant au cycle continu : évaporation, condensation, précipitation. L'air humide peut être considéré comme un mélange de deux gaz parfaits et l'on définit une masse volumique pour le mélange. Les météorologistes tiennent compte de la vapeur d'eau en prenant, à la place de T , dans toutes les relations précédentes, la température virtuelle T' définie comme étant la température que devrait avoir de l'air sec pris dans les mêmes conditions de pression que l'air humide pour posséder la même masse volumique.

La courbe $p(z)$ semble admettre l'axe des z pour asymptote et l'on pourrait penser que l'atmosphère est illimitée. Il n'en est rien. A 300 km, la pression n'est plus que de $1,9 \cdot 10^{-7}$ mb, de l'ordre des meilleurs vides réalisés en laboratoire. Au-delà de 750 km, le libre parcours moyen des molécules gazeuses devient si important que les lois de la physique des gaz ne s'appliquent plus. Chaque particule se comporte à peu près comme une particule balistique. Les molécules s'échappent dans l'espace, sans chocs avec d'autres molécules les renvoyant vers l'atmosphère, ce qui assigne une hauteur limite à l'atmosphère, de l'ordre de 500 à 1 000 km.

EPILOGUE.

La machine nous a permis, dégagés de tout souci analytique, de porter tout notre effort sur le problème étudié, tel qu'il est, sans l'édulcorer faussement, sans approximations nécessaires pour mener le calcul à son terme. Pédagogiquement, on remarque la simplicité des moyens mis en œuvre, tant en calcul qu'en programmation, moyens à la portée d'un élève de la classe de seconde (en fin d'année) ou de première scientifique, après tout de même plusieurs semaines d'initiation au L.S.E.

Tout comme lors du montage d'un film, l'amélioration progressive de la solution s'est faite, sous forme modulaire, par simple adjonction de quelques lignes au programme précédent. La structure séquentielle d'un programme se prête particulièrement bien à cette construction. Le programme reste toujours simple alors que l'étude se complique considérablement, la programmation n'étant jamais l'essentiel.

Et quel outil de culture est l'ordinateur ! En allant de Pascal (1623-1662) au sommet du Puy-de-Dôme (1465 m) en passant par l'équation du baromètre de Laplace (1749-1827) pour aboutir à nos modernes (et pacifiques) fusées météorologiques (150 km), nous avons rencontré, seulement pour l'essentiel et en vrac : faits expérimentaux, gradient de pression, équation différentielle, discrétisation spatiale, intégration numérique, itération, température absolue, gradient de température, relation fondamentale de la statique des fluides, masse volumique, équation d'état du gaz parfait, masse molaire apparente d'un mélange gazeux, intensité normale du champ de pesanteur, référentiel galiléen, loi de Newton, hygrométrie, troposphère, tropopause, stratosphère, rayonnement ultraviolet et dissociations moléculaires, libération d'un projectile, l'infini, domaine de validité d'une loi. Quelle merveilleuse richesse (inaliénable et universelle) !

L'ordinateur est bien, pour chacun de nous, à tout niveau et pour tout objet, un instrument de culture, de connaissance et de recherche, un bon outil de physicien.

Remarque.

Avec le matériel utilisé au lycée : micro-ordinateur R2E MICRAL 80-22 et son imprimante, l'affichage se fait à partir de l'entier le plus proche. Les courbes ont alors un aspect discontinu. Il n'a pas néanmoins semblé indispensable de tracer à la main une ligne continue. Les terminaux graphiques dont on peut espérer disposer à l'avenir dans les établissements scolaires permettent le tracé « en continu » et non plus « point par point ». L'arrivée du MICRAL Graphique 80-22 G devrait supprimer le problème.
