Sur l'équation de propagation des vibrations sur une corde

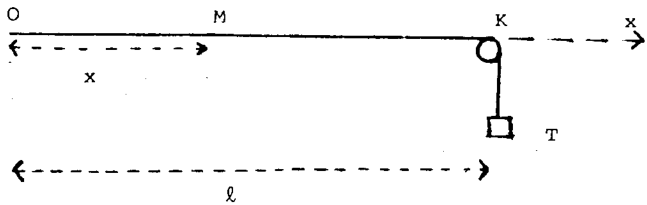
par J.-P. BARRAT,
Université de Caen.

Un de mes étudiants, qui prépare le C.A.P.E.S. (1) a récemment attiré mon attention sur un article fort intéressant, paru dans le B.U.P. il y a déjà quelques années sous le titre : « Corde vibrante - Expérience de Melde » [1]. L'auteur y étudie des analogies entre la propagation des vibrations sur une corde et celle de la tension et du courant dans un système de fils de Lécher. L'article fait partie de ceux dont on ne saurait trop recommander la lecture aux candidats aux concours comme le C.A.P.E.S. et l'Agrégation, mais une erreur s'y est malencontreusement glissée dans l'établissement de l'équation de propagation (2). Plus récemment, dans un article très remarquable sur les « problèmes énergétiques liés à la propagation des ondes en mécanique » [2], les auteurs n'ont pas jugé bon de donner la démonstration de cette équation. Il me semble donc utile de la reprendre très brièvement à l'usage surtout des étudiants qui utilisent le B.U.P. pour perfectionner leurs connaissances [cf. note (1)]. Pour tout ce que l'on peut dire sur les applications de cette équation, je renverrai modestement aux articles que j'ai cités.

Reprenons les notations de l'article cité en référence [1]. Une corde infiniment souple d'extrémités O et K est tendue par une force de grandeur T. La masse linéique de la corde est μ, on néglige l'effet de son poids. On suppose que son mouvement se fait dans un plan xOy, qui passe par sa position d'équilibre,

(1) Les étudiants suivent parfois les conseils des professeurs. Celui-ci m'avait sans doute entendu recommander une bonne lecture : le B.U.P. !

(2) *N.D.L.R.* : L'auteur de l'article a, par ailleurs, signalé que, page 941 du B.U.P. n° 574, il faut prendre comme définition de $\mathcal{Z}(x)$: $\mathcal{Z}(x) = -\dfrac{T(\vartheta)}{u}$, ce qui revient à remplacer dans la suite $\dfrac{1}{c\mu}$ par $c\mu$ sans changer aucune conclusion.



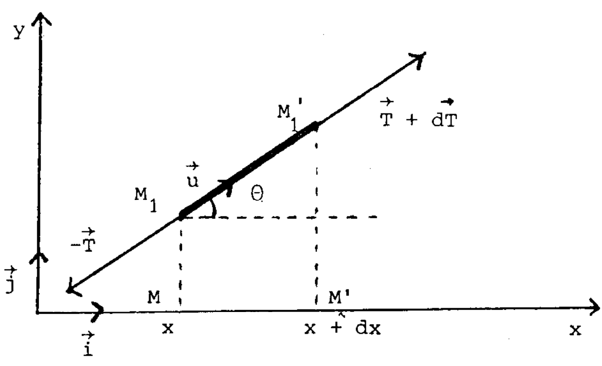
confondue avec l'axe Ox. Un élément de longueur MM' de la corde, situé entre les points M d'abscisse x et M' d'abscisse $x + dx$, vient à l'instant t occuper la position $M_1 M'_1$. Le mouvement est caractérisé par 2 grandeurs :

— le déplacement $\overrightarrow{MM_1} = y(x, t)\,\vec{j}$, parallèle au vecteur unitaire $\vec{j}$ de Oy,

— l'angle $\vartheta(x, t)$ que fait $\overrightarrow{MM_1}$ avec Ox. Cet angle est celui du vecteur unitaire $\vec{u}$ tangent en M_1 à la courbe qui représente la corde à l'instant t. L'angle ϑ est supposé petit, donc :

$$\vartheta \sim \operatorname{tg}\vartheta = \frac{\partial y}{\partial x}. \qquad (1)$$

Appliquons la loi fondamentale de la dynamique au morceau de corde considéré, de masse $\mu\, dx$, d'accélération $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, soumis aux forces $\vec{T} + d\vec{T}$ et $-\vec{T}$ (cf. figure) :



$$\mu\, dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{j} = \vec{T} + d\vec{T} - \vec{T} = \frac{\partial}{\partial x} (T\vec{u})\, dx. \qquad (2)$$

Le vecteur $\vec{u}$ est donné par :

$$\vec{u} = \cos\vartheta\, \vec{i} + \sin\vartheta\, \vec{j} \sim \vec{i} + \vartheta\, \vec{j}. \qquad (3)$$

Donc :

$$\frac{\partial}{\partial x} (T\vec{u}) = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial x} (T\vartheta)\, \vec{j}. \qquad (4)$$

En portant (4) dans (2), on obtient :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{j} = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial x} (T\vartheta)\, \vec{j}. \qquad (5)$$

On en déduit :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \qquad (6)$$

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (T\vartheta) = T \frac{\partial \vartheta}{\partial x}. \qquad (7)$$

Le dernier membre de (7) résulte du fait que, d'après (6), T est en réalité indépendant de x.

En exprimant ϑ d'après (1), on obtient :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \qquad (8)$$

équation bien connue qui caractérise, comme on sait, une propagation de la grandeur y le long de l'axe Ox à la célérité : $c = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.-P. Roux. — B.U.P. n° 574, p. 939 (1975).

[2] P. Tanguy et D. Thouroude. — B.U.P. n° 617, p. 49 (1979).