

La simulation électrique

par R. SAVORTE, Ph. SARTHOU,
P. TARDIEU,

D.E.U.G. B. 1^{re} année

Université Paul-Sabatier,

118, route de Narbonne, 31400 Toulouse,
39, allée Jules-Guesde, 31000 Toulouse.

Résumé.

L'analogie électrique est utilisée pour illustrer l'étude d'un phénomène réel par la technique dite de simulation.

On montre comment on peut créer expérimentalement un « modèle » en accord avec la théorie mathématique du phénomène.

Un exemple classique d'application du modèle est donné : la filiation radioactive.

Cette application fait l'objet d'une manipulation de Travaux Pratiques à l'usage des étudiants du D.E.U.G. B. 1^{re} année.

La méthode de simulation remplace l'étude d'un phénomène réel complexe par celle d'un autre phénomène plus accessible dont le comportement est équivalent. On constitue de la sorte un « modèle » qui est un outil d'analyse facile à mettre en œuvre.

Cette méthode permet dans certains cas d'éviter la recherche de solutions analytiques pour des systèmes d'équations différentielles. Dans d'autres cas, elle permet de transposer des temps d'évolution trop longs en des temps d'observation plus réduits.

De nombreux procédés de simulation ont été et sont encore développés. Des modèles hydrodynamiques ont été réalisés en premier, parce qu'ils ne nécessitaient en général qu'un appareillage simple comme des récipients et des tuyauteries. Actuellement les moyens informatisés permettent la création de méthodes de simulation programmées extrêmement performantes dont la mise au point exige cependant une parfaite connaissance de ces techniques.

Concurremment, on peut utiliser l'analogie électrique simple, qui ne demande que l'association de quelques condensateurs et

résistances. Elle se prête en particulier à l'étude de la différence de deux exponentielles, fréquemment rencontrées dans un grand nombre de domaines : en radioactivité, en chimie dans l'étude de la cinétique des réactions, en médecine dans les processus d'élimination ou de transferts de substance d'un compartiment biologique dans un autre.

1. LE MODELE ELECTRIQUE.

1.1. Le principe du modèle.

Nous utilisons le montage suivant (fig. 1) :

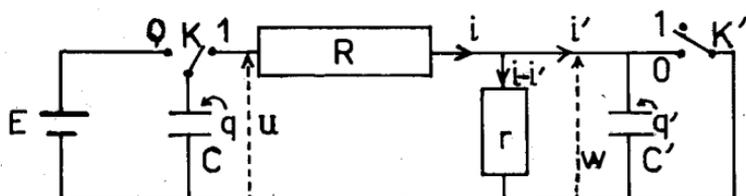


Fig. 1. — La simulation électrique.

- à $t < 0$ les commutateurs K et K' sont en position 0,
- à $t \geq 0$ ils sont en position 1.

Le condensateur C, possède une charge initiale $q = Q$.

Le condensateur C', possède la charge initiale $q' = 0$.

Le condensateur C se décharge de façon que :

$$u = q/C = Ri + w.$$

Simultanément C' se charge selon : $q'/C' = w = r \cdot (i - i')$ avec :

$$i = -dq/dt \quad \text{et} \quad i' = dq'/dt.$$

On en tire le système :

$$\frac{q}{C} - \frac{q'}{C'} + R \frac{dq}{dt} = 0$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{dq'}{dt} + \frac{q'}{rC'} = 0.$$

En éliminant q , on se ramène à une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.

$$\frac{d^2q'}{dt^2} + \frac{dq'}{dt} \cdot \left(\frac{1}{RC} + \frac{1}{RC'} + \frac{1}{rC'} \right) + \frac{q'}{RrCC'} = 0. \quad (1)$$

Avec : $\lambda = \frac{1}{RC}$ et $\lambda' = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right) \frac{1}{C'}$,

on obtient :

$$\frac{d^2q'}{dt^2} + (\lambda + \lambda') \frac{dq'}{dt} + \frac{q'\lambda}{rC'} = 0.$$

L'équation caractéristique $p^2 + (\lambda + \lambda')p + \frac{\lambda}{rC'} = 0$ est de discriminant $\Delta = (\lambda + \lambda')^2 - 4 \cdot \frac{\lambda}{rC'} = (\lambda - \lambda')^2 + 4\lambda^2 \frac{C}{C'}$ et possède les racines :

$$p = -\frac{1}{2} \left[(\lambda + \lambda') \pm \sqrt{(\lambda - \lambda')^2 + 4\lambda^2 \frac{C}{C'}} \right]$$

Si l'on veut que l'équation (1) représente la différence de deux exponentielles, les racines de l'équation caractéristique doivent être $-\lambda$ et $-\lambda'$. Cette condition est approximativement réalisée quand :

$$(\lambda - \lambda')^2 \gg 4\lambda^2 \frac{C}{C'} \quad \text{ou} \quad |\lambda - \lambda'| \gg 2\lambda \sqrt{\frac{C}{C'}}.$$

La solution de l'équation (1) est de la forme :

$$q' = Ae^{-\lambda t} + Be^{-\lambda' t}$$

avec à $t = 0$, $q' = 0$. On a $B = -A$ et $q' = A \cdot (e^{-\lambda t} - e^{-\lambda' t})$.

Par ailleurs :

$$q = -q' - \frac{1}{rC'} \int q' dt$$

$$q = -A(e^{-\lambda t} - e^{-\lambda' t}) + \frac{A}{rC'} \cdot \left(\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda'} e^{-\lambda' t} \right)$$

A $t = 0$, on a $q = Q$. D'où $A = -Q \frac{rC' \lambda \lambda'}{\lambda - \lambda'}$.

Si on suppose que R est bien plus grand que r , on a alors :

$$\lambda' \simeq \frac{1}{rC'} \quad \text{et} \quad A \simeq Q \cdot \frac{\lambda}{\lambda' - \lambda}$$

| |
|---|
| $q \simeq Q e^{-\lambda t} \quad (2)$ |
| $q' \simeq Q \frac{\lambda}{\lambda' - \lambda} (e^{-\lambda t} - e^{-\lambda' t}) \quad (3)$ |

En conclusion, le montage pratique peut représenter la différence de deux exponentielles quand R est bien plus grand que r à condition que CR soit très différent de C'r (pour avoir

$$|\lambda - \lambda'| \gg 2\lambda \sqrt{\frac{C}{C'}}.$$

1.2. Etude de la fonction représentée par le modèle.

1.2.1. LES PROPRIÉTÉS DE CETTE FONCTION.

Pour s'affranchir des caractéristiques des composants électriques, l'expression (3) peut être écrite sans dimension avec les changements de variable : $Y = q'/Q$ et $X = \lambda t$.

Si on pose : $K = \lambda'/\lambda - 1$, on a le résultat suivant :

$$Y = \frac{e^{-X}}{K} (1 - e^{-KX}) \quad (4)$$

Y devient nul quand X est infini et passe par un maximum de coordonnées :

$$X_M = \frac{1}{K} \ln(K + 1), \quad Y_M = \frac{e^{-X_M}}{K + 1}.$$

1.2.2. LA TECHNIQUE D'ENREGISTREMENT DE LA FONCTION.

Considérons les tensions :

* w aux bornes de la résistance r dans le circuit précédent. On a $w = q'/C'$ ou encore $w = Y \cdot Q/C'$ avec $Y = \frac{q'}{Q}$,

* v aux bornes de la résistance r quand on supprime le condensateur C' et l'interrupteur K' .

$$v = \frac{r}{R + r} \frac{q}{C} = \frac{r}{R + r} Y_1 \frac{Q}{C} \quad \text{avec} \quad Y_1 = \frac{q}{Q},$$

soit :

$$v = \frac{r}{R} \frac{Y_1}{C} Q$$

avec l'hypothèse que R est bien plus grande que r.

Le rapport des deux tensions est : $\frac{v}{w} = \frac{\lambda}{\lambda'} \frac{Y_1}{Y}$, ce qui

$$\text{donne : } \frac{Y}{Y_1} = \frac{\lambda}{\lambda'} \frac{w}{v}.$$

Pour l'application du modèle, il peut être intéressant de tracer sur un même support la fonction $Y = F(X)$ précédente et la fonction $Y_1 = F_1(X)$ qui représentera la courbe de décharge du condensateur C , la capacité C' étant supprimée. A partir d'une même origine et pour une même vitesse de déplacement du stylet, on enregistre successivement :

- la tension aux bornes de r , soit v , pour obtenir Y_1 , la capacité C' étant supprimée,
- la tension aux bornes de C' pour avoir Y .

Les sensibilités choisies sur l'enregistreur pour les ordonnées du graphe, s pour v et s' pour w , doivent être ajustées pour que les graphes représentent effectivement les fonctions Y et Y_1 .

Si Z et Z' sont les ordonnées correspondant à v et w , on a $v = s \cdot Z$ et $w = s' \cdot Z'$. On aura $Y/Y_1 = Z'/Z$ à la condition que $s'/s = \lambda'/\lambda$. Les graphes représenteront bien les fonctions précédentes.

Les courbes de la fig. 2 ont été tracées pour plusieurs valeurs

du rapport $\frac{\lambda'}{\lambda}$.

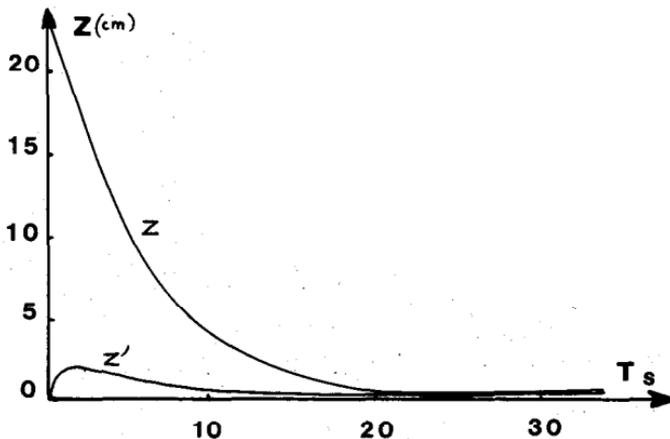


Fig. 2. — Décharge d'un condensateur C dans un condensateur C' à travers un montage potentiométrique :

$$r = 0,1 \text{ M}\Omega \quad \text{et} \quad R = 10 \text{ M}\Omega$$

Z élongation en centimètres,

T temps en secondes.

Fig. 2 A. — $C = 0,68$ microfarads ; $C' = 6,15$ microfarads ;
 $\lambda'/\lambda = 10,97$.

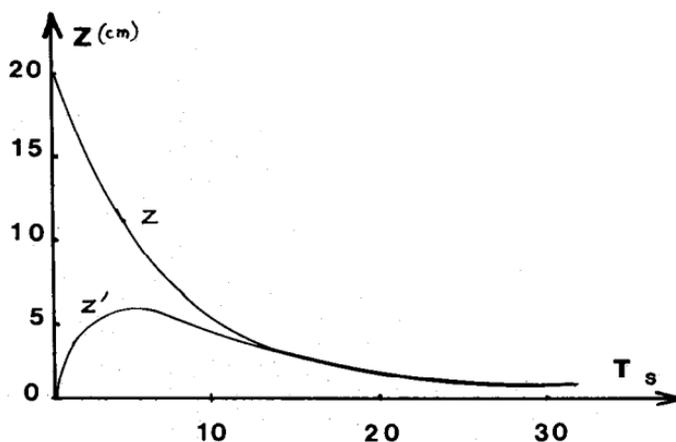


Fig. 2 B. — $C = 0,68$ microfarads ; $C' = 35,2$ microfarads ;
 $\lambda'/\lambda = 1,92$.

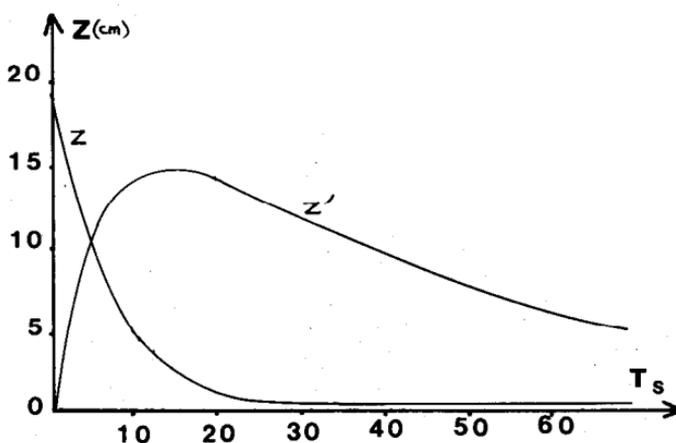


Fig. 2 C. — $C = 0,68$ microfarads ; $C' = 430$ microfarads ;
 $\lambda'/\lambda = 0,158$.

ANNEXE fig. 2 C. — Le tracé graphique a été effectué sur une table traçante Sefram 164 T G M. Il est possible de comparer les valeurs expérimentales et les valeurs théoriques :

$$\begin{array}{ll} \text{du point d'intersection :} & x_{ie} = 0,72 \quad y_{ie} = 0,507 \\ & x_{it} = 0,725 \quad y_{it} = 0,484. \end{array}$$

Soit une précision de 5 % pour les valeurs expérimentales.

$$\text{du maximum de la courbe :} \quad y_{me} = 0,73 \quad y_{mt} = 0,708.$$

Soit une précision de 5 % pour les valeurs expérimentales.

2. EXEMPLE D'APPLICATION DU MODELE.

Nous reprendrons l'exemple classique de la désintégration radioactive d'un isotope radioactif en filiation avec un descendant.

2.1. Simulation de la décroissance radioactive.

La constante radioactive d'un élément est l'inverse d'un temps. On peut rapprocher cette quantité λ de la quantité $1/\theta$ où θ serait la constante de temps de décharge d'un condensateur à travers une résistance. Par conséquent, l'expression de la charge résiduelle dans un condensateur qui se décharge, $q = Qe^{-t/CR}$, est apte à représenter l'évolution d'un élément radioactif au cours du temps. On sait que pour un nombre N de noyaux initiaux, le nombre de noyaux n non désintégrés à un instant donné t est $n = N e^{-\lambda t}$.

2.2. La filiation radioactive.

Soit maintenant un corps radioactif A qui se désintègre pour donner un corps fils B également radioactif qui produira à son tour un corps C. A l'instant initial, on dispose de N noyaux du seul élément A. De ces noyaux $dn = -\lambda N e^{-\lambda t} dt$, disparaissent pendant l'intervalle de temps dt pour donner naissance à dn_0 noyaux de B. On a donc : $dn_0 = -dn$.

Pendant ce même intervalle de temps, il disparaît dn'_B noyaux de B suivant l'expression $dn'_B = \lambda' n_B dt$, où n_B représente le nombre de noyaux de B présents à l'instant t déterminé par le bilan du processus : $dn_B = dn_0 + dn'_B$ que l'on peut écrire sous la forme : $dn_B = \lambda N e^{-\lambda t} dt - \lambda' n_B dt$. On obtient finalement l'équation $dn_B/dt + n_B \lambda' = N \lambda e^{-\lambda t}$, qui conduit au nombre de noyaux de B présents :

$$n_B = \frac{\lambda}{\lambda' - \lambda} \cdot N (e^{-\lambda t} - e^{-\lambda' t}). \quad (5)$$

2.3. Simulation de la filiation radioactive.

Cette expression de n_B est analogue à la relation (3) de la charge q' du condensateur C'. Le montage électrique proposé peut constituer un modèle de filiation radioactive.

L'usage consacre l'emploi de l'activité A d'un élément radioactif, qui est un taux de désintégration, parce qu'il est directement mesurable et appréciable dans ses effets.

Ecrivons la filiation en termes d'activité :

$$\text{pour le corps A : } A_A = -dn/dt = \lambda n$$

$$\text{pour le corps B : } A_B = -dn'_B/dt = \lambda' n_B,$$

d'où :

$$A_A = \lambda N e^{-\lambda t}$$

et :

$$A_B = \frac{\lambda' \lambda}{\lambda' - \lambda} N (e^{-\lambda t} - e^{-\lambda' t}). \quad (6)$$

Peut-on apprécier ces quantités à partir du modèle électrique proposé ? Avec les approximations faites dans la constitution du modèle (paragraphe 1.1.), on écrit que la tension v aux bornes de C (C' étant supprimée), est égale à $ur/R = r\lambda q$; comme $v/r = i$, on aura $i = \lambda q$ avec $\lambda = 1/CR$. On aurait de même $i' = \lambda' \cdot q'$ avec $\lambda' = 1/C'R$.

Donc i et i' peuvent représenter les activités A_A et A_B . Le rapport des constantes de désintégration est :

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{RC}{rC'}$$

2.4. Exemple d'application.

La désintégration du tellure radioactif, Te^{131}_{52} , dont la période est de 1,24 jour, produit par une série d'émissions bêta moins et gamma de l'iode radioactif, I^{131}_{53} , de période $T = 8,02$ jours. L'iode 131 est employé en médecine dans les explorations thyroïdiennes. Les courbes de la fig. 2c peuvent représenter l'évolution au cours du temps de ces deux corps.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G.-L. ATKINS. — *Modèles à compartiments multiples pour les systèmes biologiques*. Ed. Gauthier-Villars, 1973.
- [2] D. BLANC et G. AMBROSINO. — *Éléments de Physique nucléaire*. Ed. Masson et Cie, 1960.
- [3] A. BRIGUET. — *Simulation d'une expérience de radioactivité*. Bulletin de l'Union des Physiciens, n° 605, mai 1978, p. 1213.
- [4] P. FLEURY et J.-P. MATHIEU. — *Atomes - Molécules - Noyaux*. Ed. Eyrolles, 1966.
- [5] GELLER. — *Abrégé de Mathématiques à l'usage des étudiants en Médecine et Biologie*. Ed. Masson et Cie, 1973.
- [6] Y. GOMAS. — *Méthode de Simulation pour l'Étude des Désintégrations Radioactives*. Bulletin de l'Union des Physiciens, n° 615, juin 1979, p. 1201-1210.
- [7] J. PIERREZ. — *Utilisation des Radio-Isotopes en Médecine*. Bulletin de l'Union des Physiciens, n° 615, juin 1979, p. 1211-1231.
- [8] R. GUILLIEN. — *Physique Nucléaire Appliquée*. Ed. Eyrolles, 1960.